

УДК 517.9
ББК 22.161.1я73
А 424

Аксенов А.П. Математика. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2004. 584 с. (Математика в политехническом университете. Вып. 3).
ISBN 5-7422-0570-8

Книга представляет собой учебное пособие по обыкновенным дифференциальным уравнениям, рассчитанное на студентов политехнических университетов. Содержит изложение теоретического материала в соответствии с действующей программой, включая элементы теории устойчивости. Рассмотрены линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка.

Большое внимание уделено методам решения типовых задач, а также подбору и решению задач, разъясняющих теоретические факты и их практическое применение.

Приведены подробные решения более 250 задач.

Ил. 47. Библиогр.: 17 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

ISBN 5-7422-0570-8

© Аксенов А.П., 2004
© Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет, 2004

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	6
Глава 1. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной	16
§1. Основные понятия и определения	16
§2. Существование решения задачи Коши	28
§3. Единственность решения задачи Коши	38
§4. Общее, частное и особое решения уравнения $y' = f(x, y)$	42
§5. Дифференциальные уравнения первого порядка в симметричной форме	44
§6. Общий интеграл уравнения в симметричной форме	52
§7. Уравнение в полных дифференциалах	60
§8. Интегрирующий множитель	73
§9. Уравнения с разделяющимися переменными	124
§10. Линейные уравнения первого порядка	128
§11. Уравнение Бернулли	133
§12. Однородные уравнения	142
§13. Простейшие уравнения, приводящиеся к однородному ...	152
Глава 2. Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной	167
§1. Основные понятия и определения	167
§2. Метод введения параметра	174
§3. Примеры и задачи к главе 2	178
§4. Огибающая и дискриминантная кривая однопараметрического семейства плоских кривых	220
§5. Особое решение обыкновенного дифференциального уравнения как огибающая семейства интегральных кривых ...	231
Глава 3. Дифференциальные уравнения высших порядков	236
§1. Основные понятия и определения	236
§2. Некоторые типы уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка	244
§3. Примеры и задачи к §2	253
§4. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка	326

§5. Линейные однородные уравнения	328
§6. Теорема о составлении общего решения линейного однородного уравнения n -го порядка	337
§7. Линейные неоднородные уравнения n -го порядка	340
§8. О комплексных решениях линейного однородного уравнения	344
§9. Линейные однородные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами	347
§10. Построение частного решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида	353
§11. Уравнение Эйлера	360
§12. Примеры и задачи по теме: "Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка"	361
Глава 4. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов	397
§1. Непосредственное применение ряда Тейлора	397
§2. Метод неопределенных коэффициентов	399
§3. Уравнение Бесселя. Его интегрирование с помощью обобщенного степенного ряда	403
Глава 5. Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений	419
§1. Основные понятия и определения	419
§2. Некоторые сведения из теории вектор-функций	421
§3. Существование и единственность решения задачи Коши нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений	428
§4. Общее решение и общий интеграл нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений	437
§5. Методы интегрирования нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений	448
§6. Интегрирование линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка	457
§7. Продолжение решений. Нелокальные свойства решений	479
Глава 6. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений	490
§1. Некоторые сведения из теории матриц	490
§2. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Простейшие свойства решений линейных однородных систем	493
§3. Линейная зависимость и линейная независимость вектор-функций. Признаки линейной независимости решений линейной однородной системы	496

§4. Теорема о составлении общего решения линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений	498
§5. Формула Остроградского — Лиувилля	501
§6. Теорема о составлении общего решения линейной неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений	503
§7. Метод вариации произвольных постоянных для нахождения решения $Y(x) = \Psi(x)$ линейной неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений	504
§8. Матричные последовательности и ряды	506
§9. Матричные степенные ряды	508
§10. Экспонента от матрицы	514
§11. Матрица-функция e^{Ax}	515
§12. Умножение матричных рядов	517
§13. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами	522
§14. Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами	527
§15. Примеры и задачи к главе 6	528
Глава 7. Линейные однородные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами	542
§1. Логарифмы матриц	542
§2. Линейные однородные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами	546
§3. Мультипликаторы	548
§4. Структура фундаментальной матрицы решений линейной однородной системы с периодическими коэффициентами	550
§5. Приведение линейной однородной системы с периодическими коэффициентами к линейной однородной системе с постоянными коэффициентами	554
Глава 8. Понятие устойчивости решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений	555
§1. Постановка задачи об устойчивости. Определения	555
§2. Устойчивость линейных систем	561
§3. Устойчивость линейных систем с постоянными коэффициентами	566
§4. Устойчивость линейных систем с периодическими коэффициентами	568
§5. Нелинейные системы. Устойчивость по первому приближению	569
§6. Примеры и задачи к главе 8	575
Литература	584

ВВЕДЕНИЕ

Уравнения, с которыми мы встречались до сих пор, служили преимущественно для отыскания численных значений тех или иных величин. Однако в приложениях математики часто возникают качественно новые задачи, в которых неизвестной является сама функция, сам закон зависимости одних переменных от других. Например, изучая процесс охлаждения тела, мы должны определить, как будет изменяться с течением времени его температура, при определении движения планеты нам необходимо определить зависимость ее координат от времени и т. д.

Наиболее важными из уравнений, служащих для разыскания функций, являются так называемые *дифференциальные уравнения*. Под этим названием понимают уравнения, в которые входит не только сама неизвестная функция, но и ее производные некоторых порядков.

Нижеследующие равенства могут служить примерами дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + p(t)x &= Q(t); \quad \frac{d^2x}{dt^2} + m^2x = A \sin \omega t; \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \end{aligned} \quad (\text{I})$$

В первых двух из них неизвестная функция обозначена буквой x , а буквой t — независимая переменная; в последних же трех неизвестная функция обозначена буквой u , и она зависит от двух аргументов x и t или x и y .

Большое значение, которое имеют дифференциальные уравнения для математики и особенно для ее приложений, объясняется главным образом тем, что к решению таких уравнений может

быть приведено исследование многих физических проблем и технических задач. В механике, астрономии, физике, технике с помощью дифференциальных уравнений были достигнуты огромные успехи. Ньютон, исследуя дифференциальные уравнения движения тел, получил законы движения планет, установленные Кеплером эмпирически. Лавуазье в 1846 г. предсказал существование планеты Нептун и определил ее положение на небе на основе численного анализа тех же уравнений.

Ниже будет показано, что каждое дифференциальное уравнение определяет, вообще говоря, целый класс функций, ему удовлетворяющих. Теория дифференциальных уравнений должна дать возможность получить достаточно полное представление о свойствах всех этих функций. Кроме того, она должна обеспечить средства для нахождения численных значений функций, если это потребуется для расчетов.

Если неизвестная функция зависит от одного аргумента, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*. В том случае, когда неизвестная функция зависит от нескольких аргументов и в уравнение входят производные по нескольким аргументам, дифференциальное уравнение называется *уравнением с частными производными*. Первые два из уравнений (I) являются обыкновенными, а последние три — уравнениями с частными производными.

Теория уравнений с частными производными обладает многими своеобразными чертами, существенно отличающими ее от теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Основные идеи, связанные с такими уравнениями, излагаются в курсе математической физики; мы же в этом пособии будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Дадим теперь точные определения.

1. *Обыкновенным дифференциальным уравнением* называется любое соотношение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y = y(x)$ и производные искомой функции $y(x)$ до некоторого порядка включительно.

Обыкновенное дифференциальное уравнение может быть приведено к виду

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

Здесь $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ — известная функция, заданная в некоторой области $(G) \subset \mathbb{R}^{n+2}$.

2. Число n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$), т. е. наивысший из порядков производных, входящих в (1), называется *порядком уравнения*.

Например, уравнение: $y' + xy - e^{\frac{x^2}{2}} = 0$ является уравнением первого порядка, а уравнение: $y + y'' - x = 0$ — уравнением второго порядка.

3. Функция $y = \varphi(x)$ называется *решением* уравнения (1) в промежутке $\langle a, b \rangle$ (случаи $a = -\infty$, $b = +\infty$ не исключаются), если подстановка функции $y = \varphi(x)$ в дифференциальное уравнение (1) превращает последнее в тождество по x на $\langle a, b \rangle$. При этом предполагается, что функция $\varphi(x)$ имеет в $\langle a, b \rangle$ непрерывные производные до порядка n включительно и что точка $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x))$ принадлежит области задания функции F при любом x из $\langle a, b \rangle$.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения (1) называется *интегрированием* этого уравнения.

График решения $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$ уравнения (1) на плоскости Oxy называется *интегральной кривой*.

Простейшим примером дифференциального уравнения является уравнение: $y' = f(x)$, где $f(x)$ — известная функция, определенная и непрерывная на некотором интервале (a, b) оси Ox , а $y = y(x)$ — искомая функция независимой переменной x . Решениями этого уравнения являются первообразные функции для

функции $f(x)$, а именно $y(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx + C$, где x_0 и $x \in (a, b)$, а C — произвольная постоянная.

Придавая постоянной C различные значения, мы получим бесконечное множество решений уравнения $y' = f(x)$. Отметим, что иметь бесконечное множество решений — характерное свойство дифференциальных уравнений. В этом смысле приведенный выше пример типичен. Поэтому, решив дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию некоторого процесса, нельзя считать, что мы нашли зависимость между величинами, характеризующими данный процесс. Чтобы выделить из бесконечного множества зависимостей ту, которая описывает именно этот процесс, нужно иметь дополнительную информацию, например, знать начальное состояние процесса. Без этого дополнительного условия задача недоопределена.

Рассмотрим несколько конкретных задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.

Задача 1. В резервуаре имеется p кг водного раствора соли, в котором содержится q кг соли. В определенный момент включает-

ся устройство, непрерывно подающее в резервуар r кг чистой воды в секунду и одновременно удаляющее из него r кг раствора. При этом в самом резервуаре жидкость непрерывно перемешивается.

Вопрос: как изменяется со временем количество соли в резервуаре?

► Момент начала процесса примем за начало отсчета времени t . Пусть $y(t)$ — искомая функция, выражающая в каждый момент t количество соли в резервуаре. В силу условия задачи и соглашения об отсчете времени, имеем: $y(0) = q$. Это пока единственное значение искомой функции, которое нам известно.

Поначалу кажется, что основная трудность задачи будет состоять в том, что концентрация раствора непрерывно меняется. Однако, применив надлежащую методику решения, можно извлечь пользу из этого “непрерывного” изменения, обратив эту кажущуюся главную трудность в решающее средство для достижения цели.

Зафиксируем некоторый момент времени t и посмотрим, что произойдет в резервуаре за промежуток времени от t до $t + \Delta t$.

В начале этого промежутка в резервуаре имеется $y(t)$ кг соли, а в конце — $y(t + \Delta t)$ кг. Разность $y(t) - y(t + \Delta t)$ — это количество соли, которое вытекло с раствором за время Δt . Так как концентрация раствора в течение промежутка времени от t до

$t + \Delta t$ убывала от $\frac{y(t)}{p}$ до $\frac{y(t + \Delta t)}{p}$, то

$$\frac{y(t + \Delta t)}{p} \cdot r \Delta t < y(t) - y(t + \Delta t) < \frac{y(t)}{p} \cdot r \Delta t.$$

Разделив все члены этого двойного неравенства на Δt , получаем

$$\frac{y(t + \Delta t)}{p} \cdot r < -\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} < \frac{y(t)}{p} \cdot r.$$

Исходя из характера рассматриваемого процесса, можно сделать вывод, что искомая функция $y(t)$ непрерывна. Но тогда $y(t + \Delta t) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} y(t)$. Переходя в предыдущем неравенстве к преде-

лу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = -\frac{y(t)}{p} \cdot r$. Последнее

означает, что искомая функция $y(t)$ в каждой точке t имеет производную $y'(t)$, причем

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{r}{p} \cdot y(t). \quad (2)$$

(2) — дифференциальное уравнение относительно функции $y(t)$. Таким образом, наша задача свелась к чисто математической задаче: найти решение $y = y(t)$ уравнения (2), для которого $y(0) = q$. Так как $y(t) > 0$, то, разделив обе части уравнения (2) на $y(t)$, получаем

$$\frac{d}{dt}(\ln y(t)) = -\frac{r}{p} \Rightarrow \ln y(t) = -\frac{r}{p}t + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная; обозначим ее так: $C_1 = \ln C$, $C > 0$. Тогда будем иметь

$$\ln y(t) = -\frac{r}{p}t + \ln C. \quad (3)$$

Из (3) находим:

$$y(t) = Ce^{-\frac{r}{p}t}, \quad (4)$$

Чтобы из множества функций (4) выделить ту, которая описывает процесс изменения количества соли в резервуаре, воспользуемся условием $y(0) = q$. Это условие дает, что $q = C$. Таким образом, окончательно получаем:

$$y(t) = qe^{-\frac{r}{p}t}. \quad (5)$$

Задача 2. Закон распада радия состоит в том, что скорость распада пропорциональна наличному количеству радия. Пусть известно, что в некоторый момент времени $t = t_0$ имелось R_0 граммов радия. Требуется определить количество радия в любой момент времени t .

► Пусть $R(t)$ — количество (в граммах) нераспавшегося радия в момент времени t . Перейдем от момента времени t к моменту времени $t + \Delta t$. В момент $t + \Delta t$ количество нераспавшегося радия будет равно $R(t + \Delta t)$. Тогда разность $R(t) - R(t + \Delta t)$ — это количество радия, которое распалось за промежуток времени от t до

$t + \Delta t$. Отношение $\frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t}$ представляет собой среднюю

скорость распада радия за промежуток времени от t до $t + \Delta t$, а предел этого отношения при $\Delta t \rightarrow 0$, т. е.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t} = -\frac{dR(t)}{dt},$$

есть скорость распада радия в момент t .

Так как скорость распада радия пропорциональна его наличному количеству, то получаем

$$-\frac{dR(t)}{dt} = kR(t), \quad (6)$$

где k — постоянная величина. (6) — дифференциальное уравнение относительно функции $R(t)$. Таким образом, наша задача свелась к чисто математической: требуется найти решение $R = R(t)$ уравнения (6), для которого $R(t_0) = R_0$.

Так как $R(t) > 0$, то, разделив обе части уравнения (6) на $R(t)$, получаем $\frac{d}{dt}(\ln R(t)) = -k \Rightarrow$

$$\ln R(t) = -kt + \ln C, \quad (7)$$

где C — произвольная постоянная ($C > 0$). Из (7) находим

$$R(t) = Ce^{-kt}. \quad (8)$$

Чтобы из множества функций (8) выделить ту, которая описывает процесс изменения количества радия, используем условие $R(t_0) = R_0$. Положив в (8) $t = t_0$, получаем $R_0 = Ce^{-kt_0} \Rightarrow$

$$C = R_0 e^{kt_0}. \quad (9)$$

Подставив теперь в (8) вместо C его значение из (9), будем иметь

$$R(t) = R_0 e^{-k(t-t_0)}. \quad (10)$$

Задача 3. Тело, имеющее в начальный момент времени $t_0 = 0$ температуру T_0 , поместили в среду, температура которой поддерживается неизменной и равной T_1 . Как будет изменяться с течением времени температура тела?

► Обозначим через $T(t)$ температуру тела в момент времени t . Экспериментально установлено, что скорость изменения температуры тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Это означает, что

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\gamma \cdot (T(t) - T_1), \quad (11)$$

где $\gamma > 0$ — коэффициент пропорциональности.

Знак минус в правой части (11) соответствует экспериментальным данным: если $T(t) - T_1 > 0$, то температура тела убывает и поэтому скорость изменения температуры $\frac{dT(t)}{dt} < 0$, если же

$T(t) - T_1 < 0$, то температура тела возрастает, а следовательно, скорость ее изменения положительна.

Итак, процесс охлаждения (или нагревания) тела в среде с неизменной температурой моделируется уравнением (11). Так как

$T_1 = \text{const}$, то $\frac{dT(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(T(t) - T_1)$. Поэтому уравнение (11) может быть записано в виде

$$\frac{d}{dt}(T(t) - T_1) = -\gamma \cdot (T(t) - T_1) \Leftrightarrow \frac{\frac{d}{dt}(T(t) - T_1)}{T(t) - T_1} = -\gamma$$

(ибо $T(t) - T_1 \neq 0$) или в виде

$$\frac{d}{dt}[\ln|T(t) - T_1|] = -\gamma \Rightarrow \ln|T(t) - T_1| = -\gamma t + \ln C,$$

где $C > 0$. Из последнего соотношения находим, что

$$|T(t) - T_1| = Ce^{-\gamma t}. \quad (12)$$

1) Пусть $T_0 > T_1$ (тело охлаждается). Тогда $T(t) > T_1$ и, следовательно, имеем из (12): $T(t) - T_1 = Ce^{-\gamma t} \Rightarrow$

$$T(t) = T_1 + Ce^{-\gamma t}. \quad (13)$$

Чтобы из множества функций (13) выделить ту, которая описывает процесс изменения температуры тела с течением времени, воспользуемся условием $T(0) = T_0$. Это условие дает $T_0 = T_1 + C \Rightarrow C = T_0 - T_1$. Таким образом, получаем в этом случае (когда $T_0 > T_1$)

$$T(t) = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-\gamma t}. \quad (14)$$

Из (14) $\Rightarrow T(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} T_1$, монотонно убывая.

2) Пусть $T_0 < T_1$ (тело нагревается). Тогда $T(t) < T_1$ и, следовательно, имеем из (12): $T(t) - T_1 = -Ce^{-\gamma t} \Rightarrow$

$$T(t) = T_1 - Ce^{-\gamma t}. \quad (15)$$

Чтобы из множества функций (15) выделить ту, которая описывает процесс изменения температуры тела с течением времени, используем условие $T(0) = T_0$. Это условие дает $T_0 = T_1 - C \Rightarrow C = T_1 - T_0$. Таким образом, получаем в этом случае (когда $T_1 > T_0$)

$$T(t) = T_1 - (T_1 - T_0)e^{-\gamma t}. \quad (16)$$

Из (16) $\Rightarrow T(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} T_1$, монотонно возрастаая. ◀

Задача 4. Тело массой m падает вертикально вниз с некоторой высоты. Сила вязкого трения, действующая на тело, пропорциональна скорости падения тела, т. е. $F_{\text{тр}} = -\alpha v$, где $\alpha > 0$ — коэффициент трения.

Вопрос: как изменяется со временем скорость падения тела?

► Пусть $v(t)$ — скорость падения тела в момент времени t . На тело действуют две противоположно направленные силы: сила тяжести $F_g = mg$ и сила вязкого трения $F_{\text{тр}} = -\alpha v$. В данном случае дифференциальное уравнение можно составить, используя второй закон Ньютона: $ma = F = F_g + F_{\text{тр}}$, т. е.

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \alpha v, \quad (17)$$

так как ускорение $a = \frac{dv}{dt}$. Разделив обе части уравнения (17) на m , получаем

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha}{m} v + g. \quad (18)$$

Приняв во внимание, что $g = \text{const}$, можем написать

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{m}{\alpha} \frac{d}{dt} \left(-\frac{\alpha}{m} v + g \right).$$

А тогда уравнение (18) принимает вид

$$\begin{aligned} -\frac{m}{\alpha} \frac{d}{dt} \left(-\frac{\alpha}{m} v + g \right) &= -\frac{\alpha}{m} v + g \Rightarrow \frac{\frac{d}{dt} \left(-\frac{\alpha}{m} v + g \right)}{-\frac{\alpha}{m} v + g} = -\frac{\alpha}{m} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \ln \left| -\frac{\alpha}{m} v + g \right| &= -\frac{\alpha}{m} \Rightarrow \ln \left| -\frac{\alpha}{m} v + g \right| = -\frac{\alpha}{m} t + \ln C, \end{aligned}$$

где $C > 0$ — произвольная постоянная. А тогда $\left| -\frac{\alpha}{m} v + g \right| = C e^{-\frac{\alpha}{m} t}$.

Или, так как $g - \frac{\alpha}{m} v > 0$, то $-\frac{\alpha}{m} v + g = C e^{-\frac{\alpha}{m} t} \Rightarrow$

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha} - \frac{m}{\alpha} C e^{-\frac{\alpha}{m} t}. \quad (19)$$

Если тело начинает движение с нулевой скоростью, т. е. $v(0) = 0$, то, положив в (19) $t = 0$, находим

$$0 = \frac{mg}{\alpha} - \frac{m}{\alpha} C \Rightarrow C = g.$$

Вставив в (19) C на g , мы выделим тем самым из множества решений дифференциального уравнения (17) то решение, которое описывает изменение скорости тела с течением времени при условии, что $v(0) = 0$. Таким образом, получаем

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right). \quad (20)$$

При свободном падении без трения: $\frac{dv}{dt} = g \Rightarrow v(t) = gt$, т. е.

скорость возрастает линейно (это нам известно). При наличии же вязкого трения скорость, возрастая, тем не менее стремится

к постоянной величине: $v(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \frac{mg}{\alpha}$.

Замечание. Даже из приведенного выше небольшого числа простейших задач становится ясно, что решение каждой из них состоит из двух этапов. Первый этап решения задачи заканчивается составлением дифференциального уравнения для искомой функции. Второй этап представляет собой чисто математическую задачу, а именно: решить полученное дифференциальное уравнение, т. е. найти все его решения или только те, для которых выполняются определенные дополнительные условия. Следует отметить, что все многообразие природных процессов и явлений не сводится к дифференциальным уравнениям нескольких типов. Мир дифференциальных уравнений богат почти настолько, насколько разнообразен реальный мир.

В этом пособии мы рассмотрим многие типы дифференциальных уравнений и ознакомимся с методами их решения. Мы увидим, что дифференциальные уравнения, решаемые в элементарных функциях, немногочисленны. (Запас элементарных функций оказывается слишком бедным для того, чтобы дать описание многих физических процессов и явлений.) Поэтому весьма часто случается, что исследование того или иного дифференциального уравнения, встречающегося в физике или механике, побуждает вводить новые классы функций, подвергать их исследованию и расширять арсенал тех функций, которые применяются при решении прикладных задач.

В задачу теории дифференциальных уравнений входит также качественный анализ, т. е. выяснение основных свойств решений непосредственно по виду уравнения (не решая его).

Представим себе, что мы изменяем начальные значения для искомой функции и производных от нее (изменяем начальное состояние изучаемого процесса). Тогда будет изменяться и само решение (будет иначе протекать процесс). Теория должна обеспечить нам возможность судить о том, каким будет это изменение. В частности, будет ли при малых изменениях начальных данных мало изменяться и само решение и будет ли оно, следовательно, устойчивым в этом отношении, или же малые изменения начальных данных могут вызывать большие изменения в самом решении, и оно будет неустойчивым.

Мы должны также уметь составить качественную и, там, где можно, количественную картину поведения не только отдельных решений уравнения, но и всех его решений, взятых вместе.

Наконец, когда потребуются произвести расчет, нужно будет находить решение уравнения численно. Здесь теория обязана доставить в руки исследователя методы возможно более экономного и быстрого вычисления решений.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

§1. Основные понятия и определения

✓ 1°. Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение вида

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

Здесь x — независимая переменная; $y = y(x)$ — неизвестная функция; $F(x, y, y')$ — известная функция, заданная в некоторой области $(G) \subset \mathbb{R}^3$. ((1) — дифференциальное уравнение первого порядка общего вида; оно не разрешено относительно производной.)

Уравнение вида

$$y' = f(x, y) \left(\frac{dy}{dx} = f(x, y) \right), \quad (2)$$

где $f(x, y)$ — известная функция двух переменных, заданная в некоторой области $(D) \subset \mathbb{R}^2$, называется *дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной*.

Часто встречается и такая запись дифференциального уравнения первого порядка:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (3)$$

Здесь $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — известные функции переменных x и y , заданные в некоторой области $(D) \subset \mathbb{R}^2$. (Уравнение (3) имеет симметричную форму; в нем переменные x и y — равноправные.)

2°. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, т. е. уравнение вида (2):

$$y' = f(x, y).$$

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой области (D) плоскости Oxy ($f(x, y) \in C(D)$). Будем говорить в этом случае, что уравнение $y' = f(x, y)$ задано в области (D) .

Определение. Функция $y = \varphi(x)$ называется *решением* уравнения (2) в промежутке $\langle a, b \rangle$, если:

- 1) $\varphi(x)$ дифференцируема на $\langle a, b \rangle$,
- 2) точка $(x, \varphi(x)) \in (D)$ для любого $x \in \langle a, b \rangle$,
- 3) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ для любого $x \in \langle a, b \rangle$.

Заметим, что функция $f(x, \varphi(x)) \in C(\langle a, b \rangle)$ как суперпозиция непрерывных функций. У нас $\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$, $x \in \langle a, b \rangle$. Следовательно, $\varphi'(x) \in C(\langle a, b \rangle)$.

✓ **Вывод:** любое решение уравнения (2) непрерывно дифференцируемо на промежутке $\langle a, b \rangle$.

График решения $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, дифференциального уравнения (2) называется *интегральной кривой* этого уравнения.

Проекция графика решения на ось ординат называется *фазовой кривой* (траекторией) дифференциального уравнения.

3°. Отметим, что решение уравнения (2) может быть получено иногда в неявной форме, т. е. в виде соотношения

$$\psi(x, y) = 0. \quad (3)$$

Но при этом предполагается, что соотношение (3) определяет y как функцию от x : $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, которая является решением уравнения (2) на промежутке $\langle a, b \rangle$.

Решение дифференциального уравнения (2) может быть получено также в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle. \quad (4)$$

И в этом случае предполагается, что соотношения (4) определяют y как функцию от x : $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, которая является решением уравнения (2) на промежутке $\langle a, b \rangle$.

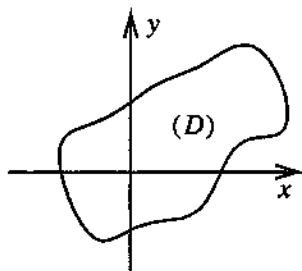


Рис. 1.1

Пример 1. Дано дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{1}{(x+y)^2}. \quad (5)$$

Убедиться, что функция $y = \varphi(x)$, определяемая соотношением $y = \operatorname{arctg}(x+y) + C$, где C — произвольная постоянная, является решением уравнения (5).

► В этом примере $f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^2} \Rightarrow$ Уравнение (5) опреде-

лено на всей плоскости Oxy , исключая точки прямой $y = -x$. У нас y , как функция от x задана неявно соотношением

$$\underbrace{\operatorname{arctg}(x+y) - y + C}_{=F \text{ (обозначение)}} = 0. \quad (6)$$

Видим, что сама функция F и ее частные производные

$$F'_x = \frac{1}{1+(x+y)^2}, \quad F'_y = \frac{1}{1+(x+y)^2} - 1 = -\frac{(x+y)^2}{1+(x+y)^2} \quad \text{определены}$$

и непрерывны на всей плоскости Oxy . Видим, далее, что $F'_y \neq 0$ на всей плоскости Oxy , исключая точки прямой: $y = -x$.

А тогда из теории неявных функций следует, что в окрестности любой точки (x_0, y_0) , такой, что $y_0 \neq -x_0$ и $\operatorname{arctg}(x_0 + y_0) - y_0 + C = 0$, соотношение (6) определяет единственную непрерывно дифференцируемую функцию $y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta$ ($I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$), причем для любого $x \in I_\delta$:

$$\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))} = \frac{\frac{1}{1+(x+\varphi(x))^2}}{\frac{(x+\varphi(x))^2}{1+(x+\varphi(x))^2}} = \frac{1}{(x+\varphi(x))^2}, x \in I_\delta.$$

Видим, что функция $y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta$, определяемая соотношением (6), является решением уравнения (5). ◀

Пример 2. Дано дифференциальное уравнение

$$y' = -\frac{y^2}{(1+xy)}. \quad (7)$$

Убедиться, что функция $y = \varphi(x)$, заданная параметрически уравнениями

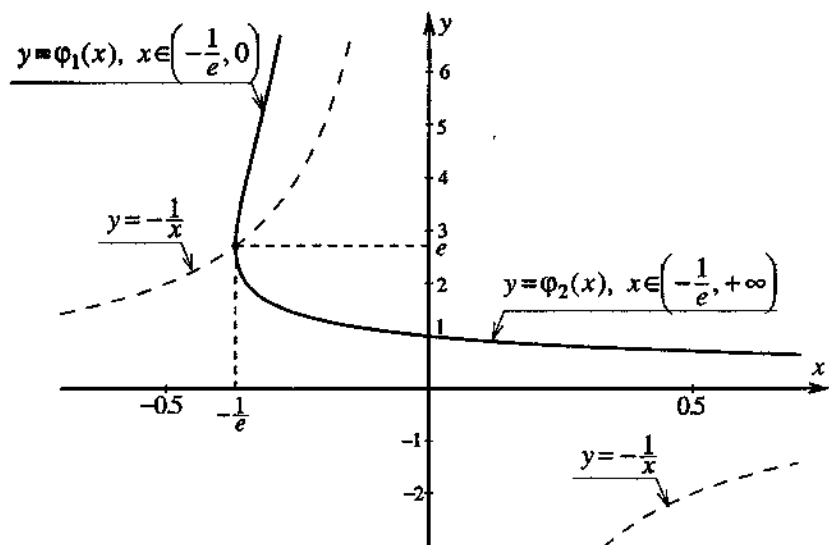


Рис. 1.2. К примеру 2 (для наглядности масштаб по оси Ox увеличен)

$$\begin{cases} x = te^t, \\ y = e^{-t}, \end{cases} \quad t \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty). \quad (8)$$

является решением уравнения (7).

► В этом примере $f(x, y) = -\frac{y^2}{(1+xy)} \Rightarrow$ Уравнение (7) опре-

делено на всей плоскости Oxy , исключая точки гиперболы $y = -\frac{1}{x}$.

Функции $x = te^t$, $y = e^{-t}$ определены и непрерывны для $t \in (-\infty, +\infty)$. Имеем $x'_t = (t+1)e^t$; $y'_t = -e^{-t}$; $x'_t = 0$ при $t = -1$; $x'_t < 0$ для $t \in (-\infty, -1)$; $x'_t > 0$ для $t \in (-1, +\infty)$,

$x_{\min} = x(t)|_{t=-1} = -\frac{1}{e}$; $y'_t < 0$ для $t \in (-\infty, +\infty) \Rightarrow y(t)$ — строго убывающая функция на промежутке $(-\infty, +\infty)$; $x(t)$ — строго убывающая функция на промежутке $(-\infty, -1)$ и строго возрастающая на промежутке $(-1, +\infty)$. Имеем $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ для $t \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

(У нас $x'_t \neq 0$, для $t \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.) Следовательно, $y'_x > 0$, когда $t \in (-\infty, -1)$, и $y'_x < 0$, когда $t \in (-1, +\infty)$. Имеем:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} te^t = -0; \quad \lim_{t \rightarrow -1-0} x(t) = -\frac{1}{e};$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-t} = +\infty; \quad \lim_{t \rightarrow -1-0} y(t) = e;$$

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} x(t) = -\frac{1}{e}; \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} te^t = +\infty;$$

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} y(t) = e; \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0.$$

Вывод: При изменении x от $-\frac{1}{e}$ до 0 функция $y(x)$ возрастает от e до $+\infty$. При изменении x от $-\frac{1}{e}$ до $+\infty$ функция $y(x)$ убывает от e до 0. Функция $y = \varphi(x)$, определяемая уравнениями (8), имеет две ветви: $y = \varphi_1(x)$, $x \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$, и $y = \varphi_2(x)$, $x \in \left(-\frac{1}{e}, +\infty\right)$. Ветвь $y = \varphi_1(x)$ соответствует изменению параметра t от $-\infty$ до -1 ; ветвь $y = \varphi_2(x)$ соответствует изменению параметра t от -1 до $+\infty$.

Имеем $y''_{xx} = \frac{2t+3}{(t+1)e^{3t}} \Rightarrow y''_{xx} = 0$ при $t = -\frac{3}{2}$. Так как $y''_{xx} > 0$ для $t < -\frac{3}{2}$ и $y''_{xx} < 0$ для $-\frac{3}{2} < t < -1$, то $\left(-\frac{3}{2e\sqrt{e}}, e\sqrt{e}\right)$ — точка перегиба ветви $y = \varphi_1(x)$. Так как $y''_{xx} > 0$ для $t > -1$, то ветвь $y = \varphi_2(x)$, $x \in \left(-\frac{1}{e}, +\infty\right)$, направлена выпуклостью вниз.

Итак, параметрические уравнения (8) определяют непрерывно дифференцируемые функции $y = \varphi_1(x)$, $x \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$, и $y = \varphi_2(x)$, $x \in \left(-\frac{1}{e}, +\infty\right)$. Покажем, что обе эти функции являются решениями дифференциального уравнения (7).

Действительно, имеем как для $t \in (-\infty, -1)$, так и для $t \in (-1, +\infty)$:

$$y'_x + \frac{y^2}{(1+xy)} = -\frac{e^{-t}}{(t+1)e^t} + \frac{e^{-2t}}{1+t} = -\frac{1}{(t+1)e^{2t}} + \frac{1}{(t+1)e^{2t}} = 0.$$

4°. Поле направлений. Говорят, что в некоторой области задано поле направлений, если каждой точке этой области поставлено в соответствие одно и только одно направление.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида (2), т. е. уравнение $y' = f(x, y)$. Пусть (D) — область, в которой определена и непрерывна функция $f(x, y)$. Построим в области (D) поле направлений следующим образом: в каждой точке

$(x_0, y_0) \in (D)$ проводим отрезок, например, единичной длины, исходящий из этой точки, так, чтобы он составил с положительным направлением оси Ox угол α , такой, что $\operatorname{tg} \alpha = f(x_0, y_0)$.

Пусть $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$ — решение уравнения (2), график которого (l) проходит через точку (x_0, y_0) . Так как $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, — решение уравнения (2), то $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ для любого $x \in \langle a, b \rangle$, а значит, в частности, $\varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0)) = f(x_0, y_0)$. Но $\varphi'(x_0)$ — тангенс угла наклона касательной к графику (l) функции $y = \varphi(x)$ в точке (x_0, y_0) (см. рис. 1.3). Отсюда заключаем, что интегральная кривая уравнения (2) в каждой своей точке имеет касательную, совпадающую с направлением поля в этой точке. Верно и обратное: всякая кривая, расположенная в области (D) и касающаяся в каждой своей точке направления, имеющегося в этой точке, является интегральной кривой уравнения (2).

Замечание. Встречаются случаи, когда в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ представляет неопределенность вида $0/0$. В такой точке нельзя указать никакого разумного направления поля. (Это — особая точка поля.)

При изучении поля направлений в области (D) представляют интерес так называемые изоклины.

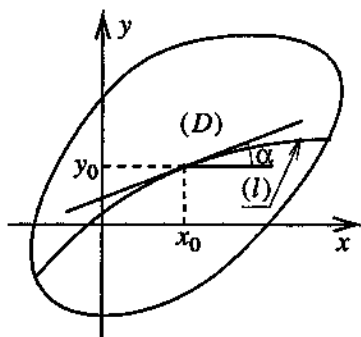


Рис. 1.3

Изоклиной называется кривая, во всех точках которой направление поля одинаково. Все интегральные кривые, пересекающие данную изоклину, в точках пересечения наклонены к оси абсцисс под одним и тем же углом.

$f(x, y) = k$ — уравнение семейства изоклин.

В некоторых случаях по виду правой части уравнения $y' = f(x, y)$ удастся найти линию экстремумов и линию точек перегиба, т. е. линии, во всех точках которых интегральные кривые этого уравнения имеют соответственно экстремум или перегиб.

Выясним, например, как можно найти уравнение линии экстремумов для решений дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ и как отличить точки минимума от точек максимума.

► Пусть $y = \varphi(x)$ — любое решение уравнения $y' = f(x, y)$ на промежутке $\langle a, b \rangle$. Функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема, и ее производная в точке экстремума равна нулю:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x, \varphi(x)) = 0. \text{ Следовательно, множество критических}$$

точек решений данного уравнения определяется соотношением $f(x, y) = 0$. Пусть x_0 — экстремальная точка решения $y = \varphi(x)$. Если $\varphi''(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума, а если $\varphi''(x_0) < 0$, то точка x_0 — точка максимума. Так как

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= \frac{d}{dx} f(x, \varphi(x)) = \frac{\partial f(x, \varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x, \varphi(x))}{\partial y} \cdot \varphi'(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi''(x_0) &= \frac{\partial f(x_0, \varphi(x_0))}{\partial x} + \frac{\partial f(x_0, \varphi(x_0))}{\partial y} \cdot \underbrace{\varphi'(x_0)}_{=0} = \frac{\partial f(x_0, \varphi(x_0))}{\partial x}, \end{aligned}$$

то множество точек минимума решений исходного уравнения $y' = f(x, y)$ определяется системой

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ f'_x(x, y) > 0, \end{cases}$$

а множество точек максимума решений — системой

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ f'_x(x, y) < 0. \end{cases} \blacktriangleleft$$

Изоклины вместе с линиями экстремумов и точек перегиба дают возможность построить схематически графики интегральных кривых уравнения $y' = f(x, y)$.

Задача. С помощью изоклин построить приближенную схему интегральных кривых уравнения

$$y' = 2x(1 - y). \quad (9)$$

► Семейство изоклин для данного уравнения определяется уравнением $2x(1 - y) = k$, где k — действительный параметр. Это уравнение задает две прямые: $x = 0$ и $y = 1$ (при $k = 0$) и семей-

ство гипербол $y = 1 - \frac{k}{2x}$ (при $k \neq 0$). Заметим, что прямая $y = 1$

является интегральной кривой, так как функция $y = 1$ есть решение исходного дифференциального уравнения. Изоклину $x = 0$ (т. е. ось ординат) интегральные кривые уравнения (9) пересекают под прямым углом.

(В точках, расположенных на прямой $x = 0$, имеем $y' = 0$. Значит, касательные к интегральным кривым в этих точках параллельны оси абсцисс и, следовательно, перпендикулярны к оси ординат.)

Так как $y' = 0$ в точках прямой $x = 0$, то точки прямой $x = 0$ являются стационарными критическими точками для интегральных кривых уравнения (9). Для исследования на экстремум этих критических точек находим вторую производную функции $y = y(x)$. Имеем из (9):

$$y''(x) = 2(1 - y) - 2xy'(x)$$

⇒ заменив в правой части y' его выражением из (9), находим

$$\begin{aligned} y''(x) &= 2(1 - y) - 2x \cdot 2x(1 - y) = \\ &= 2(1 - y)(1 - 2x^2) \Rightarrow y''|_{x=0} = 2(1 - y). \end{aligned}$$

Видим, что $y''(0) < 0$ для $y > 1$ и $y''(0) > 0$ для $y < 1$. Следовательно, точки оси ординат, для которых $y > 1$, являются точками максимума интегральных кривых, а точки оси ординат, для которых $y < 1$ являются точками минимума интегральных кривых уравнения (9).

Из выражения для $y''(x)$ следует, что $y''(x) = 0$ при $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Так как при переходе через точки $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ вторая производная

изменяет знак, то точки прямых $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ являются точками перегиба интегральных кривых уравнения (9).

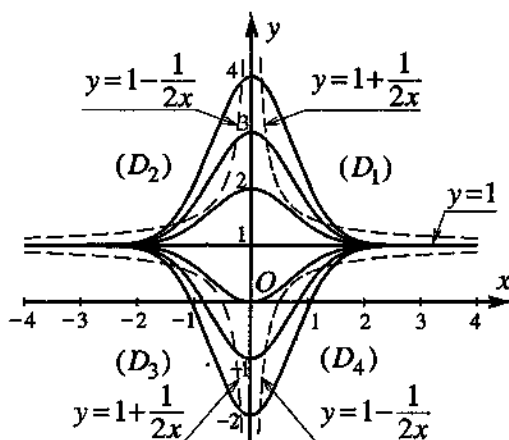


Рис. 1.4. К решению задачи о построении приближенной схемы расположения интегральных кривых

У нас правая часть уравнения (9): $f(x, y) = 0$ на линиях $x = 0$ и $y = 1$. Эти линии делят всю плоскость на четыре части:

$$(D_1) = \begin{cases} x > 0, \\ y > 1; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} x < 0, \\ y > 1; \end{cases} \quad (D_3) = \begin{cases} x < 0, \\ y < 1; \end{cases} \quad (D_4) = \begin{cases} x > 0, \\ y < 1. \end{cases}$$

В каждой из этих четырех областей производная y' имеет определенный знак (в каждой области свой знак). Чтобы установить знак y' в области (D_i) , $i = 1, 2, 3, 4$, достаточно определить знак функции $f(x, y)$ лишь в одной произвольной точке $(x_i, y_i) \in (D_i)$.

В нашем примере имеем:

- 1) $f(1, 2) < 0$. Значит, $y' < 0$ в каждой точке области (D_1) .
- 2) $f(-1, 2) > 0$. Значит, $y' > 0$ в каждой точке области (D_2) .
- 3) $f(-1, 0) < 0$. Значит, $y' < 0$ в каждой точке области (D_3) .
- 4) $f(1, 0) > 0$. Значит, $y' > 0$ в каждой точке области (D_4) .

Следовательно, пересекая прямую $x = 0$, интегральные кривые переходят из области возрастания функции $y = y(x)$ в область убывания, если $y > 1$ (т. е. при переходе из области (D_2) в область (D_1)), и из области убывания функции $y(x)$ в область возрастания, если $y < 1$ (т. е. при переходе из области (D_3) в область (D_4)).

Рассмотрим еще две изоклины: при $k = 1$, $y = 1 - \frac{1}{2x}$, и при $k = -1$, $y = 1 + \frac{1}{2x}$. Касательные, проведенные к интегральным кривым в точках их пересечения с указанными изоклинами, образуют с осью абсцисс углы $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$ соответственно.

Полученной информации достаточно для построения приближенной схемы интегральных кривых уравнения (9) (см. рис. 1.4).

Можно заметить еще, что уравнение (9) инвариантно относительно замены x на $-x$, откуда следует, что картина интегральных кривых симметрична относительно оси ординат.

5°. Задача Коши. Задача Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ состоит в следующем: среди всех решений этого уравнения найти решение вида $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, которое удовлетворяет наперед заданному условию: $y = y_0$ при $x = x_0$, где числа x_0 и y_0 такие, что точка $(x_0, y_0) \in (D)$; $x_0 \in \langle a, b \rangle$.

Геометрически задача Коши означает: среди всех интегральных кривых дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ найти ту, которая проходит через заданную точку $(x_0, y_0) \in (D)$.

Условие $y|_{x=x_0} = y_0$ называется *начальным условием*, а числа x_0 и y_0 — *начальными данными*.

6°. Понятие единственности решения задачи Коши. Пусть дано уравнение

$$y' = f(x, y) \quad (2)$$

и дано начальное условие

$$y|_{x=x_0} = y_0. \quad (2_0)$$

Предполагается, что $f(x, y) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbb{R}^2$ и что точка $(x_0, y_0) \in (D)$. Пусть $y = \tilde{\varphi}(x)$, $x \in I_{\tilde{\delta}} = (x_0 - \tilde{\delta}, x_0 + \tilde{\delta})$, и $y = \tilde{\tilde{\varphi}}(x)$, $x \in I_{\tilde{\delta}} = (x_0 - \tilde{\delta}, x_0 + \tilde{\delta})$, — любые два решения задачи (2) — (2₀). Тогда: если существует интервал $I_{\tilde{\delta}} = (x_0 - \tilde{\delta}, x_0 + \tilde{\delta})$ такой, что $\tilde{\varphi}(x) \equiv \tilde{\tilde{\varphi}}(x)$, $x \in I_{\tilde{\delta}}$, то говорят, что задача (2) — (2₀) имеет единственное решение. Точку $(x_0, y_0) \in (D)$ называют в этом случае *точкой единственности* уравнения (2).

(Подчеркнем еще раз, что соотношение $\tilde{\varphi}(x) \equiv \tilde{\tilde{\varphi}}(x)$, $x \in I_{\tilde{\delta}}$, должно выполняться для любой пары решений задачи (2) — (2₀).)

Пусть область $(D_1) \subset (D)$ и пусть каждая точка $(x, y) \in (D_1)$ является точкой единственности уравнения (2). Тогда (D_1) называют областью единственности уравнения (2).

Пример 1. Пусть имеется уравнение

$$y' = f(x), f(x) \in C((a, b)).$$

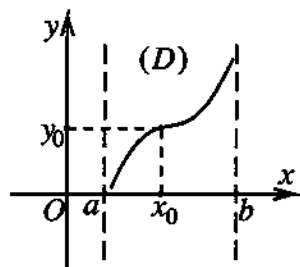


Рис. 1.5. К примеру 1

Заметим, что это уравнение задано в по-

лосе $(D) = \begin{cases} a < x < b, \\ -\infty < y < +\infty. \end{cases}$ **Формула**

$$y = \int_{x_0}^x f(t) dt + C, \quad x_0, x \in (a, b), \text{ где } C —$$

произвольная постоянная, содержит в себе множество всех решений нашего уравнения. Возьмем в полосе (D) любую

точку (x_0, y_0) . Пусть $y = \tilde{\varphi}(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + \tilde{C}$, $x \in (a, b)$, и

$y = \tilde{\tilde{\varphi}}(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + \tilde{\tilde{C}}$, $x \in (a, b)$, — любые два решения уравнения

$y' = f(x)$, проходящие через точку (x_0, y_0) . Имеем тогда:

$$\begin{aligned} y_0 &= \tilde{\varphi}(x_0) = \tilde{C} \\ y_0 &= \tilde{\tilde{\varphi}}(x_0) = \tilde{\tilde{C}} \end{aligned} \Rightarrow \tilde{C} = \tilde{\tilde{C}}.$$

Следовательно, $\tilde{\varphi}(x) \equiv \tilde{\tilde{\varphi}}(x)$, $x \in (a, b)$. А это означает, что точка (x_0, y_0) — точка единственности для нашего уравнения. Так как точка (x_0, y_0) — любая из полосы (D) , то полоса (D) — область единственности уравнения $y' = f(x)$.

Пример 2. Пусть имеется уравнение $y' = 3y^{2/3}$. Здесь $f(x, y) = 3y^{2/3}$ — определена и непрерывна на всей плоскости Oxy . Значит, $(D) = \mathbb{R}^2$. Легко проверить, что функция: $y = (x - C)^3$, $x \in (-\infty, +\infty)$, где C — произвольная постоянная, есть решение нашего уравнения. Легко видеть, что и функция $y \equiv 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, — тоже решение нашего уравнения.

Возьмем любую точку (x_0, y_0) на плоскости Oxy , не лежащую на оси Ox ($y_0 \neq 0$; пусть сначала, для определенности, $y_0 > 0$). Через точку (x_0, y_0) проходят интегральные кривые ABC , $\tilde{A}\tilde{B}BC$, $A_1B_1\tilde{\tilde{B}}BC$ и т. д. Отметим, что любые две из этих интегральных

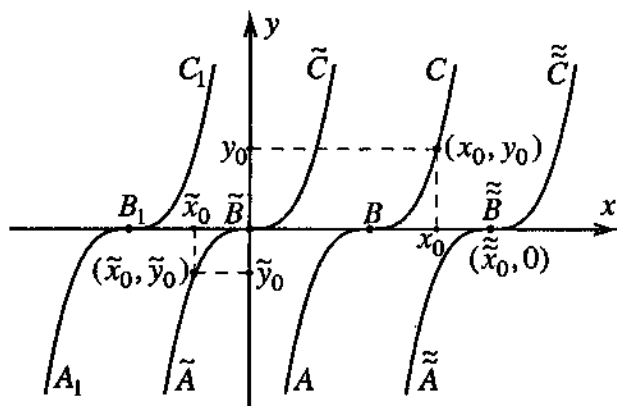


Рис. 1.6. К примеру 2

кривых совпадают на промежутке $(x_B, +\infty)$. Значит, существует промежуток (в данном случае это промежуток $(x_B, +\infty)$), содержащий точку x_0 , на котором совпадают любые два решения нашего уравнения, проходящие через точку (x_0, y_0) .

Возьмем теперь любую точку $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$, для которой $\tilde{y}_0 < 0$. Через точку $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ проходят интегральные кривые $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$, $\tilde{A}\tilde{B}B\tilde{C}$, $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{B}\tilde{C}$ и т. д. Любые две из этих интегральных кривых совпадают на промежутке $(-\infty, x_{\tilde{B}})$. Значит, существует промежуток (в данном случае это промежуток $(-\infty, x_{\tilde{B}})$), содержащий точку x_0 , на котором совпадают любые два решения нашего уравнения, проходящие через точку $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$.

Вывод: любая точка (x, y) плоскости Oxy , не лежащая на оси Ox , является точкой единственности уравнения $y' = 3y^{2/3}$.

Возьмем любую точку, лежащую на оси Ox , а именно точку $(\tilde{\tilde{x}}_0, 0)$ ($\tilde{\tilde{x}}_0$ — любое число). Через точку $(\tilde{\tilde{x}}_0, 0)$ проходят, например, две интегральные кривые $y = 0$ и $\tilde{\tilde{A}}\tilde{\tilde{B}}\tilde{\tilde{C}}$. Видим, что нельзя указать промежутка, содержащего точку $\tilde{\tilde{x}}_0$, на котором совпадали бы эти две интегральные кривые.

Вывод: точка $(\tilde{\tilde{x}}_0, 0)$ не является точкой единственности для уравнения $y' = 3y^{2/3}$. Так как $\tilde{\tilde{x}}_0$ — любое число, то любая точка линии $y = 0$ является точкой неединственности этого уравнения.

В примере 2 областями единственности уравнения являются открытая верхняя и открытая нижняя полуплоскости.

§2. Существование решения задачи Коши

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y), f(x, y) \in C(D), (D) \subset \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

и дано начальное условие

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad (x_0, y_0) \in (D). \quad (2)$$

Будем строить приближенное решение задачи (1) — (2). Пусть (D_x) есть проекция области (D) на ось Ox . Возьмем отрезок $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ — любой, но такой, чтобы было $I \subset D_x$. Обозначим $I^+ = [x_0, x_0 + h]$; $I^- = [x_0 - h, x_0]$. Разобьем отрезок I^+ на n частей ($n \geq 1$) точками $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = x_0 + h$, а отрезок I^- — на n частей ($n \geq 1$) точками

$$x_0 - h = x_{-n} < x_{-(n-1)} < \dots < x_{-1} < x_0.$$

Пусть $\lambda = \max_{\substack{i=1,2,\dots,n \\ i=0,-1,-2,\dots,-(n-1)}} \{x_i - x_{i-1}\}$. λ — ранг дробления отрезка I .

Найдем значения функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) . Получим число $f(x_0, y_0)$.

Интегральная кривая уравнения (1), проходящая через точку (x_0, y_0) , имеет касательную в точке (x_0, y_0) с угловым коэффици-

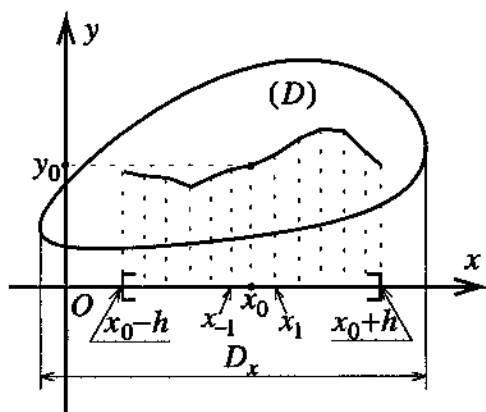


Рис. 1.7. К построению ломаных Эйлера

ентом $f(x_0, y_0)$. (Считаем, что такая интегральная кривая уравнения (1) существует.) Заменяем интегральную кривую на отрезке $[x_{-1}, x_1]$ касательной к ней в точке (x_0, y_0) , т. е. прямолинейным отрезком, заданным уравнением:

$$\psi(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0), \text{ где } x \in [x_{-1}, x_1].$$

Имеем $\psi(x_0) = y_0$; $\psi'(x) = f(x_0, y_0)$, $x \in [x_{-1}, x_1]$. Рассмотрим точку $(x_1, \psi(x_1))$, где

$$\psi(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0).$$

Если эта точка принадлежит (D) , то в ней определено направление поля, имеющее угловой коэффициент $f(x_1, \psi(x_1))$.

На отрезке $[x_1, x_2]$ заменяем интегральную кривую прямолинейным отрезком, имеющим уравнение:

$$\psi(x) = \psi(x_1) + f(x_1, \psi(x_1))(x - x_1), x \in [x_1, x_2].$$

Затем рассматриваем точку $(x_2, \psi(x_2))$, где

$$\psi(x_2) = \psi(x_1) + f(x_1, \psi(x_1))(x_2 - x_1).$$

Если точка $(x_2, \psi(x_2)) \in (D)$, то в ней определено направление поля, имеющее угловой коэффициент $f(x_2, \psi(x_2))$. На отрезке $[x_2, x_3]$ заменяем интегральную кривую прямолинейным отрезком, имеющим уравнение:

$$\psi(x) = \psi(x_2) + f(x_2, \psi(x_2))(x - x_2), x \in [x_2, x_3].$$

Продолжая этот процесс аналогичным образом, получим для $x \in [x_{n-1}, x_n]$:

$$\psi(x) = \psi(x_{n-1}) + f(x_{n-1}, \psi(x_{n-1}))(x - x_{n-1})$$

(предполагаем, что на каждом таком шаге прямолинейный отрезок, заменяющий интегральную кривую, остается в области (D)).

Рассмотрим теперь точку $(x_{-1}, \psi(x_{-1}))$, где

$$\psi(x_{-1}) = y_0 + f(x_0, y_0)(x_{-1} - x_0).$$

Если эта точка принадлежит (D) , то на отрезке $[x_{-2}, x_{-1}]$ заменяем интегральную кривую прямолинейным отрезком, имеющим уравнение:

$$\psi(x) = \psi(x_{-1}) + f(x_{-1}, \psi(x_{-1}))(x - x_{-1}), x \in [x_{-2}, x_{-1}].$$

Затем рассматриваем точку $(x_{-2}, \psi(x_{-2}))$, где

$$\psi(x_{-2}) = \psi(x_{-1}) + f(x_{-1}, \psi(x_{-1}))(x_{-2} - x_{-1}).$$

Если точка $(x_{-2}, \psi(x_{-2})) \in (D)$, то на отрезке $[x_{-3}, x_{-2}]$ заменяем интегральную кривую прямолинейным отрезком, имеющим уравнение:

$$\psi(x) = \psi(x_{-2}) + f(x_{-2}, \psi(x_{-2}))(x - x_{-2}), x \in [x_{-3}, x_{-2}].$$

Продолжая этот процесс аналогичным образом, получим для $x \in [x_{-n}, x_{-(n-1)}]$

$$\psi(x) = \psi(x_{-(n-1)}) + f(x_{-(n-1)}, \psi(x_{-(n-1)}))(x - x_{-(n-1)}).$$

И здесь предполагается, что на каждом шаге прямолинейный отрезок, заменяющий интегральную кривую, остается в области (D) . Таким образом, мы получаем ломаную, которая называется *ломаной Эйлера*. Ее можно рассматривать как приближенное изображение интегральной кривой уравнения (1), проходящей через точку (x_0, y_0) .

Свойства ломаной Эйлера

Первое свойство. Функция $y = \psi(x)$, графиком которой является ломаная Эйлера, непрерывна на том промежутке, где определена. ($\psi(x)$ — кусочно-линейная функция на промежутке $I = [x_0 - h, x_0 + h]$.)

На каждом из промежутков $(x_{-i}, x_{-(i-1)})$, (x_{i-1}, x_i) , $i = \overline{1, n}$, функция $\psi(x)$ имеет конечную производную $\psi'(x)$, причем для любого $x \in (x_{-i}, x_{-(i-1)})$: $\psi'(x) = f(x_{-(i-1)}, \psi(x_{-(i-1)}))$, а для любого $x \in (x_{i-1}, x_i)$: $\psi'(x) = f(x_{i-1}, \psi(x_{i-1}))$. В точках x_{-i} и x_i , $i = \overline{1, n-1}$, функция $\psi(x)$ имеет конечные односторонние производные; в точке x_{-n} — конечную правостороннюю, а в точке x_n — конечную левостороннюю производные:

$$\psi'_+(x_{-n}) = f(x_{-(n-1)}, \psi(x_{-(n-1)})); \quad \psi'_-(x_n) = f(x_{n-1}, \psi(x_{n-1})).$$

$\psi'(x)$ — ступенчатая функция, определенная на промежутке $I = [x_0 - h, x_0 + h]$. (Считаем $\psi'(x) = f(x_{i-1}, \psi(x_{i-1}))$ для $x \in [x_{i-1}, x_i]$ и $\psi'(x) = f(x_{-(i-1)}, \psi(x_{-(i-1)}))$ для $x \in (x_{-i}, x_{-(i-1)}]$, $i = \overline{1, n}$.)

Так как функция $\psi'(x)$ ограниченная на промежутке $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ и непрерывная там всюду, за исключением конечного числа точек, то она интегрируема на I . Мы знаем, что, если значения подынтегральной функции изменить в конечном числе точек, то от этого интегрируемость не нарушается и вели-

Значение интеграла не изменяется. Приняв это во внимание, получаем, что для любого $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ справедливо равенство

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \psi'(t) dt. \quad (3)$$

В самом деле, имеем, например, для $x \in [x_0, x_1]$:

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x_0, y_0) dt = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Для $x \in [x_1, x_2]$:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t) dt + \int_{x_1}^x \psi'(t) dt = \\ &= \underbrace{y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)}_{=\psi(x_1)} + \int_{x_1}^x f(x_1, \psi(x_1)) dt = \\ &= \psi(x_1) + f(x_1, \psi(x_1))(x - x_1) \end{aligned}$$

и т. д. Предположим, что для $x \in [x_{i-1}, x_i]$:

$$\psi(x) = \psi(x_{i-1}) + f(x_{i-1}, \psi(x_{i-1}))(x - x_{i-1}).$$

Тогда для $x \in [x_i, x_{i+1}]$ будем иметь:

$$\begin{aligned} y = \psi(x) &= y_0 + \underbrace{\int_{x_0}^{x_1} \psi'(t) dt}_{=\psi(x_1)} + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \psi'(t) dt}_{=\psi(x_2)} + \dots + \underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \psi'(t) dt + \int_{x_i}^x \psi'(t) dt}_{=\psi(x_i)} = \\ &= \psi(x_i) + f(x_i, \psi(x_i))(x - x_i). \end{aligned}$$

Переход от $i-1$ к i сделан. Следовательно, справедливость равенства (3) установлена.

Определение отрезка Пеано. Рассмотрим прямоугольник с центром в точке (x_0, y_0) :

$$(\bar{P}) = \begin{cases} x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \\ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b, \end{cases} \quad a > 0, b > 0.$$

$(\bar{P})$ — любой, но такой, что $(\bar{P}) \subset (D)$. Отметим, что $(\bar{P})$ — ограниченное замкнутое множество и что $f(x, y) \in C(\bar{P})$. Значит, существует число $M > 0$ такое, что $|f(x, y)| \leq M$, для любой точки $(x, y) \in (\bar{P})$. Введем в рассмотрение прямые: $y = y_0 \pm M(x - x_0)$. Обозначим абсциссы выхода этих прямых из $(\bar{P})$ через $x_0 - h$ и $x_0 + h$, а ординаты — через $y_0 - H$ и $y_0 + H$. Могут реализоваться случаи: а, б и в, изображенные на рис. 1.8.

Ясно, что $h \leq a$, $H \leq b$. Имеем $\frac{H}{h} = M \Rightarrow h = \frac{H}{M}$. Из рис. 1.8 видим: 1) либо $h < a$, тогда $h = \frac{H}{M} = \frac{b}{M}$ (см. случай а)); 2) либо $h = a$, тогда $h = \frac{H}{M} \leq \frac{b}{M}$ (см. случаи б) и в)). Следовательно, если брать $h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$, то отрезки прямых $(L_+): y = y_0 + M(x - x_0)$ и $(L_-): y = y_0 - M(x - x_0)$, $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ будут лежать в прямоугольнике $(\bar{P})$.

Определение. Отрезок $I = [x_0 - h, x_0 + h]$, где $h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$ называется *отрезком Пеано*.

Второе свойство. Если $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ — отрезок Пеано, то для любого n ($n \in \mathbb{N}$) и для любого разбиения отрезка I точками x_i , соответствующая ломаная Эйлера будет определена на всем отрезке I .

► Исходное звено ломаной имеет угловой коэффициент $f(x_0, y_0)$. Так как $|f(x, y)| \leq M$ всюду в $(\bar{P})$, то, в частности, $|f(x_0, y_0)| \leq M$ и, следовательно, это звено на всем отрезке $[x_0, x_1]$ будет оставаться в прямоугольнике $(\bar{P})$. Допустим, что все звенья ломаной до i -го включительно остаются в прямоугольнике $(\bar{P})$.

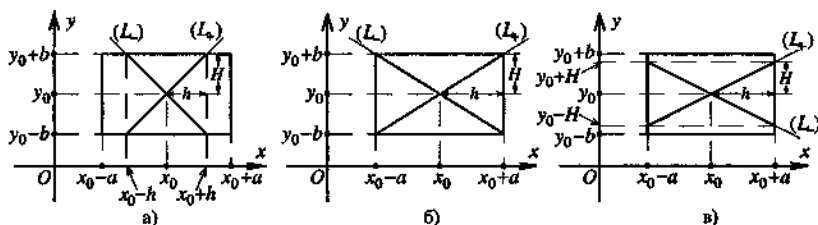


Рис. 1.8. К определению отрезка Пеано

Тогда для $(i+1)$ -го звена ломаной будем иметь: угловой коэффициент $(i+1)$ -го звена $f(x_i, \psi(x_i))$ удовлетворяет неравенству $|f(x_i, \psi(x_i))| \leq M$; для любого $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$\begin{aligned}\psi(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x \psi'(t) dt \Rightarrow |\psi(x) - y_0| = \\ &= \left| \int_{x_0}^x \psi'(t) dt \right| \leq M |x - x_0| \leq M \cdot h \leq b.\end{aligned}$$

Значит, $(i+1)$ -е звено ломаной остается в $(\bar{P})$. Переход от i к $i+1$ сделан. Следовательно, приходим к выводу, что ломаная Эйлера может быть построена на всем отрезке Пеано. ◀

Третье свойство. Любому, наперед заданному, $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что для любой ломаной Эйлера $y = \psi(x)$, $x \in I$, задачи (1) — (2) с рангом дробления $\lambda < \delta$, имеет место неравенство: $|\psi'(x) - f(x, \psi(x))| < \varepsilon$, $x \in I$.

(В таком случае будем говорить, что функция $y = \psi(x)$, $x \in I$, является ε -решением задачи (1) — (2).)

► Возьмем любое $\varepsilon > 0$. По условию, функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $(\bar{P})$. Следовательно, по теореме Кантора она равномерно непрерывна в $(\bar{P})$. А тогда взятому $\varepsilon > 0$ отвечает число $\delta_1 > 0$ такое, что для любых двух точек $(\tilde{x}, \tilde{y})$ и $(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}})$ из $(\bar{P})$, для которых $|\tilde{\tilde{x}} - \tilde{x}| < \delta_1$, $|\tilde{\tilde{y}} - \tilde{y}| < \delta_1$, будет

$$|f(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}) - f(\tilde{x}, \tilde{y})| < \varepsilon. \quad (4)$$

Возьмем число $\delta = \min \left\{ \delta_1, \frac{\delta_1}{M} \right\}$ и покажем, что это — δ искомое. В самом деле, построим на отрезке Пеано $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ ломаную Эйлера $y = \psi(x)$ с рангом дробления $\lambda < \delta$. Пусть x — произвольное, принадлежащее I (пусть, для определенности, $x \in I^+$). Если окажется, что $x = x_i$, то $\psi'(x_i) - f(x_i, \psi(x_i)) = 0$. Если $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = \overline{1, n}$), то

$$\psi'(x) = f(x_{i-1}, \psi(x_{i-1})). \quad (5)$$

Имеем, следовательно, $\psi'(x) - f(x, \psi(x)) = f(x_{i-1}, \psi(x_{i-1})) - f(x, \psi(x))$. Так как $x \in [x_{i-1}, x_i]$, то $|x - x_{i-1}| \leq \lambda < \delta \leq \delta_1$. Имеем

$$\text{далее, } \psi(x) - \psi(x_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^x \psi'(t) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\psi(x) - \psi(x_{i-1})| = \left| \int_{x_{i-1}}^x \psi'(t) dt \right| \leq M \cdot |x - x_{i-1}| \leq M\lambda < M\delta \leq \delta_1.$$

Поэтому, принимая во внимание (4), получаем:

$$|\psi'(x) - f(x, \psi(x))| = |f(x_{i-1}, \psi(x_{i-1})) - f(x, \psi(x))| < \varepsilon. \quad \blacktriangleleft$$

Определение 1. Последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in [a, b]$, называется *равномерно ограниченной* на промежутке $[a, b]$, если существует число $M > 0$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и для всех $x \in [a, b]$ оказывается: $|f_n(x)| \leq M$.

Определение 2. Последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in [a, b]$, называется *равностепенно непрерывной* на промежутке $[a, b]$, если любому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что для любых двух точек x' и x'' из $[a, b]$, для которых $|x'' - x'| < \delta$, оказывается $|f_n(x'') - f_n(x')| < \varepsilon$ при любом $n = 1, 2, 3, \dots$.

Пусть $\{\psi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in I = [x_0 - h, x_0 + h]$ — любая последовательность ломаных Эйлера, построенная на отрезке Пеано для задачи (1) — (2). Покажем, что эта последовательность равномерно ограниченная и равностепенно непрерывная на I .

$$\blacktriangleright \text{Имеем для любого } n \in \mathbb{N}: \psi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \psi'_n(t) dt, \quad x \in I.$$

У нас $\psi'_n(x)$ есть значение функции f в некоторой точке из $(\bar{P})$. Но $|f(x, y)| \leq M$ всюду в $(\bar{P})$. Поэтому $|\psi'_n(x)| \leq M$, $x \in I$, $n \in \mathbb{N}$. А тогда

$$\begin{aligned} |\psi_n(x)| &= \left| y_0 + \int_{x_0}^x \psi'_n(t) dt \right| \leq |y_0| + \left| \int_{x_0}^x \psi'_n(t) dt \right| \leq \\ &\leq |y_0| + M|x - x_0| \leq |y_0| + Mh = M_1, \quad x \in I, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Отметим, что число M_1 не зависит ни от x , ни от n . Следовательно, последовательность ломаных Эйлера $\{\psi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in I$ — равномерно ограниченная. Покажем, что она и равностепенно непрерывная на отрезке Пеано I .

Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое. Пусть x' и x'' — любые две точки из отрезка Пеано I . Рассмотрим разность $\psi_n(x'') - \psi_n(x')$. Имеем

$$\psi_n(x'') - \psi_n(x') = \int_{x_0}^{x''} \psi'_n(t) dt - \int_{x_0}^{x'} \psi'_n(t) dt = \int_{x'}^{x''} \psi'_n(t) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\psi_n(x'') - \psi_n(x')| = \left| \int_{x'}^{x''} \psi'_n(t) dt \right| \leq M \cdot |x'' - x'|.$$

Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Если брать x' и x'' на отрезке I любыми, но такими, для которых $|x'' - x'| < \delta$, то будем иметь $|\psi_n(x'') - \psi_n(x')| < M \cdot \delta \Rightarrow |\psi_n(x'') - \psi_n(x')| < \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$. Последнее означает, что последовательность $\{\psi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in I$, равномерно непрерывная на отрезке Пеано I . ◀

Замечание. В книге И.Г. Петровского "Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений" приведено доказательство теоремы Арцела — Асколи: из всякой равномерно ограниченной и равномерно непрерывной на промежутке $[a, b]$ последовательности функций $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in [a, b]$, можно выделить подпоследовательность функций $\{f_{n_k}(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$, $x \in [a, b]$, равномерно сходящуюся на промежутке $[a, b]$.

Отметим, что если $f_{n_k}(x) \in C([a, b])$ и $f_{n_k}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x)$, $x \in [a, b]$, то предельная функция $f(x) \in C([a, b])$. Кроме того, если функции $f_{n_k}(x)$, $x \in [a, b]$, такие, что $|f_{n_k}(x)| \leq M$, $x \in [a, b]$, то и $|f(x)| \leq M$, $x \in [a, b]$.

Теорема Пеано (о существовании решения). Пусть дано уравнение:

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

и дано начальное условие:

$$y|_{x=x_0} = y_0, (x_0, y_0) \in (D). \quad (2)$$

Тогда, если функция $f(x, y) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbb{R}^2$, то задача (1) — (2) имеет хотя бы одно решение $y = \varphi(x)$, которое определено на отрезке Пеано $I = [x_0 - h, x_0 + h]$.

(Непрерывности функции $f(x, y)$ в области (D) достаточно для существования хотя бы одного решения уравнения (1), удовлетворяющего условию $y|_{x=x_0} = y_0$.)

► Введем в рассмотрение последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, обладающую свойством $\varepsilon_n > 0$, для любого $n \in \mathbb{N}$, и $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ построена ломаная Эйлера $y = \psi_n(x)$, $x \in I$,

такая, что она является ε_n -решением задачи (1) — (2). Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение

$$\|\psi'_n(x) - f(x, \psi_n(x))\| < \varepsilon_n, \quad x \in I \quad (6)$$

(см. третье свойство ломаных Эйлера). Обозначим

$$\psi'_n(x) - f(x, \psi_n(x)) = \Delta_n(x), \quad x \in I. \quad (7)$$

У нас $\psi'_n(x)$ — кусочно-непрерывная на I , $f(x, \psi_n(x))$ — непрерывная на I , как суперпозиция непрерывных функций. Поэтому функция $\Delta_n(x)$ — кусочно-непрерывная на I . Кроме того, из (6) следует, что: $\Delta_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $x \in I$. Из (7) находим: $\psi'_n(x) = f(x, \psi_n(x)) + \Delta_n(x)$, $x \in I$, $n \in \mathbb{N}$. Функции $\psi'_n(x)$ — интегрируемые на любом промежутке $[x_0, x] \subset I$. Интегрируя обе части последнего соотношения по x от x_0 до x , находим

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \psi'_n(t) dt &= \int_{x_0}^x f(t, \psi_n(t)) dt + \int_{x_0}^x \Delta_n(t) dt, \quad x \in I, n \in \mathbb{N}, \Rightarrow \\ \Rightarrow \psi_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \psi_n(t)) dt + \int_{x_0}^x \Delta_n(t) dt, \quad x \in I, n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (8)$$

У нас последовательность $\{\psi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in I$, — последовательность ломаных Эйлера. Было показано, что она равномерно ограниченная и равномерно непрерывная на отрезке Пеано I . Но тогда по теореме Арцела — Асколи она имеет подпоследовательность $\{\psi_{n_k}(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$, $x \in I$, обладающую свойством: $\psi_{n_k}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi(x)$, $x \in I$; $\varphi(x) \in C(I)$. Известно, что для любого $n \in \mathbb{N}$: $|\psi_n(x) - y_0| \leq b$, $x \in I$. Следовательно, $|\psi_{n_k}(x) - y_0| \leq b$, $x \in I$, для любого $k \in \mathbb{N}$. Значит, и $|\varphi(x) - y_0| \leq b$, $x \in I$. Отметим, что

$$\psi_{n_k}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \psi_{n_k}(t)) dt + \int_{x_0}^x \Delta_{n_k}(t) dt, \quad x \in I, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Докажем, что функция $y = \varphi(x)$, $x \in I$, является решением задачи (1) — (2) на отрезке Пеано. У нас $\psi_{n_k}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi(x)$, $x \in I$.

Покажем, что тогда $f(x, \psi_{n_k}(x)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x, \varphi(x))$, $x \in I$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ — любое. По условию, функция $f(x, y) \in C(D) \Rightarrow f(x, y) \in C(\bar{P}) \Rightarrow f(x, y)$ равномерно непрерывна в $(\bar{P}) \Rightarrow$ Взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$, зависящее только от ε , такое, что как только $|x'' - x'| < \delta$ и $|y'' - y'| < \delta$, так сейчас же $|f(x'', y'') - f(x', y')| < \varepsilon$. (Точки (x', y') и $(x'', y'') \in (\bar{P})$.) Так как $\psi_{n_k}(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi(x)$, $x \in I$, то числу $\delta > 0$, найденному по ε , отвечает номер K , такой, что как только $k > K$, так сейчас же $|\psi_{n_k}(x) - \varphi(x)| < \delta$, для всех $x \in I$.

Рассмотрим разность $\underbrace{f(x, \psi_{n_k}(x))}_{(*) p_{n_k} \in (\bar{P})} - \underbrace{f(x, \varphi(x))}_{(*) p \in (\bar{P})}$. Имеем

$x_{p_{n_k}} - x_p = x - x = 0$, $|y_{p_{n_k}} - y_p| = |\psi_{n_k}(x) - \varphi(x)| < \delta$, для $x \in I$, если $k > K$. А тогда $|f(x, \psi_{n_k}(x)) - f(x, \varphi(x))| < \varepsilon$, для всех $x \in I$, если $k > K$. Последнее означает, что $f(x, \psi_{n_k}(x)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(x, \varphi(x))$, $x \in I$.

В соотношении (9) перейдем к пределу при $k \rightarrow \infty$. (Мы обосновали допустимость предельного перехода под знаком интеграла в обоих интегралах, стоящих в правой части (9).) Следовательно, будем иметь

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt + 0, \quad x \in I. \quad (10)$$

Из (10) видим, что $\varphi(x_0) = y_0$ и что $\int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$, $x \in I$ — есть

интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции. По теореме Барроу, существует производная правой части (10), равная $f(x, \varphi(x))$ для $x \in I$. Но тогда существует производная и левой части (10): $\varphi'(x)$, причем

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \quad x \in I.$$

Таким образом, получили: функция $y = \varphi(x)$, $x \in I$, — решение задачи (1) — (2) на отрезке Пеано I . ◀

Замечание. Если задача (1) — (2) имеет единственное решение, то любая последовательность ломаных Эйлера $\{\psi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in I$, для которой ранг дробления $\lambda \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, равномерно сходится на отрезке Пеано I к решению $y = \varphi(x)$, $x \in I$, задачи (1) — (2).

§3. Единственность решения задачи Коши

1°. Лемма Гронуола. Пусть

1) функция $f(x) \in C(\langle a, b \rangle)$;

2) $f(x)$ удовлетворяет на $\langle a, b \rangle$ неравенству

$$0 \leq f(x) \leq \lambda + \mu \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right|, \text{ где } \lambda \geq 0, \mu > 0 \text{ — постоянные числа.}$$

Тогда справедливо неравенство

$$0 \leq f(x) \leq \lambda e^{\mu|x-x_0|}, \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

► Доказательство проведем для $x \in [x_0, b)$ (для $x \in \langle a, x_0]$ оно — аналогичное).

1-й случай: $\lambda > 0$.

Имеем, по условию: $0 \leq f(x) \leq \lambda + \mu \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad x \in [x_0, b)$. Поло-

жим $g(x) = \lambda + \mu \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad x \in [x_0, b)$. Нетрудно понять, что

$g(x) \in C^1([x_0, b))$; $g(x_0) = \lambda > 0$. Имеем $g'(x) = \mu f(x) \geq 0$,

$x \in [x_0, b) \Rightarrow g(x)$ — неубывающая на промежутке $[x_0, b) \Rightarrow$

$g(x) \geq \lambda > 0, \quad x \in [x_0, b)$. Так как $g'(x) = \mu f(x)$, а $f(x) \leq g(x)$,

$x \in [x_0, b)$, то $g'(x) \leq \mu \cdot g(x), \quad x \in [x_0, b) \Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} \leq \mu, \quad x \in [x_0, b)$.

Проинтегрировав последнее неравенство по отрезку $[x_0, x] \subset [x_0, b)$, получаем

$$\begin{aligned} \ln \frac{g(x)}{g(x_0)} &\leq \mu(x - x_0), \quad x \in [x_0, b) \Rightarrow \frac{g(x)}{g(x_0)} \leq e^{\mu(x-x_0)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow g(x) \leq \underbrace{g(x_0)}_{=\lambda} e^{\mu(x-x_0)} = \lambda e^{\mu(x-x_0)}. \end{aligned}$$

Следовательно, и подавно $0 \leq f(x) \leq \lambda e^{\mu(x-x_0)}, \quad x \in [x_0, b)$.

2-й случай: $\lambda = 0$.

Имеем по условию в этом случае $0 \leq f(x) \leq \mu \int_{x_0}^x f(t) dt$, $x \in [x_0, b]$. Возьмем последовательность чисел $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — любую,

но такую, что $\lambda_n > 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Для любого

$n \in \mathbb{N}$ будем иметь $0 \leq f(x) < \lambda_n + \mu \int_{x_0}^x f(t) dt$, $x \in [x_0, b]$. Так как

функция $f(x)$ удовлетворяет последнему неравенству, то получаем предыдущий случай. Следовательно, будем иметь $0 \leq f(x) \leq \lambda_n e^{\mu(x-x_0)}$, $x \in [x_0, b]$, $n \in \mathbb{N}$ — любое. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$ и приняв во внимание, что $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, получим $f(x) \equiv 0$, $x \in [x_0, b]$. Видим, что и в этом случае лемма доказана. ◀

Определение. Говорят, что функция $f(x, y)$ удовлетворяет в области (D) условию Липшица по y , если существует число $L > 0$ такое, что для любых двух точек $(x, \bar{y})$ и $(x, \bar{\bar{y}})$ из (D) справедливо соотношение

$$|f(x, \bar{\bar{y}}) - f(x, \bar{y})| \leq L \cdot |\bar{\bar{y}} - \bar{y}|.$$

Пишут $f(x, y) \in \text{Lip}_y(D)$.

2°. Теорема единственности. Пусть дано уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

и дано начальное условие

$$y|_{x=x_0} = y_0. \tag{2}$$

Пусть функция $f(x, y) \in C(D)$ и точка $(x_0, y_0) \in (D)$. Если существует окрестность $U(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) такая, что $f(x, y) \in \text{Lip}_y(U(x_0, y_0))$, то задача (1) — (2) имеет единственное решение.

► Что задача (1) — (2) имеет решение — это следует из теоремы Пеано. Нужно доказать, что задача (1) — (2) имеет единственное решение. Рассуждаем от противного, а именно предполагаем, что задача (1) — (2) имеет не одно, а несколько решений. Возьмем тогда два любых решения задачи (1) — (2):

$$y = \tilde{\varphi}(x), \quad x \in I_{\tilde{h}} = [x_0 - \tilde{h}, x_0 + \tilde{h}];$$

$$y = \tilde{\tilde{\varphi}}(x), \quad x \in I_{\tilde{\tilde{h}}} = [x_0 - \tilde{\tilde{h}}, x_0 + \tilde{\tilde{h}}].$$

Так как $y = \tilde{\varphi}(x)$, $x \in I_{\tilde{h}}$, и $y = \tilde{\tilde{\varphi}}(x)$, $x \in I_{\tilde{\tilde{h}}}$, — решения задачи (1) — (2), то

$$\tilde{\varphi}'(x) \equiv f(x, \tilde{\varphi}(x)), \quad x \in I_{\tilde{h}};$$

$$\tilde{\tilde{\varphi}}'(x) \equiv f(x, \tilde{\tilde{\varphi}}(x)), \quad x \in I_{\tilde{\tilde{h}}}.$$

В левых и правых частях этих тождеств стоят функции, непрерывные соответственно в промежутках $I_{\tilde{h}}$ и $I_{\tilde{\tilde{h}}}$. Интегрируя обе части первого тождества по промежутку $[x_0, x] \subset I_{\tilde{h}}$, а обе части второго — по промежутку $[x_0, x] \subset I_{\tilde{\tilde{h}}}$, получим

$$\tilde{\varphi}(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \tilde{\varphi}(x)) dx, \quad x \in I_{\tilde{h}};$$

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \tilde{\tilde{\varphi}}(x)) dx, \quad x \in I_{\tilde{\tilde{h}}}.$$

Пусть $\tilde{I} = I_{\tilde{h}} \cap I_{\tilde{\tilde{h}}}$. Ясно, что точка $x_0 \in \tilde{I}$. Для $x \in \tilde{I}$ вычтем из второго тождества соответствующие части первого тождества. Получим

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(x) - \tilde{\varphi}(x) = \int_{x_0}^x [f(x, \tilde{\tilde{\varphi}}(x)) - f(x, \tilde{\varphi}(x))] dx, \quad x \in \tilde{I}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\tilde{\tilde{\varphi}}(x) - \tilde{\varphi}(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(x, \tilde{\tilde{\varphi}}(x)) - f(x, \tilde{\varphi}(x))| dx \right|, \quad x \in \tilde{I}.$$

По условию, существует окрестность $U(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) такая, что $f(x, y) \in \text{Lip}_y(U(x_0, y_0))$. Пусть отрезок $I \subset \tilde{I}$ ($x_0 \in I$) и такой, что для любого $x \in I$ оказывается: точки $(x, \tilde{\varphi}(x))$ и $(x, \tilde{\tilde{\varphi}}(x))$ принадлежат $U(x_0, y_0)$. Тогда для $x \in I$:

$$|\tilde{\tilde{\varphi}}(x) - \tilde{\varphi}(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x L \cdot |\tilde{\tilde{\varphi}}(x) - \tilde{\varphi}(x)| dx \right|, \quad \text{где } L — \text{постоянная Липшица}$$

функции $f(x, y)$ в области $U(x_0, y_0)$. Введем обозначение: $|\tilde{\Phi}(x) - \bar{\Phi}(x)| = f(x)$, $x \in I$. Тогда предыдущее неравенство запишется в виде

$$0 \leq f(x) \leq L \left| \int_{x_0}^x f(x) dx \right|, \quad x \in I.$$

Видим, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям леммы Гронуола при $\lambda = 0$ и $\mu = L$.

Так как $\lambda = 0$, то из леммы Гронуола следует, что $f(x) \equiv 0$, $x \in I$, а это означает, что $\tilde{\Phi}(x) \equiv \bar{\Phi}(x)$, $x \in I$.

Итак, показано, что существует промежуток I , содержащий точку x_0 , на котором совпадают любые два решения задачи (1) — (2). Последнее означает, что задача (1) — (2) имеет единственное решение. ◀

Замечание. В пункте 6° §1 было введено понятие единственности решения задачи Коши. Было определено: если задача (1) — (2) имеет единственное решение, то точка (x_0, y_0) называется точкой единственности уравнения (1); если каждая точка $(x_0, y_0) \in (D_1)$ ($(D_1) \subset (D)$) является точкой единственности уравнения (1), то (D_1) называется областью единственности этого уравнения.

Следствие теоремы единственности. Пусть дано уравнение: $y' = f(x, y)$. Пусть функция $f(x, y) \in C(D)$. Пусть $(D_1) \subset (D)$, и частная производная $f'_y(x, y) \in C(D_1)$. Тогда (D_1) является областью единственности данного уравнения.

► Возьмем любую точку (x_0, y_0) в области (D_1) и покажем, что эта точка есть точка единственности данного уравнения. Для этого достаточно показать, что существует окрестность $U(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) такая, что $f(x, y) \in \text{Lip}_y(U(x_0, y_0))$. Возьмем некоторую окрестность $V(x_0, y_0)$, такую, что $V(x_0, y_0) \subset (D_1)$. (Это сделать можно, ибо (D_1) — область.) А затем возьмем окрестность $\bar{U}(x_0, y_0)$ меньшего радиуса. Тогда замкнутый круг, т. е. круг $\bar{U}(x_0, y_0) \subset V(x_0, y_0) \subset (D_1)$. По условию $f'_y(x, y) \in C(D_1) \Rightarrow f'_y(x, y) \in C(\bar{U}(x_0, y_0)) \Rightarrow f'_y(x, y)$ — ограниченная в $\bar{U}(x_0, y_0)$. Значит, существует число $L > 0$, такое, что $|f'_y(x, y)| \leq L$ в $\bar{U}(x_0, y_0)$. Значит, $|f'_y(x, y)| \leq L$ в $U(x_0, y_0)$.

Пусть (x, y_1) и (x, y_2) — любые две точки из $U(x_0, y_0)$. Имеем по теореме Лагранжа

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) = f'_y(x, \bar{y})(y_2 - y_1), \quad \text{где } \bar{y} \in (y_1, y_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |f'_y(x, \bar{y})| \cdot |y_2 - y_1| \leq L|y_2 - y_1|.$$

Последнее означает, что $f(x, y) \in \text{Lip}_y(U(x_0, y_0))$, а значит, точка (x_0, y_0) является точкой единственности для уравнения $y' = f(x, y)$. Так как точка (x_0, y_0) — любая из (D_1) , то (D_1) является областью единственности этого уравнения.

§4. Общее, частное и особое решения уравнения $y' = f(x, y)$

Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y), \quad (1)$$

где $f(x, y) \in C(D)$; $(D) \subset \mathbb{R}^2$.

I. Пусть $(D_1) \subset (D)$ и (D_1) — область единственности для уравнения (1). Пусть функция $y = \varphi(x, C)$ определена, непрерывна и имеет непрерывную частную производную по x в области (Δ) плоскости (x, C) . Пусть $\Delta_C = \text{пр}_C(\Delta)$.

Определение. Функция $y = \varphi(x, C)$ называется *общим решением* уравнения (1) в области (D_1) , если, во-первых, для любой

точки $(x_0, y_0) \in (D_1)$ уравнение

$y_0 = \varphi(x_0, C)$ имеет одно и только одно решение $C = C_0$ (причем

$C_0 \in \Delta_C$, т. е. C_0 — допустимое

значение для C), и если, во-вторых, функция $y = \varphi(x, C_0)$, $x \in I_\delta$

$(I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta))$ оказывается решением уравнения (1) хотя бы

при достаточно малом δ . (Ясно, что это решение удовлетворяет

условию $y|_{x=x_0} = y_0$.)

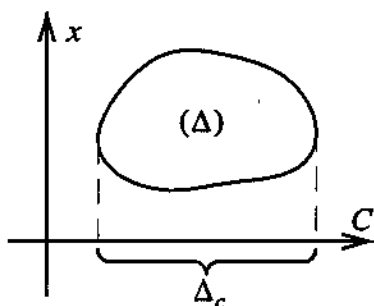


Рис. 1.9. К определению общего решения уравнения (1)

Геометрически общее решение уравнения (1) представляет собой однопараметрическое семейство интегральных кривых, определяемых уравнением $y = \varphi(x, C)$, которые покрывают всю область (D_1) .

(Так как через любую точку $(x_0, y_0) \in (D_1)$ проходит некоторая интегральная кривая из семейства $y = \varphi(x, C)$, то общее решение уравнения (1) определяет в любой точке $(x_0, y_0) \in (D_1)$ линейный элемент (касательную к интегральной кривой в точке (x_0, y_0)). Следовательно, по общему решению уравнения (1) можно построить в области (D_1) поле направлений.)

II. Определение. Функция $y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, называется *частным решением* уравнения (1), если:

- 1) эта функция является решением уравнения (1) в (a, b) ;
- 2) каждая точка интегральной кривой (т. е. каждая точка графика функции $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$) является точкой единственности для уравнения (1).

Заметим, что если $y = \varphi(x, C)$ — общее решение уравнения (1) в (D_1) , то частные решения этого уравнения в (D_1) получаются из общего при конкретных числовых значениях C (каждое частное решение при своем числовом значении C).

С геометрической точки зрения частное решение есть интегральная кривая, проходящая через заранее заданную точку $(x_0, y_0) \in (D_1)$.

В приведенном ранее примере 2, §1, частными решениями уравнения $y' = 3y^{2/3}$ будут части кубических парабол, расположенные в открытой верхней полуплоскости, и части кубических парабол, расположенные в открытой нижней полуплоскости.

III. Определение. Функция $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$, называется *особым решением* уравнения (1) в области (D) , если:

- 1) эта функция является решением уравнения (1) в (a, b) ;
- 2) каждая точка интегральной кривой (т. е. каждая точка графика функции $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$) является точкой неединственности для уравнения (1).

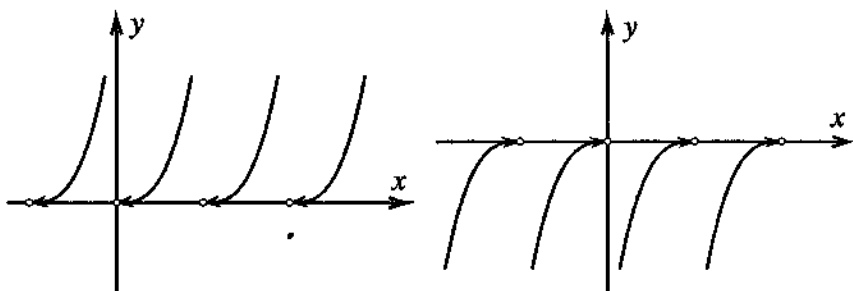


Рис. 1.10. К определению частного решения уравнения (1)

Заметим, что особое решение уравнения (1) не может быть получено из общего решения этого уравнения ни при каком конкретном (допустимом) числовом значении C .

В примере 2, §1, решение $y \equiv 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$ является особым решением уравнения $y' = 3y^{2/3}$.

§5. Дифференциальные уравнения первого порядка в симметричной форме

1°. Дифференциальным уравнением первого порядка в симметричной форме называется уравнение вида:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (1)$$

где $M(x, y) \in C(D)$ и $N(x, y) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbb{R}^2$.

Определение.

I. Решением уравнения (1) называется всякая функция вида:

$$y = \varphi(x), \quad x \in (a, b), \quad (2_1)$$

которая удовлетворяет условиям:

- 1) $\varphi(x) \in C^1(\langle a, b \rangle)$;
- 2) точка $(x, \varphi(x)) \in (D)$ при любом $x \in \langle a, b \rangle$;
- 3) $M(x, \varphi(x))dx + N(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx \equiv 0$, $x \in \langle a, b \rangle$ и для любого dx .

II. Решением уравнения (1) называется также всякая функция вида

$$x = \psi(y), \quad y \in \langle c, d \rangle, \quad (2_{II})$$

которая удовлетворяет условиям:

- 1) $\psi(y) \in C^1(\langle c, d \rangle)$;
- 2) точка $(\psi(y), y) \in (D)$ при любом $y \in \langle c, d \rangle$;
- 3) $M(\psi(y), y) \cdot \psi'(y)dy + N(\psi(y), y)dy \equiv 0$, $y \in \langle c, d \rangle$ и для любого dy .

Пусть (x, y) — произвольная точка области (D) . Пусть $\vec{F}(x, y) = (M(x, y); N(x, y))$. Будем считать этот вектор приложенным в точке (x, y) . Таким образом в области (D) будет задано непрерывное векторное поле.

Пусть точка $(x_0, y_0) \in (D)$ и такая, что $\vec{F}(x_0, y_0) \neq \vec{0}$. В этой точке вектор $\vec{F}$ имеет вполне определенное направление. Такая точка называется *обыкновенной точкой* поля вектора $\vec{F}$, а отсюда и обыкновенной точкой уравнения (1).

Если же $\vec{F}(x_0, y_0) = \vec{0}$, то точка (x_0, y_0) называется *особой точкой* поля вектора $\vec{F}$, а значит, и особой точкой уравнения (1).

Пусть (H) — совокупность всех особых точек поля вектора $\vec{F}$ в области (D) . Покажем, что (H) — замкнутое множество в (D) . Для этого рассмотрим функцию $h(x, y) = M^2(x, y) + N^2(x, y)$. Ясно, что $h(x, y) \in C(D)$ и что $h(x, y) \equiv 0$ в (H) . Пусть точка $(x_0, y_0) \in (D)$ и является предельной для множества (H) . Но тогда существует последовательность точек (x_k, y_k) , $k \in \mathbb{N}$, такая, что $(x_k, y_k) \in (H)$ для любого $k \in \mathbb{N}$; $(x_k, y_k) \neq (x_0, y_0)$ для любого $k \in \mathbb{N}$; $(x_k, y_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (x_0, y_0)$. В силу непрерывности функции $h(x, y)$, $h(x_k, y_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} h(x_0, y_0)$. У нас $h(x_k, y_k) = 0$ при любом $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $h(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow$ точка $(x_0, y_0) \in (H)$. Множество, которое содержит все свои предельные точки, является замкнутым. Значит, множество (H) — замкнутое.

Рассмотрим произвольное решение уравнения (1). Пусть это решение есть решение вида (2). Тогда, в частности, справедливо тождество

$$M(x, \varphi(x)) dx + N(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx \equiv 0, x \in \langle a, b \rangle, dx — \text{любое.} \quad (3)$$

Если ввести в рассмотрение векторы $\vec{F}(x, \varphi(x)) = (M(x, \varphi(x)); N(x, \varphi(x)))$ и $\vec{T}(x) = (dx; \varphi'(x) dx)$, то левую часть тождества (3) можно рассматривать как скалярное произведение векторов $\vec{F}(x, \varphi(x))$ и $\vec{T}(x)$.

Выясним геометрический смысл вектора $\vec{T}(x)$.

Заметим, что решение вида (2) уравнения (1) можно считать заданным параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x, \\ y = \varphi(x), \end{cases} x \in \langle a, b \rangle$ (x — параметр). Тогда вектор $(x'_x, y'_x) = (1, \varphi'(x))$ является направляющим вектором касательной к интегральной кривой (2) в точке $(x, \varphi(x))$. В этом и состоит геометрический смысл вектора $\vec{T}(x)$. Так как соотношение (3) является условием ортогональности векторов $\vec{F}(x, \varphi(x))$ и $\vec{T}(x)$, то заключаем, что интегральная кривая (2) располагается в области (D) так, что в каждой своей точке $(x, \varphi(x))$ она ортогональна вектору $\vec{F}(x, \varphi(x))$.

Пример. Пусть дано уравнение

$$x dx + y dy = 0. \quad (1_0)$$

Здесь $M(x, y) \equiv x$; $N(x, y) \equiv y$; $M(x, y), N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$. M и N обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(0, 0)$. Значит,

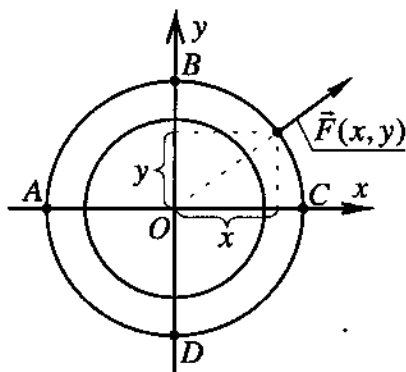


Рис. 1.11. К примеру об ортогональности вектора $\vec{F}(x, \varphi(x))$ к интегральным кривым

$H = \{(0, 0)\}; \quad (D) \setminus (H) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. В любой точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ вектор

$\vec{F}(M, N) = \vec{F}(x, y)$. Интегральными кривыми уравнения (1) являются окружности с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = r^2$ (рис. 1.11). Здесь: открытая дуга $\text{--}ABC$ — график решения уравнения вида (2_I); открытая дуга $\text{--}BCD$ — график решения уравнения вида (2_{II}); открытая дуга

$\text{--}BC$ — график решения уравнения и вида (2_I), и вида (2_{II}) (значит, эти решения взаимно обратны).

Замечание. Пусть функция $\mu(x, y) \in C(D)$ и $\mu(x, y) \neq 0$ в $(D) \setminus (H)$. Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение

$$\underbrace{\mu(x, y)M(x, y)}_{=M_1(x, y)} dx + \underbrace{\mu(x, y)N(x, y)}_{=N_1(x, y)} dy = 0. \quad (\tilde{I})$$

Очевидно, что уравнение $(\tilde{I})$ равносильно уравнению (1). Следовательно, уравнения (1) и $(\tilde{I})$ имеют одинаковые решения. Векторное поле в $(D) \setminus (H)$ для уравнения $(\tilde{I})$ задается вектором $\vec{F}_1(M_1(x, y), N_1(x, y))$. Ясно, что в любой точке области $(D) \setminus (H)$ векторы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}$ коллинеарны ($\vec{F}_1 \parallel \vec{F}$). $\Rightarrow$ вектор $\vec{F}_1$ определяет вектор $\vec{F}$ с точностью до направления.

2°. Существование решения уравнения (1). Пусть точка (x_0, y_0) — обыкновенная точка уравнения (1), т. е. точка $(x_0, y_0) \in (D) \setminus (H)$. Это означает, что $\vec{F}(x_0, y_0) \neq \vec{0}$. Следовательно, хотя бы одно из двух чисел $M(x_0, y_0)$, $N(x_0, y_0)$ отлично от нуля. Могут реализоваться следующие случаи.

I случай. $M(x_0, y_0) = 0$; $N(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда по теореме о стабильности знака существует окрестность точки (x_0, y_0) : $U(x_0, y_0) \subset (D)$ такая, что $N(x, y) \neq 0$ в $U(x_0, y_0)$. Умножим обе части уравнения (1) на множитель

$\mu(x, y) = \frac{1}{N(x, y)}$ ($\mu(x, y) \in C(U)$ и $\mu(x, y) \neq 0$ в $U(x_0, y_0)$). Получим уравнение, равносильное уравнению (1), а именно

$$\frac{M(x, y)}{N(x, y)} dx + dy = 0 \text{ или } \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} (= f(x, y), f \in C(U)). \quad (3)$$

Уравнение (3) разрешено относительно y' . Так как уравнение (3) удовлетворяет условиям теоремы Пеано, то оно имеет хотя бы одно решение $y = \varphi(x)$, $x \in I$; $x_0 \in I$ и $\varphi(x_0) = y_0$. Видим, что в рассматриваемом случае уравнение (1) имеет решение вида (2₁). Покажем, что в рассматриваемом случае уравнение (1) не имеет решения вида (2_{II}), удовлетворяющего условию $x|_{y=y_0} = x_0$.

Рассуждаем от противного, а именно допустим, что уравнение (1) имеет решение вида (2_{II}), удовлетворяющее начальному условию $x|_{y=y_0} = x_0$. Но тогда для $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ и при любом dy справедливо тождество:

$$M(\psi(y), y) \cdot \psi'(y) dy + N(\psi(y), y) dy = 0.$$

Положив здесь $y = y_0$, получим

$$\underbrace{\underbrace{M(x_0, y_0)}_{=0} \cdot \underbrace{\psi'(y_0)}_{=\text{const}}}_{=0} + \underbrace{N(x_0, y_0)}_{\text{const}, \neq 0} = 0.$$

Видим, что это равенство невозможно. Значит, наше предположение, что уравнение (1) имеет решение вида (2_{II}) неверно.

II случай. $M(x_0, y_0) \neq 0$, $N(x_0, y_0) = 0$.

По теореме о стабильности знака существует окрестность точки (x_0, y_0) : $V(x_0, y_0) \subset (D)$ такая, что $M(x, y) \neq 0$ в $V(x_0, y_0)$, а потому вместо уравнения (1) будем иметь равносильное уравнение

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)} (= g(x, y); g(x, y) \in C(V)). \quad (3)$$

Уравнение (3) разрешено относительно x' . По теореме Пеано заключаем, что через точку (x_0, y_0) проходит хотя бы одно решение уравнения (3) (а значит, уравнения (1)). Это решение будет решением вида (2_{II}): $x = \psi(y)$, $y \in \bar{I} = (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$; $\psi(y_0) = x_0$. Отметим, что решения вида (2_I) уравнение (1) в этом случае не имеет (это устанавливается рассуждениями, аналогичными тем, которые проведены при рассмотрении случая I).

III случай. $M(x_0, y_0) \neq 0$; $N(x_0, y_0) \neq 0$.

В этом случае по теореме о стабильности знака существует окрестность точки (x_0, y_0) : $W(x_0, y_0) \subset (D)$ такая, что в $W(x_0, y_0)$ одновременно $M(x, y) \neq 0$ и $N(x, y) \neq 0$. А тогда в $W(x_0, y_0)$ уравнение (1) может быть записано как в виде (3), так и в виде (3̃). И, следовательно, по теореме Пеано уравнение (1) имеет как решение вида (2_I): $y = \varphi(x)$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$; $\varphi(x_0) = y_0$, так и решения вида (2_{II}): $x = \psi(y)$, $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$; $\psi(y_0) = x_0$. Покажем, что при соответствующем подборе интервалов эти решения взаимно обратны.

Действительно, пусть $y = \varphi(x)$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, — решение уравнения (3) такое, что $\varphi(x_0) = y_0$. Будем считать δ настолько малым, что $(x, \varphi(x)) \in W(x_0, y_0)$ для $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Тогда

$$\varphi'(x) = -\frac{M(x, \varphi(x))}{N(x, \varphi(x))} \neq 0, \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow \text{функция } y = \varphi(x)$$

строго монотонна на интервале $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и, следовательно, по теореме о существовании обратной функции, имеет обратную функцию $x = \psi(y)$, $y \in I_\delta = (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, причем $\psi(y_0) = x_0$ (I_δ — образ I_δ при отображении φ). Покажем, что функция $x = \psi(y)$, $y \in I_\delta$, является решением уравнения (3̃). По теореме о связи между производными взаимнообратных функций, имеем для любого $y \in I_\delta$:

$$\psi'(y) = \frac{1}{\varphi'(x)} \Rightarrow \psi'(y) = \frac{1}{-\frac{M(x, \varphi(x))}{N(x, \varphi(x))}} = -\frac{N(\psi(y), y)}{M(\psi(y), y)}.$$

Последнее означает, что функция $x = \psi(y)$, $y \in I_\delta$, является решением уравнения (3̃), таким, что $\psi(y_0) = x_0$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Для любой точки $(x_0, y_0) \in (D) \setminus (H)$, уравнение (1) имеет хотя бы одно решение, проходящее через точку (x_0, y_0) .

3°. Единственность решения уравнения (1).

Определение. Пусть точка $(x_0, y_0) \in (D)$. Будем говорить, что уравнение (1) имеет единственное решение с начальными данными (x_0, y_0) в следующих случаях:

1) если оно имеет единственное решение вида (2_1) с этими начальными данными в том смысле, что любые два решения вида (2_1) совпадают в некоторой окрестности точки x_0 ;

2) если оно имеет единственное решение вида (2_{II}) с этими начальными данными в том смысле, что любые два решения вида (2_{II}) совпадают в некоторой окрестности точки y_0 ;

3) если оно имеет единственное решение с этими начальными как вида (2_I) , так и вида (2_{II}) .

Определение. Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой области (D) плоскости x, y . Говорят, что $f(x, y)$ удовлетворяет в (D) условию Липшица по x, y , если существует постоянная $L > 0$ такая, что для любых двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) из (D) выполняется неравенство $|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| \leq L \cdot (|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|)$.

Заметим, что если $f(x, y) \in \text{Lip}_{x,y}(D)$, то одновременно $f(x, y) \in \text{Lip}_y(D)$ и $f(x, y) \in \text{Lip}_x(D)$.

Справедливо утверждение:

Если $f(x, y) \in C^1(D)$ ((D) — область, $(D) \subset \mathbb{R}^2$), то любая точка (x_0, y_0) из области (D) имеет окрестность $U(x_0, y_0)$ такую, что $f(x, y) \in \text{Lip}_{x,y}(U(x_0, y_0))$.

► Возьмем в области (D) любую точку (x_0, y_0) . Возьмем некоторую окрестность $V(x_0, y_0)$ такую, что $V(x_0, y_0) \subset (D)$ (это сделать можно, ибо (D) — область). Затем возьмем окрестность $U(x_0, y_0)$ такую, чтобы было $\bar{U}(x_0, y_0) \subset V(x_0, y_0)$. По условию $f'_x(x, y), f'_y(x, y) \in C(D) \Rightarrow f'_x(x, y), f'_y(x, y) \in C(\bar{U}(x_0, y_0)) \Rightarrow f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ — ограниченные в $\bar{U}(x_0, y_0)$. Значит, существует число $L > 0$ такое, что $|f'_x(x, y)| \leq L$ и $|f'_y(x, y)| \leq L$ всюду в $\bar{U}(x_0, y_0)$, а следовательно, и в $U(x_0, y_0)$.

Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — любые две точки из $U(x_0, y_0)$. Имеем

$$\begin{aligned} f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) &= [f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2)] + [f(x_1, y_2) - f(x_1, y_1)] = \\ &= f'_x(\bar{x}, y_2)(x_2 - x_1) + f'_y(x_1, \bar{y})(y_2 - y_1) \end{aligned}$$

$$(\tilde{x} \in (x_1, x_2); \tilde{y} \in (y_1, y_2)).$$

А тогда

$$\begin{aligned} |f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| &\leq \underbrace{|f'_x(\tilde{x}, y_2)|}_{\leq L} \cdot |x_2 - x_1| + \underbrace{|f'_y(x_1, \tilde{y})|}_{\leq L} \cdot |y_2 - y_1| \leq \\ &\leq L(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|). \end{aligned}$$

Последнее означает, что $f(x, y) \in \text{Lip}_{x,y} U(x_0, y_0)$. ◀

Теорема единственности для уравнения (1). Пусть точка $(x_0, y_0) \in (D) \setminus (H)$, т. е. (x_0, y_0) — обыкновенная точка уравнения (1). Пусть существует окрестность $U(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) такая, что $U(x_0, y_0) \subset (D) \setminus (H)$ и $M(x, y), N(x, y) \in \text{Lip}_{x,y}(U(x_0, y_0))$. Тогда точка (x_0, y_0) — точка единственности для уравнения (1).

► По условию точка (x_0, y_0) — обыкновенная точка для уравнения (1). Значит, хотя бы одно из двух чисел $M(x_0, y_0), N(x_0, y_0)$ отлично от нуля. Пусть для определенности $N(x_0, y_0) \neq 0$. По теореме о стабильности знака заключаем, что существует окрестность $V(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) такая, что $N(x, y) \neq 0$ в $V(x_0, y_0)$. (Можно считать, что $V(x_0, y_0) \subset U(x_0, y_0)$.)

Но тогда в $V(x_0, y_0)$ уравнение (1) может быть записано в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \quad (f(x, y), f(x, y) \in C(V)). \quad (3)$$

Покажем, что существует окрестность $W(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) такая, что $f(x, y) \in \text{Lip}_y(W(x_0, y_0))$.

Пусть W — окрестность точки (x_0, y_0) такая, что $\bar{W}(x_0, y_0) \subset V(x_0, y_0)$, а значит, $\bar{W}(x_0, y_0) \subset U(x_0, y_0)$. У нас функции $M(x, y), N(x, y)$ — непрерывные в области (D) . Значит, они непрерывные в ограниченной замкнутой области $\bar{W}(x_0, y_0)$. $\Rightarrow M(x, y)$ и $N(x, y)$ — ограниченные в $\bar{W}(x_0, y_0) \Rightarrow$ Существует число $m > 0$ такое, что $|M(x, y)| \leq m$ и $|N(x, y)| \geq m$ в $\bar{W}(x_0, y_0)$. У нас $N(x, y) \neq 0$ в $V(x_0, y_0)$. Так как $\bar{W}(x_0, y_0) \subset V(x_0, y_0)$, то $N(x, y) \neq 0$ в $\bar{W}(x_0, y_0) \Rightarrow$ существует число $K > 0$ такое, что $|N(x, y)| \geq K$ в $\bar{W}(x_0, y_0)$.

По условию, $M(x, y), N(x, y) \in \text{Lip}_{x,y}(U(x_0, y_0))$. Так как $W(x_0, y_0) \subset U(x_0, y_0)$, то $M(x, y), N(x, y) \in \text{Lip}_{x,y}(W(x_0, y_0))$. Возьмем любые две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) в $W(x_0, y_0)$ и рассмотрим разность $f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$. Имеем

$$\begin{aligned}
|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| &= \left| \frac{M(x_2, y_2)}{N(x_2, y_2)} - \frac{M(x_1, y_1)}{N(x_1, y_1)} \right| = \\
&= \frac{|M(x_2, y_2)N(x_1, y_1) - M(x_1, y_1)N(x_2, y_2)|}{|N(x_1, y_1)| \cdot |N(x_2, y_2)|} \leq \\
&\leq \frac{1}{K^2} |M(x_2, y_2)N(x_1, y_1) - M(x_1, y_1)N(x_2, y_2)| = \\
&= \frac{1}{K^2} |[M(x_2, y_2)N(x_1, y_1) - M(x_1, y_1)N(x_1, y_1)] + \\
&\quad + [M(x_1, y_1)N(x_1, y_1) - M(x_1, y_1)N(x_2, y_2)]| \leq \\
&\leq \frac{m}{K^2} [|M(x_2, y_2) - M(x_1, y_1)| + |N(x_2, y_2) - N(x_1, y_1)|] \leq \\
&\leq \frac{2mL}{K^2} (|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|) \Rightarrow \\
&\Rightarrow |f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| \leq \tilde{L} \cdot (|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|),
\end{aligned}$$

где $\tilde{L} = \frac{2mL}{K^2}$ — число, большее нуля. Последнее означает, что

$f(x, y) \in \text{Lip}_{x,y}(W(x_0, y_0)) \Rightarrow f(x, y) \in \text{Lip}_y(W(x_0, y_0))$. А тогда по теореме единственности для уравнения, разрешенного относительно производной, получаем, что точка (x_0, y_0) — точка единственности для уравнения (3). Покажем, что из этого следует, что точка (x_0, y_0) — точка единственности для уравнения (1). В самом деле, у нас $N(x_0, y_0) \neq 0$. Могут иметь место следующие два случая:

1) $M(x_0, y_0) = 0$. В этом случае, как мы знаем, уравнение (1) не имеет решения вида (2_{II}) с начальными данными (x_0, y_0) , а решение вида (2_I) — единственное. Следовательно, уравнение (1) имеет единственное решение.

2) $M(x_0, y_0) \neq 0$. В этом случае уравнение (1) может быть представлено как в виде (3), так и в виде $(\bar{3})$. Значит, уравнение (1) имеет как решение вида (2_I) , так и решение вида (2_{II}) . Для уравнения (3) единственность доказана; совершенно аналогично устанавливается единственность для уравнения $(\bar{3})$. Выше было

показано, что при соответствующем подборе интервалов для решений вида (2_I) и (2_{II}) эти решения взаимно обратны. Следовательно, и в этом случае уравнение (1) имеет единственное решение с начальными данными (x_0, y_0) . ◀

Следствие. Если функции $M(x, y), N(x, y) \in C^1(D)$, то любая точка $(x_0, y_0) \in (D) \setminus (H)$ является точкой единственности для уравнения (1).

► Действительно, в этом случае любая точка (x_0, y_0) имеет окрестность $U(x_0, y_0) \subset (D)$ такую, что $M(x, y), N(x, y) \in \text{Lip}_{x,y}(U)$. Но если точка (x_0, y_0) — обыкновенная, то в ней хотя бы одно из двух чисел $M(x_0, y_0), N(x_0, y_0)$ отлично от нуля, т. е. выполнены условия теоремы единственности. ◀

§6. Общий интеграл уравнения в симметричной форме

1°. Некоторые сведения из теории неявных функций. Пусть функция $F(x, y)$ определена в области (D) плоскости x, y . Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0. \quad (*)$$

Говорят, что уравнение $(*)$ определяет y как функцию от x , если существуют интервал I оси Ox и функция $y = \varphi(x)$, такие, что:

- 1) точка $(x, \varphi(x)) \in (D)$ при любом $x \in I$;
- 2) $F(x, \varphi(x)) \equiv 0, x \in I$.

При этом функция $y = \varphi(x), x \in I$, называется *неявной функцией*, определяемой уравнением $(*)$.

Имеют место следующие теоремы:

I. 1) Пусть функция $F(x, y)$ определена, непрерывна в прямо-

угольнике $(\bar{P}) = \begin{cases} x_0 - A \leq x \leq x_0 + A, \\ y_0 - B \leq y \leq y_0 + B \end{cases} \quad (A > 0, B > 0 \text{ — некоторые}$

числа) и имеет там непрерывные частные производные $F'_x(x, y), F'_y(x, y)$;

2) пусть $F(x_0, y_0) = 0$;

3) пусть $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда существуют числа a и b ($0 < a \leq A; 0 < b \leq B$) такие, что:

а) каждому x из $[x_0 - a, x_0 + a]$ отвечает одно и только одно y из $[y_0 - b, y_0 + b]$ такое, что $F(x, y) = 0$, т. е. $y = \varphi(x)$, $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, причем $F(x, \varphi(x)) \equiv 0, x \in [x_0 - a, x_0 + a]$;

б) $\varphi(x_0) = y_0$;

γ) $\varphi(x) \in C([x_0 - a, x_0 + a])$;

δ) для любого $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ существует непрерывная про-

$$\text{изводная } \varphi'(x), \text{ причем } \varphi'(x) = - \frac{\frac{\partial F(x, \varphi(x))}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, \varphi(x))}{\partial y}}.$$

II. 1) Пусть функция $F(x, y)$ определена, непрерывна в прямоугольнике $(\bar{P})$ и имеет там непрерывные частные производные $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$;

2) пусть $F(x_0, y_0) = 0$;

3) пусть $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда существуют числа $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ ($0 < \tilde{a} \leq A$, $0 < \tilde{b} \leq B$) такие, что:

α) каждому y из $[y_0 - \tilde{b}, y_0 + \tilde{b}]$ отвечает одно и только одно x из $[x_0 - \tilde{a}, x_0 + \tilde{a}]$ такое, что $F(x, y) = 0$, т. е. $x = \psi(y)$, $y \in [y_0 - \tilde{b}, y_0 + \tilde{b}]$, причем $F(\psi(y), y) = 0$, $y \in [y_0 - \tilde{b}, y_0 + \tilde{b}]$;

β) $\psi(y_0) = x_0$;

γ) $\psi(y) \in C([y_0 - \tilde{b}, y_0 + \tilde{b}])$;

δ) для любого $y \in [y_0 - \tilde{b}, y_0 + \tilde{b}]$ существует непрерывная про-

$$\text{изводная } \psi'(y), \text{ причем } \psi'(y) = - \frac{\frac{\partial F(\psi(y), y)}{\partial y}}{\frac{\partial F(\psi(y), y)}{\partial x}}.$$

Замечание. Если уравнение (*) такое, что выполняются одновременно условия теорем I и II, то это уравнение (рассматриваемое в достаточно малой окрестности $U(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0)) определяет неявные функции:

$$y = \varphi(x), \quad x \in I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$(\varphi(x_0) = y_0; \varphi(x) \in C(I_\delta); \varphi'(x) \in C(I_\delta))$$

и

$$x = \psi(y), \quad y \in I_\delta = (y_0 - \tilde{\delta}, y_0 + \tilde{\delta})$$

$$(\psi(y_0) = x_0; \psi(y) \in C(I_\delta); \psi'(y) \in C(I_\delta)),$$

которые являются взаимно обратными.

2°. Определение общего интеграла уравнения в симметричной форме. Пусть имеется дифференциальное уравнение в симметричной форме

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (1)$$

Предполагается, что функции $M(x, y)$ и $N(x, y) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbb{R}^2$.

Определение. Пусть функция $u(x, y) \in C^1(D)$ и пусть C — произвольное постоянное число из множества допустимых значений. (Допустимыми значениями C являются значения функции $u(x, y)$ в (D) .)

I. Соотношение

$$u(x, y) = C \quad (2)$$

называется *общим интегралом* уравнения (1) в области (D) , если, во-первых, для любой точки $(x_0, y_0) \in (D) \setminus (H)$ (т. е. для любой обыкновенной точки уравнения (1)) уравнение:

$$u(x, y) = u(x_0, y_0), \quad (3)$$

рассматриваемое в достаточно малой области $U(x_0, y_0)$, определяет хотя бы одну дифференцируемую неявную функцию:

$$y = \varphi(x), \quad x \in I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad (4)$$

такую, что $\varphi(x_0) = y_0$, $u(x, \varphi(x)) \equiv u(x_0, y_0)$, $x \in I_\delta$, и если, во-вторых, функция $y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta$, хотя бы при достаточно малом δ является решением уравнения (1).

II. Соотношение (2) также называется *общим интегралом* уравнения (1) в области (D) , если, во-первых, для любой точки $(x_0, y_0) \in (D) \setminus (H)$ уравнение (3), рассматриваемое в достаточно малой области $U(x_0, y_0)$, определяет хотя бы одну дифференцируемую неявную функцию:

$$x = \psi(y), \quad y \in I_\delta = (y_0 - \delta, y_0 + \delta), \quad (5)$$

такую, что $\psi(y_0) = x_0$, $u(\psi(y), y) \equiv u(x_0, y_0)$, $y \in I_\delta$, и если, во-вторых, функция $x = \psi(y)$, $y \in I_\delta$, является решением уравнения (1) хотя бы при достаточно малом δ .

Из определения общего интеграла уравнения (1) следует, что для любой точки $(x_0, y_0) \in (D) \setminus (H)$ общий интеграл (2) определяет хотя бы одно решение уравнения (1) с начальными данными (x_0, y_0) . В частности, если $(D) \setminus (H)$ — область единственности для уравнения (1), то общий интеграл (2) содержит в себе все решения уравнения (1), графики которых лежат в $(D) \setminus (H)$.

Пусть $u(x, y) = C$ — общий интеграл уравнения (1) в области (D) . Пусть точка (x_0, y_0) — любая из области (D) . Рассмотрим решение $u(x, y) = u(x_0, y_0)$.

Справедливо утверждение.

Любая дифференцируемая неявная функция, определяемая уравнением, график которой лежит в области (D) (он может проходить и через особые точки уравнения (1)) является решением уравнения (1).

► Рассмотрим любую дифференцируемую неявную функцию $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$, определяемую уравнением $u(x, y) = u(x_0, y_0)$. Тогда, в частности, справедливо тождество

$$u(x, \varphi(x)) \equiv u(x_0, y_0), \quad x \in (a, b). \quad (6)$$

Покажем, что справедливо тождество

$$M(x, \varphi(x)) + N(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \equiv 0, \quad x \in (a, b). \quad (7)$$

Для этого возьмем произвольную точку $x_1 \in (a, b)$ и рассмотрим точку $(x_1, \varphi(x_1))$. Могут иметь место следующие два случая.

1) Точка $(x_1, \varphi(x_1))$ — обыкновенная точка уравнения (1). Для нее, в соответствии с (6), имеем $u(x_1, \varphi(x_1)) = u(x_0, y_0)$. А тогда уравнение $u(x, y) = u(x_0, y_0)$ может быть переписано в виде: $u(x, y) = u(x_1, y_1)$, где $y_1 = \varphi(x_1)$. И, следовательно, функцию $y = \varphi(x)$ можно рассматривать как дифференцируемую неявную функцию, определяемую уравнением $u(x, y) = u(x_1, y_1)$ в окрестности точки x_1 ; причем точка (x_1, y_1) — обыкновенная точка уравнения (1). Согласно определению общего интеграла, функция $y = \varphi(x)$ на некотором интервале $I_\delta = (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ является решением уравнения (1), т. е. на I_δ справедливо тождество (7). В частности, (7) верно при $x = x_1$. У нас x_1 — любое из промежутка (a, b) . Значит, (7) верно при любом x из (a, b) . А это означает, что $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$ является решением уравнения (1).

2) Точка $(x_1, \varphi(x_1))$ — особая точка уравнения (1). В этом случае $M(x_1, \varphi(x_1)) = N(x_1, \varphi(x_1)) = 0$, а значит, (7) справедливо при $x = x_1$ и в этом случае. ◀

► 3°. Критерий общего интеграла.

Теорема. Пусть функция $u(x, y) \in C^1(D)$, $(D) \subset \mathbb{R}^2$, и такая,

что $\left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right)^2 \neq 0$ в $(D) \setminus (H)$. Тогда: для того, чтобы соотношение

$$u(x, y) = C \quad (*)$$

было общим интегралом уравнения (1) в (D) , необходимо и достаточно, чтобы всюду в (D) было:

$$\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} u'_x(x, y) & u'_y(x, y) \\ M(x, y) & N(x, y) \end{vmatrix} = 0. \quad (**)$$

► *Необходимость.* Дано: соотношение $u(x, y) = C$ — общий интеграл уравнения (1) в (D) . Требуется доказать, что $\Delta(x, y) \equiv 0$ в (D) .

Возьмем произвольную точку $(x_0, y_0) \in (D)$. Могут иметь место следующие два случая.

1) Точка (x_0, y_0) — особая точка уравнения (1). Но тогда $M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0$ и, следовательно, $\Delta(x_0, y_0) = 0$.

2) Точка (x_0, y_0) — обыкновенная точка уравнения (1). Но тогда, как мы знаем, общий интеграл уравнения: $u(x, y) = C$ определяет хотя бы одно решение уравнения (1) с начальными данными (x_0, y_0) . Пусть это решение есть решение вида: $y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (эта функция является дифференцируемой неявной функцией, определяемой уравнением $u(x, y) = u(x_0, y_0)$, такой, что $\varphi(x_0) = y_0$; $u(x, \varphi(x)) \equiv u(x_0, y_0)$, $x \in I_\delta$). Имеем, следовательно,

$$u(x, \varphi(x)) \equiv u(x_0, y_0), \quad x \in I_\delta, \quad (8)$$

и

$$M(x, \varphi(x)) dx + N(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx \equiv 0, \quad x \in I_\delta \quad (9)$$

(ибо $y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta$, — решение уравнения (1)). Дифференцируя тождество (8) по x , получим

$$u'_x(x, \varphi(x)) + u'_y(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \equiv 0, \quad x \in I_\delta. \quad (10)$$

В частности, при $x = x_0$ будем иметь

$$u'_x(x_0, \varphi(x_0)) + u'_y(x_0, \varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) = 0. \quad (10_0)$$

У нас тождество (9) имеет место при любом dx . Поэтому из (9) следует:

$$M(x, \varphi(x)) + N(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \equiv 0, \quad x \in I_\delta. \quad (11)$$

Положив в (11) $x = x_0$, получаем

$$M(x_0, \varphi(x_0)) + N(x_0, \varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) = 0. \quad (11_0)$$

Таким образом, имеем следующую однородную систему двух линейных уравнений

$$\begin{cases} u'_x(x_0, \varphi(x_0)) + u'_y(x_0, \varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) = 0, \\ M(x_0, \varphi(x_0)) + N(x_0, \varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

В (12) $u'_x(x_0, \varphi(x_0))$, $u'_y(x_0, \varphi(x_0))$, $M(x_0, \varphi(x_0))$, $N(x_0, \varphi(x_0))$ — коэффициенты системы. Замечаем, что линейная однородная система (12) имеет решение, отличное от чисто нулевого, а именно: $(1, \varphi'(x_0)) \neq (0, 0)$. Но последнее возможно лишь тогда, когда

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} u'_x(x_0, \varphi(x_0)) & u'_y(x_0, \varphi(x_0)) \\ M(x_0, \varphi(x_0)) & N(x_0, \varphi(x_0)) \end{vmatrix} = 0.$$

У нас точка (x_0, y_0) — любая из (D) , следовательно, $\Delta(x, y) \equiv 0$ в (D) . Необходимость доказана.

Достаточность. Дано: $\Delta(x, y) \equiv 0$ в (D) . Требуется доказать, что соотношение $u(x, y) = C$ — общий интеграл уравнения (1) в (D) .

Покажем, что соотношение $u(x, y) = C$ удовлетворяет определению общего интеграла. Для этого берем произвольную точку $(x_0, y_0) \in (D) \setminus (H)$ и рассматриваем уравнение: $u(x, y) = u(x_0, y_0)$. Перепишем это уравнение в виде:

$$\underbrace{u(x, y) - u(x_0, y_0)}_{= F(x, y) - \text{обозначение}} = 0. \quad (13)$$

Имеем:

- 1) $F(x, y) \in C^1(D)$ (так как $u(x, y) \in C^1(D)$);
- 2) $F(x_0, y_0) = 0$.

По условию, $(u'_x(x, y))^2 + (u'_y(x, y))^2 \neq 0$ в $(D) \setminus (H)$. Так как точка $(x_0, y_0) \in (D) \setminus (H)$, то хотя бы одно из двух чисел $u'_x(x_0, y_0)$, $u'_y(x_0, y_0)$ не равно нулю. Будем считать для определенности, что $u'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Но тогда

- 3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Видим, что выполнены условия теоремы об однозначной разрешимости уравнения (13) (см. теорию неявных функций). По этой теореме уравнение (13) определяет единственную дифференцируемую неявную функцию $y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ такую, что $\varphi(x_0) = y_0$ и

$$u(x, \varphi(x)) = u(x_0, y_0), \quad x \in I_\delta \quad (14)$$

(точка $(x, \varphi(x)) \in (D) \setminus (H)$, $x \in I_\delta$).

По условию, $\Delta(x, y) \equiv 0$ в $(D) \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} u'_x(x, \varphi(x)) & u'_y(x, \varphi(x)) \\ M(x, \varphi(x)) & N(x, \varphi(x)) \end{vmatrix} \equiv 0, \quad x \in I_\delta. \quad (15)$$

Продифференцируем тождество (14) по x . Будем иметь

$$\left. \begin{aligned} u'_x(x, \varphi(x)) \cdot 1 + u'_y(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) &\equiv 0, \quad x \in I_\delta; \\ \text{Из (15)} \Rightarrow u'_x(x, \varphi(x)) N(x, \varphi(x)) + \\ + u'_y(x, \varphi(x)) \cdot [-M(x, \varphi(x))] &\equiv 0, \quad x \in I_\delta. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Рассматриваем эти два тождества как систему линейных однородных уравнений с коэффициентами: 1 , $\varphi'(x)$, $N(x, \varphi(x))$, $-M(x, \varphi(x))$. Решениями этой системы для любого $x \in I_\delta$ являются: $u'_x(x, \varphi(x))$, $u'_y(x, \varphi(x))$.

У нас, по предположению, $u'_y(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow u'_y(x, \varphi(x)) \neq 0$, $x \in I_\delta$, при достаточно малом δ .

Было отмечено выше, что точки $(x, \varphi(x)) \in (D) \setminus (H)$ при $x \in I_\delta$. Значит, точки $(x, \varphi(x))$ — обыкновенные для уравнения (1) при $x \in I_\delta$. Следовательно, система (16) имеет решения, отличные от чисто нулевого. Но это возможно лишь тогда, когда определитель системы равен нулю, т. е. когда

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi'(x) \\ N(x, \varphi(x)) & -M(x, \varphi(x)) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{для } x \in I_\delta. \quad (17)$$

Из (17) следует, что $M(x, \varphi(x)) + N(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0$, $x \in I_\delta$. Последнее означает, что функция $y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta$, является решением уравнения (1). ◀

Определение. Пусть функция $u(x, y) \in C^1(D)$, $(D) \subset R^2$, такая, что $u(x, y) = C$ — общий интеграл уравнения (1) в области (D) . Тогда функцию $u(x, y)$ называют *интегралом* уравнения (1) в (D) .

Справедливо утверждение:

Пусть функция $u(x, y)$ — интеграл уравнения (1) в (D) . Пусть $(D) \setminus (H)$ — область единственности для уравнения (1). Тогда на любом решении уравнения (1): $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, график которого лежит в $(D) \setminus (H)$, $u(x, \varphi(x)) \equiv \text{const}$, $x \in \langle a, b \rangle$.

► Пусть $y = \tilde{\phi}(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, — произвольное решение уравнения (1), график которого лежит в $(D) \setminus (H)$. У нас $u(x, y) \in C^1(D)$, $\tilde{\phi}(x) \in C^1(\langle a, b \rangle) \Rightarrow u(x, \tilde{\phi}(x)) \in C^1(\langle a, b \rangle)$. Мы покажем, что $u(x, \tilde{\phi}(x)) \equiv \text{const}$, $x \in \langle a, b \rangle$, если установим, что

$$\frac{d}{dx} u(x, \tilde{\phi}(x)) \equiv 0, \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

Для этого берем произвольную точку $x_0 \in \langle a, b \rangle$ и находим $\tilde{\phi}(x_0) = y_0$. Ясно, что точка $(x_0, y_0) \in (D) \setminus (H)$. Рассмотрим теперь уравнение

$$u(x, y) = u(x_0, y_0).$$

По определению общего интеграла, это уравнение определяет хотя бы одну дифференцируемую неявную функцию $y = \phi(x)$, $x \in I_\delta$, такую, что $\phi(x_0) = y_0$, и которая при достаточно малом δ является решением уравнения (1). Ясно, что для $x \in I_\delta$ будет

$$u(x, \phi(x)) \equiv u(x_0, y_0). \quad (18)$$

Имеем:

1) $y = \tilde{\phi}(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, — решение уравнения (1), такое, что $\tilde{\phi}(x_0) = y_0$;

2) $y = \phi(x)$, $x \in I_\delta$, — решение уравнения (1), такое, что $\phi(x_0) = y_0$.

Видим, что оба эти решения удовлетворяют одному и тому же начальному условию $y|_{x=x_0} = y_0$, $(x_0, y_0) \in (D) \setminus (H)$. Так как $(D) \setminus (H)$ — область единственности уравнения (1), то $\tilde{\phi}(x) \equiv \phi(x)$, $x \in I_\delta$, по крайней мере, при достаточно малом δ . А тогда, в силу (18), $u(x, \tilde{\phi}(x)) \equiv u(x_0, y_0)$, $x \in I_\delta \Rightarrow \frac{d}{dx} u(x, \tilde{\phi}(x)) \equiv 0$, $x \in I_\delta \Rightarrow$ в

частности, $\frac{d}{dx} u(x, \tilde{\phi}(x)) \Big|_{x=x_0} = 0$. У нас точка x_0 — любая из $\langle a, b \rangle$

($\langle a, b \rangle$ — промежуток, на котором определено решение $y = \tilde{\phi}(x)$ уравнения (1)). Поэтому получаем

$$\frac{d}{dx} u(x, \tilde{\phi}(x)) \equiv 0, \quad x \in \langle a, b \rangle. \quad \blacktriangleleft$$

§7. Уравнения в полных дифференциалах

Пусть имеется уравнение:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (1)$$

$M(x, y), N(x, y) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbb{R}^2$.

Определение. Уравнение (1) называется *уравнением в полных дифференциалах* в области (D) , если существует функция $u(x, y) \in C^1(D)$ такая, что

$$du(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy, \quad (x, y) \in (D).$$

Функцию $u(x, y)$ называют в этом случае *первообразной* по отношению к левой части уравнения (1) в (D) .

Рассмотрим уравнение: $x dx + y dy = 0$. Здесь $M(x, y) = x$; $N(x, y) = y$; $M(x, y), N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$. Рассмотрим функцию

$u(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$; $u(x, y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Имеем $du(x, y) = x dx + y dy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Следовательно, данное уравнение — уравнение в пол-

ных дифференциалах в $\mathbb{R}^2$; $u(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ — первообразная для $x dx + y dy$ в $\mathbb{R}^2$.

Заметим, что если функция $u(x, y)$ является первообразной для левой части уравнения (1), то любая первообразная для левой части уравнения (1) содержится во множестве $\{u(x, y) + \tilde{C}\}$, где $\tilde{C}$ — произвольная постоянная.

► В самом деле, пусть функция $u(x, y)$ — первообразная для левой части уравнения (1) в (D) , а $\tilde{u}(x, y)$ — любая другая первообразная для левой части уравнения (1) в области (D) . Тогда мы должны иметь $du(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ и $d\tilde{u}(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$. Следовательно, $d(\tilde{u}(x, y) - u(x, y)) = 0$ в (D) . Но если дифференциал некоторой функции равен тождественно нулю, то частные производные этой функции по обеим независимым переменным равны нулю, и, следовательно, сама функция есть постоянная величина, т. е. $\tilde{u}(x, y) - u(x, y) = \tilde{C}$ в (D) $\Rightarrow \tilde{u}(x, y) = u(x, y) + \tilde{C}$ в (D) . ◀

Свойства уравнения в полных дифференциалах

Первое свойство. Пусть (1) — уравнение в полных дифференциалах в области (D) . Пусть функция $u(x, y)$ — первообразная его

левой части в (D). Тогда: соотношение $u(x, y) = C$ является общим интегралом уравнения (1) в области (D).

► Проверим, что соотношение $u(x, y) = C$ удовлетворяет критерию общего интеграла уравнения (1) в (D).

1. У нас по условию:

$$du(x, y) \equiv M(x, y)dx + N(x, y)dy, \quad (x, y) \in (D) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \equiv M(x, y)dx + N(x, y)dy, \quad (x, y) \in (D),$$

при любых dx и dy . Положим $(dx, dy) = (1, 0)$; получим

$u'_x(x, y) = M(x, y)$. Положим $(dx, dy) = (0, 1)$; получим

$u'_y(x, y) = N(x, y)$. Так как в (1) $M(x, y), N(x, y) \in C(D)$, то заключаем, что $u'_x(x, y), u'_y(x, y) \in C(D) \Rightarrow u(x, y) \in C^1(D)$. Имеем далее

$(u'_x(x, y))^2 + (u'_y(x, y))^2 = M^2(x, y) + N^2(x, y) \neq 0$ в $(D) \setminus (H)$ (по определению множества $(D) \setminus (H)$). Имеем, наконец,

$$2. \Delta(x, y) = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ M & N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M(x, y) & N(x, y) \\ M(x, y) & N(x, y) \end{vmatrix} \equiv 0 \text{ в } (D).$$

Видим, что выполнены все условия теоремы (см. критерий общего интеграла). Значит, соотношение $u(x, y) = C$ является общим интегралом уравнения (1) в области (D). ◀

Второе свойство. $(D) \setminus (H)$ — область единственности уравнения (1) (из того, что (1) — уравнение в полных дифференциалах в (D), следует, что $(D) \setminus (H)$ — область единственности этого уравнения).

► Возьмем любую точку $(x_0, y_0) \in (D) \setminus (H)$. Покажем, что любое решение уравнения (1) с начальными данными (x_0, y_0) представляет собой в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) неявную функцию, определяемую уравнением:

$$u(x, y) = u(x_0, y_0). \quad (2)$$

В самом деле, пусть функция

$$y = \varphi(x), \quad x \in I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad (3)$$

есть решение уравнения (1) с начальными данными (x_0, y_0) , т. е. $\varphi(x_0) = y_0$. Тогда, в частности, справедливо тождество:

$$M(x, \varphi(x))dx + N(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx \equiv 0, \quad x \in I_\delta,$$

а значит, справедливо тождество:

$$du(x, \varphi(x)) \equiv 0, \quad x \in I_\delta.$$

Последнее означает, что

$$u(x, \varphi(x)) \equiv C(\text{const}), \quad x \in I_\delta. \quad (4)$$

Положим в (4) $x = x_0$. Получим $C = u(x_0, y_0)$. А тогда тождество (4) означает, что функция (3): $y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta$, есть неявная функция, определяемая уравнением (2): $u(x, y) = u(x_0, y_0)$, рассматриваемым в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) .

Покажем теперь, что уравнение (2), рассматриваемое в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) , определяет единственную (с точностью до взаимнообратной) неявную функцию. Для этого перепишем уравнение (2) в виде:

$$\underbrace{u(x, y) - u(x_0, y_0)}_{= F(x, y) - \text{обозначение}} = 0.$$

Имеем: 1) $F(x, y) \in C^1(D)$; 2) $F(x_0, y_0) = 0$; 3) $F'_y(x, y) = u'_y(x, y) = N(x, y)$; $F'_x(x, y) = u'_x(x, y) = M(x, y)$. Следовательно,

$$[F'_x(x_0, y_0)]^2 + [F'_y(x_0, y_0)]^2 = [M(x_0, y_0)]^2 + [N(x_0, y_0)]^2 \neq 0.$$

Видим, что выполнены все условия теоремы об однозначной разрешимости уравнения $F(x, y) = 0$. Из этого следует, что уравнение (2) определяет единственную непрерывно дифференцируемую неявную функцию. ◀

Определение. Область $(D) \subset \mathbb{R}^2$ называется *односвязной*, если любой замкнутый самонепересекающийся контур (γ) , целиком лежащий в (D) , гомотопен точке, причем гомотопия не выводит контур (γ) из области (D) .

Теорема. Пусть функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой односвязной области $(D) \subset \mathbb{R}^2$ и имеют

там непрерывные частные производные $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$. Для того

чтобы уравнение (1) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы всюду в (D) было:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \quad (5)$$

► *Необходимость.* Дано: (1) — уравнение в полных дифференциалах. Требуется доказать, что $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, $(x, y) \in (D)$.

По условию, (1) — уравнение в полных дифференциалах. Но тогда существует функция $u(x, y) \in C^1(D)$ такая, что

$$\begin{aligned} du(x, y) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dy = \\ &= M(x, y)dx + N(x, y)dy, \quad (x, y) \in (D). \end{aligned} \quad (6)$$

Подчеркнем, что (6) должно иметь место при любых значениях dx и dy . Положив в (6) $dx = 0$, а $dy \neq 0$, получаем

$$N(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (7)$$

Положив в (6) $dy = 0$, а $dx \neq 0$, получаем

$$M(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (8)$$

Дифференцируя обе части (7) по x , а обе части (8) по y , находим:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \in C(D); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \in C(D),$$

ибо, по условию, $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x} \in C(D)$. Но тогда, как известно, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ в (D) , а значит, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, $(x, y) \in (D)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Дано: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, $(x, y) \in (D)$. Требуется доказать, что (1) — уравнение в полных дифференциалах.

I. Обсудим сначала случай, когда область (D) — прямоуголь-

ник: $(D) = \left\{ \begin{array}{l} a < x < b, \\ c < y < d. \end{array} \right.$ Рассмотрим функцию $u(x, y)$, определяемую равенством:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y)dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y)dy, \quad (9)$$

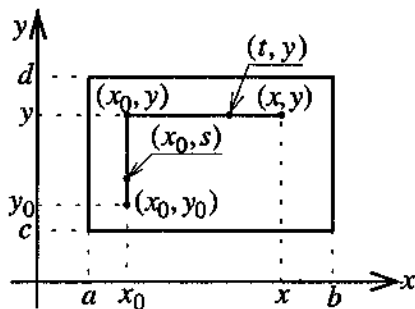


Рис. 1.12. К доказательству теоремы в случае прямоугольной области

где точка (x_0, y_0) — произвольно выбранная в (D) . Покажем, что функция $u(x, y)$ определена в (D) и имеет там непрерывные частные производные $u'_x(x, y)$, $u'_y(x, y)$. Для этого возьмем произвольную точку (x, y) и закрепим ее. Тогда $M(t, y)$, как функция от t при закреплённом y , будет определена и непрерывна на промежутке $[x_0, x]$, а функ-

ция $N(x_0, s)$, как функция от s , будет определена и непрерывна на

промежутке $[y_0, y]$. Следовательно, функция $u(x, y) = \int_{x_0}^x M(t, y) dt + \int_{y_0}^y N(x_0, s) ds$ определена в точке (x, y) . У нас точка (x, y) —

любая из (D) . Значит, $u(x, y)$ определена в области (D) . Покажем теперь, что $u(x, y)$ имеет в (D) непрерывные частные производные $u'_x(x, y)$, $u'_y(x, y)$. Рассмотрим функцию $J = \int_{x_0}^x M(t, y) dt$. При лю-

бом закреплённом y из (c, d) $M(t, y)$ — функция, непрерывная на (a, b) . Следовательно, $J = \int_{x_0}^x M(t, y) dt$ — интеграл с переменным

верхним пределом от непрерывной функции. А тогда по теореме Барроу существует J'_x для любого x из (a, b) , причем $J'_x = M(x, y)$. Последнее означает, что всюду в (D) существует $u'_x(x, y)$, причем $u'_x(x, y) = M(x, y)$. Так как $M(x, y) \in C(D)$ (по условию), то $u'_x(x, y) \in C(D)$.

Возьмем теперь любое x из (a, b) . Тогда для любого y из (c, d) функция $M(t, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике: $[x_0, x] \times [y - \delta, y + \delta]$, где $\delta > 0$ — достаточно малое число, и имеет в этом прямоугольнике непрерывную частную производную

$\frac{\partial M(t, y)}{\partial y}$. Видим, что в прямоугольнике $[x_0, x] \times [y - \delta, y + \delta]$ вы-

плены условия теоремы о дифференцировании по параметру

д знаком интеграла $J = \int_{x_0}^x M(t, y) dt$ (y — параметр). По этой

теореме J'_y существует, причем $J'_y = \int_{x_0}^x \frac{\partial M(t, y)}{\partial y} dt$. У нас по усло-

вию $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$ в (D) , а значит, и в прямоугольнике

$[x_0, x] \times [y - \delta, y + \delta]$. Следовательно, будем иметь

$$J'_y = \int_{x_0}^x \frac{\partial N(t, y)}{\partial t} dt = N(t, y) \Big|_{t=x_0}^{t=x} = N(x, y) - N(x_0, y).$$

Так как $\left(\int_{y_0}^y N(x_0, s) ds \right)' = N(x_0, y)$ для любого y из (c, d) , то при-

ходим к выводу, что $u'_y(x, y)$ существует для любой точки $(x, y) \in (D)$, причем $u'_y(x, y) = N(x, y)$, $(x, y) \in (D)$. Так как $N(x, y) \in C(D)$ (по условию), то $u'_y(x, y) \in C(D)$. Итак, получили, что функция $u(x, y)$, определяемая равенством (9), определена в

(D) ; $u(x, y) \in C^1(D)$ и что $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$. Значит,

$$\begin{aligned} & M(x, y)dx + N(x, y)dy = \\ & \equiv \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dy = du(x, y), (x, y) \in (D), \end{aligned}$$

т. е. $du(x, y)$ — дифференциал левой части уравнения (1). Следовательно, (1) — уравнение в полных дифференциалах. Функция $u(x, y)$, определяемая формулой (9), — первообразная для левой части уравнения (1).

Замечание. При доказательстве достаточности указан способ построения функции $u(x, y)$ по ее полному дифференциалу (см. формулу (9)). Совершенно аналогично для функции $u(x, y)$ может быть получена другая формула, а именно:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy. \quad (10)$$

При практическом интегрировании дифференциального уравнения в полных дифференциалах следует пользоваться как свободой выбора формулы для $u(x, y)$, так и свободой выбора точки (x_0, y_0) в (D) . Удачный выбор точки $(x_0, y_0) \in (D)$ и формулы для $u(x, y)$ нередко упрощает вычисление интегралов.

II. Рассмотрим теперь случай, когда (D) — произвольная односвязная область.

Пусть (x_0, y_0) и (x, y) — две произвольно выбранные точки в (D) . Пусть кривая $\cup AB$ — кусочно-гладкая, соединяющая точки A и B и лежащая целиком в области (D) . Введем в рассмотрение криволинейный интеграл второго рода:

$$\int_{\cup AB} M(x, y)dx + N(x, y)dy. \quad (11)$$

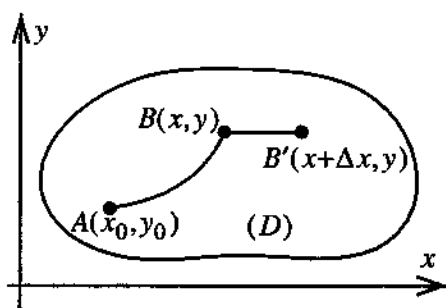


Рис. 1.13. К доказательству теоремы в случае произвольной области

Условие $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$ в (D)

(при прочих условиях теоремы) является необходимым и достаточным для того, чтобы интеграл (11) не зависел от формы пути интегрирования $\cup AB$, а зависел лишь от координат точек A и B . Если это условие выполнено, и мы закрепим точку $A(x_0, y_0)$, а точку $B(x, y)$ будем считать переменной, то интеграл (11)

будет функцией от переменных x и y , т. е. функцией точки B в области (D) :

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M(x, y)dx + N(x, y)dy = u(x, y). \quad (12)$$

Исследуем свойства этой функции.

Закрепим y и дадим x приращение Δx — любое, но такое, что $\Delta x \neq 0$ и прямолинейный отрезок, соединяющий точки (x, y) и $(x + \Delta x, y)$, лежит в (D) . Мы получим

$$u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x + \Delta x, y)} Mdx + Ndy - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Mdx + Ndy.$$

Ввиду независимости криволинейного интеграла от формы пути интегрирования мы можем считать, что путь интегрирования в первом интеграле состоит из кривой $\sphericalangle AB$, соединяющей точки A и B (той же самой, что и для второго интеграла), и отрезка прямой BB' , параллельного оси Ox . Тогда интеграл по $\sphericalangle AB$ сократится, и останется:

$$u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} M dx + N dy = \int_x^{x + \Delta x} M(x, y) dx,$$

ибо на прямой BB' y не меняется, и $dy = 0$. Применяя теорему о среднем, находим:

$$u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = M(x + \theta \Delta x, y) \Delta x \quad (0 < \theta < 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} = M(x + \theta \Delta x, y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} M(x + \theta \Delta x, y) = M(x, y).$$

Итак, получили $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$. Так как $M(x, y) \in C(D)$ и точка

(x, y) — любая из (D) , то заключаем, что $u'_x(x, y) \in C(D)$. Точно так

же мы можем убедиться в том, что $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$ и что

$u'_y(x, y) \in C(D)$. Следовательно, $u(x, y) \in C^1(D)$ и

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dy = du(x, y).$$

Таким образом, оказывается, что при выполнении условия

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ в (D) левая часть уравнения (1): $M(x, y) dx + N(x, y) dy$

является полным дифференциалом функции $u(x, y)$, определяемой по формуле (11). ◀

Замечание. Самое общее выражение функции $u_1(x, y)$, от которой полный дифференциал равен $M(x, y)dx + N(x, y)dy$, дается формулой

$$u_1(x, y) = u(x, y) + C, \quad (13)$$

где C — произвольная постоянная. В самом деле, мы должны иметь

$$du(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy;$$

$$du_1(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

откуда $d(u_1(x, y) - u(x, y)) = 0$ в (D) . Но если дифференциал некоторой функции равен тождественно нулю, то частные производные этой функции по обоим независимым переменным равны нулю, и, следовательно, сама функция есть постоянная, т. е. $u_1(x, y) - u(x, y) = C$.

Итак, необходимое и достаточное условие для того, чтобы выражение $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ было полным дифференциалом некоторой функции $u_1(x, y)$ в односвязной области (D) , заключается в том, чтобы в (D) имело место тождество

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x},$$

при выполнении которого функция $u_1(x, y)$ определяется по формуле

$$u_1(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M(x, y)dx + N(x, y)dy. \quad (14)$$

(Предполагается, что функции $M(x, y)$, $N(x, y)$ непрерывны в (D)

и имеют там непрерывные частные производные $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$.)

Пример 1. Уравнение с разделенными переменными.

Так называются уравнения вида:

$$f(x)dx + g(y)dy = 0. \quad (15)$$

(В (15) коэффициент при dx зависит только от x , а коэффициент при dy зависит только от y .) Предполагается, что $f(x) \in C((a, b))$; $g(y) \in C((c, d)) \Rightarrow f(x), g(y) \in C(D)$, где $(D) = (a, b) \times (c, d)$.

► Имеем $M(x, y) = f(x)$; $N(x, y) = g(y) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$ в $(D) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ в (D) . Ясно, что (15) является уравнением в

полных дифференциалах в (D) . Общим интегралом уравнения (15) в (D) будет $\int_{x_0}^x f(x) dx + \int_{y_0}^y g(y) dy = C$, (x_0, y_0) — любая точка из (D) . ◀

Пример 2. Решить уравнение $\frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x) dy = 0$.

► В этом примере $(D) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < +\infty; \end{cases} \quad M(x, y) = \frac{y}{x};$

$N(x, y) = y^3 + \ln x$. $M(x, y)$ и $N(x, y)$ обращаются в нуль одновременно лишь в точке $(1, 0)$. Имеем $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x}$; $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{x} \Rightarrow$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ в (D) . $(M, N, \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}) \in C(D)$. Значит, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах в (D) . $(D) \setminus \{(1, 0)\}$ — область единственности уравнения.

Возьмем $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. По формуле (9) находим

$$u(x, y) = \int_1^x \frac{y}{x} dx + \int_1^y y^3 dy = y \ln x \Big|_{x=1}^{x=x} + \frac{y^4}{4} \Big|_{y=1}^{y=y} = y \ln x + \frac{y^4}{4} - \frac{1}{4}.$$

Это — первообразная для левой части заданного уравнения в области (D) . А тогда $u(x, y) + \tilde{C}$ (в частности, $u(x, y) + \frac{1}{4} = y \ln x + \frac{y^4}{4}$) — тоже первообразная для левой части

исходного уравнения в (D) и, следовательно, $y \ln x + \frac{y^4}{4} = C$ — общий интеграл данного уравнения в (D) . ◀

Пример 3. Решить уравнение $3x^2(1 + \ln y) dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right) dy$.

► Перепишем заданное уравнение в виде

$$3x^2(1 + \ln y) dx + \left(\frac{x^3}{y} - 2y\right) dy = 0.$$

В этом примере $(D) = \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad M(x, y) = 3x^2(1 + \ln y);$

$N(x, y) = \frac{x^3}{y} - 2y$; $M(x, y)$ и $N(x, y)$ обращаются одновременно в

нуль лишь в точке $\left(\sqrt[3]{\frac{2}{e^2}}, \frac{1}{e}\right)$. Имеем $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{3x^2}{y}$; $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{3x^2}{y} \Rightarrow$

$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$ в (D) ; $M(x, y)$, $N(x, y)$, $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x} \in C(D)$. Значит, заданное уравнение является уравнением в полных дифференциалах

в (D) . $(D) \setminus \left\{ \left(\sqrt[3]{\frac{2}{e^2}}, \frac{1}{e}\right) \right\}$ — область единственности уравнения.

Возьмем $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Точка $(x_0, y_0) = (0, 1) \in (D)$. По формуле (10) находим

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x 3x^2 dx + \int_1^y \left(\frac{x^3}{y} - 2y \right) dy = x^3 \Big|_{x=0}^{x=x} + (x^3 \ln y - y^2) \Big|_{y=1}^{y=y} = \\ &= x^3 + x^3 \ln y - y^2 + 1. \end{aligned}$$

Это — первообразная для левой части заданного уравнения. А тогда $u(x, y) + C$, в частности, $u(x, y) - 1 = x^3 + x^3 \ln y - y^2$, — тоже первообразная для левой части заданного уравнения в (D) и, следовательно, $x^3 + x^3 \ln y - y^2 = C$ — общий интеграл уравнения. ◀

Пример 4. Решить уравнение $\left(\frac{x}{\sin y} + 2 \right) dx + \frac{(x^2 + 1) \cos y}{\cos 2y - 1} dy = 0$.

► Запишем исходное уравнение в виде

$$\left(\frac{x}{\sin y} + 2 \right) dx + \frac{(x^2 + 1) \cos y}{-2 \sin^2 y} dy = 0.$$

Это уравнение определено в областях $(D_k) = \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ k\pi < y < (k+1)\pi, \end{cases}$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $M(x, y) = \frac{x^2}{\sin y} + 2x$; $N(x, y) = -\frac{(x^2 + 1) \cos y}{2 \sin^2 y}$.

$M(x, y)$ и $N(x, y)$ обращаются одновременно в нуль в точках $\left((-1)^{k+1} \cdot 2, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (это — особые точки уравнения). В каждой из областей (D_k) имеем:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{x \cos y}{\sin^2 y},$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{x \cos y}{\sin^2 y} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

в (D_k) , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

$$M(x, y), \quad N(x, y), \quad \frac{\partial M}{\partial y},$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} \in C(D_k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

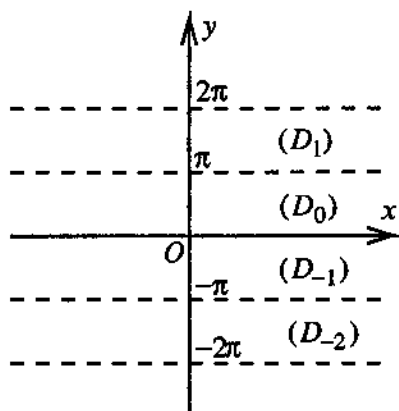


Рис. 1.14. К примеру 3

Значит, заданное уравнение является уравнением в полных дифференциалах в каждой горизонтальной полосе (D_k) , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

В (D_k) возьмем точку $(x_0^{(k)}, y_0^{(k)}) = \left(0, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. По формуле (9) находим

$$u(x, y) = \int_0^x \left(\frac{x}{\sin y} + 2 \right) dx - \int_{(2k+1)\frac{\pi}{2}}^y \frac{\cos y}{2 \sin^2 y} dy =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2 \sin y} + 2x \right) \Big|_{x=0}^{x=x} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sin y} \Big|_{y=(2k+1)\frac{\pi}{2}}^{y=y} =$$

$$= \frac{x^2}{2 \sin y} + 2x + \frac{1}{2 \sin y} + \frac{(-1)^{k+1}}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{x^2+1}{2 \sin y} + 2x = C$ — общий интеграл заданного уравнения в каждой из полос

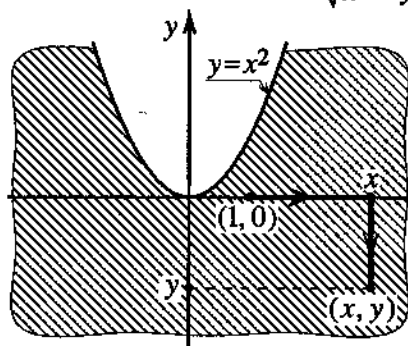
$$(D_k) = \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ k\pi < y < (k+1)\pi, \end{cases} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \blacktriangleleft$$

Пример 5. Решить уравнение $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$.

► Данное уравнение определено в области $(D) = \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ y < x^2. \end{cases}$

Имеем $M(x, y) = 2x(1 + \sqrt{x^2 - y})$, $N(x, y) = -\sqrt{x^2 - y}$. $M(x, y)$ и $N(x, y)$ обращаются одновременно в нуль в точке $(0, 0) \in (D)$.

Всюду в (D) : $\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - y}}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - y}} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$;



$M(x, y)$, $N(x, y)$, $\frac{\partial M}{\partial y}$,

$\frac{\partial N}{\partial x} \in C(D)$. Значит, данное

уравнение является уравнением в полных дифференциалах. В (D) возьмем точку $(x_0, y_0) = (1, 0)$ и любую другую точку (x, y) ($x > 0$). Будем иметь

Рис. 1.15. К примеру 4

$$u(x, y) = \int_{(1,0)}^{(x,y)} 2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy =$$

$$= \int_1^x 2x(1 + x)dx - \int_{y=0}^{y=y} \sqrt{x^2 - y}dy = \left(x^2 + \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_{x=1}^{x=x} + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} \Big|_{y=0}^{y=y} =$$

$$= x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{3} + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} - \frac{2}{3}x^3 = x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} - \frac{5}{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} = C$ — общий интеграл заданного уравнения в (D) . $\blacktriangleleft$

§8. Интегрирующий множитель

Пусть дифференциальное уравнение дано в симметричной форме:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (1)$$

$M(x, y), N(x, y) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbb{R}^2$. Пусть (1) не является уравнением в полных дифференциалах.

Если существует функция $\mu(x, y) \in C(D)$ и $\mu(x, y) \neq 0$ в $(D) \setminus (H)$ такая, что после умножения на нее обеих частей уравнения (1) получается уравнение

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \quad (2)$$

в полных дифференциалах в области (D) , то функция $\mu(x, y)$ называется *интегрирующим множителем* для уравнения (1).

Пусть функция $\mu(x, y)$ — интегрирующий множитель уравнения (1) и пусть функция $u(x, y) \in C^1(D)$ — первообразная левой части уравнения (2). Так как уравнение (2) равносильно уравнению (1), то справедливы следующие утверждения:

1) соотношение $u(x, y) = C$ — общий интеграл уравнения (1) в (D) ;

2) множество $(D) \setminus (H)$ — множество точек единственности для уравнения (1).

Рассмотрим вопрос о нахождении интегрирующего множителя.

Пусть $M(x, y)$, $N(x, y)$, $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ непрерывны в односвязной области (D) . Пусть $\mu(x, y) \in C^1(D)$. При этих условиях было показано:

Для того, чтобы (2) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы всюду в (D) выполнялось тождество:

$$\frac{\partial(\mu \cdot M)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu \cdot N)}{\partial x} \Leftrightarrow M(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial y} - N(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial x} \equiv \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

Иначе: Для того, чтобы уравнение (1) имело в (D) интегрирующий множитель $\mu(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\mu(x, y)$ была решением уравнения:

$$N(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial x} - M(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \cdot \left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right). \quad (3)$$

(Можно показать, что если $M(x, y), N(x, y) \in C^1(D)$, то для любой точки $(x_0, y_0) \in (D) \setminus (H)$ существует окрестность $U(x_0, y_0)$ такая, что уравнение (3) имеет решение $\mu(x, y) \in C^1(U(x_0, y_0))$ и, следовательно, уравнение (1) имеет в $U(x_0, y_0)$ интегрирующий множитель.)

Отметим, что в общем случае задача по нахождению интегрирующего множителя $\mu(x, y)$, как решения уравнения в частных производных (3), не легче, чем задача интегрирования исходного уравнения (1). Рассмотрим некоторые частные случаи, когда уравнение (3) упрощается и интегрирующий множитель для уравнения (1) найти легко.

I. Допустим, что μ зависит от x и y посредством известной функции $\omega(x, y)$, т. е. $\mu = \mu(\omega)$, где $\omega = \omega(x, y)$ — известная функция. В этом случае будем иметь

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{d\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{d\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Поэтому уравнение (3) запишется так:

$$\frac{d\mu}{d\omega} \left(N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right),$$

или

$$\frac{d}{d\omega} (\ln|\mu|) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}}. \quad (4)$$

Итак, если μ зависит только от ω , то уравнением для определения μ является уравнение (4). При этом правая часть (4) должна также зависеть только от ω . Этот вывод обратим. В самом деле, пусть

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} = \psi(\omega)$$

↑
обозначение

(т. е. отношение $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}}$ есть функция только от ω). Тогда (4) примет вид

$$\frac{d}{d\omega}(\ln|\mu|) = \psi(\omega) \Rightarrow \ln|\mu| = \int \psi(\omega) d\omega + \ln C, \text{ где } C > 0;$$

$$\Rightarrow |\mu| = Ce^{\int \psi(\omega) d\omega}.$$

Соотношение $|\mu| = Ce^{\int \psi(\omega) d\omega}$ представляет собой бесконечное множество решений уравнения (4). Для приведения уравнения (1) к уравнению в полных дифференциалах в качестве интегрирующего множителя μ достаточно брать лишь какое-нибудь одно из решений уравнения (4). Так мы и будем поступать всюду в дальнейшем.

Замечание. Из проведенных выше рассуждений вытекает, в частности, что:

1. Уравнение (1) имеет интегрирующий множитель μ , зависящий только от x ($\omega = x$), если выполнено условие

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \psi(x). \text{ Тогда } |\mu| = Ce^{\int \psi(x) dx}.$$

2. Уравнение (1) имеет интегрирующий множитель μ , зависящий только от y ($\omega = y$), если выполнено условие

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \psi(y). \text{ Тогда } |\mu| = Ce^{\int \psi(y) dy}.$$

3. Уравнение (1) имеет интегрирующий множитель $\mu = \mu(x \cdot y)$

$$(\omega = x \cdot y), \text{ если выполнено условие } \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM} = \psi(x \cdot y). \text{ Тогда}$$

$$|\mu| = Ce^{\int \psi(\omega) d\omega}, \text{ где } \omega = x \cdot y.$$

4. Уравнение (1) имеет интегрирующий множитель $\mu = \mu(x + y)$ ($\omega = x + y$), если выполнено условие

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M} = \psi(x + y). \text{ Тогда } |\mu| = Ce^{\int \psi(\omega) d\omega}, \text{ где } \omega = x + y;$$

и т. д.

II. Пусть $\mu(x, y)$ — интегрирующий множитель уравнения (1) и пусть $u(x, y)$ — соответствующий ему интеграл этого уравнения. Тогда все интегрирующие множители уравнения (1) выражаются формулой $\tilde{\mu}(x, y) = \mu(x, y) \cdot \varphi(u(x, y))$, где $\varphi(t)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Действительно, так как $\mu(x, y)$ — интегрирующий множитель уравнения (1), то $\mu M dx + \mu N dy = 0$ — уравнение в полных дифференциалах и, следовательно,

$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$ в (D) и $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \mu M$, $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \mu N$. Умножим обе части уравнения (1)

на функцию $\tilde{\mu}(x, y)$. Получим $\underbrace{\varphi(t) \cdot \mu M}_{\tilde{M}} dx + \underbrace{\varphi(t) \cdot \mu N}_{\tilde{N}} dy = 0$ (здесь

$t = u(x, y)$). Рассмотрим разность $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} &= \varphi(t) \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} + \mu M \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varphi(t) \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} - \mu N \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \\ &= \varphi(t) \underbrace{\left(\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \right)}_{=0 \text{ в } (D)} + \varphi'(t) \left(\mu M \frac{\partial u}{\partial y} - \mu N \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \\ &= \varphi'(t) \underbrace{\left(\mu^2 MN - \mu^2 MN \right)}_{=0 \text{ в } (D)} = 0 \text{ в } (D) \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow \tilde{\mu}(x, y)$ — интегрирующий множитель уравнения (1).

Принимая во внимание изложенное выше, интегрирующий множитель уравнения (1) иногда удается найти следующим образом. Представим уравнение (1) в виде

$$M_1(x, y) dx + N_1(x, y) dy + M_2(x, y) dx + N_2(x, y) dy = 0$$

и предположим, что удалось найти интегрирующие множители $\mu_1(x, y)$ и $\mu_2(x, y)$ и интегралы $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ соответственно уравнений

$$M_1(x, y) dx + N_1(x, y) dy = 0 \text{ и } M_2(x, y) dx + N_2(x, y) dy = 0.$$

Тогда все интегрирующие множители первого из этих уравнений запишутся в виде $\tilde{\mu}_1(x, y) = \mu_1(x, y)\varphi_1(u_1(x, y))$, а второго — в виде $\tilde{\mu}_2(x, y) = \mu_2(x, y)\varphi_2(u_2(x, y))$, где φ_1 и φ_2 — произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

Если удастся подобрать функции $\tilde{\varphi}_1$ и $\tilde{\varphi}_2$ так, что

$$\mu_1(x, y)\tilde{\varphi}_1(u_1(x, y)) = \mu_2(x, y)\tilde{\varphi}_2(u_2(x, y)),$$

то $\tilde{\mu}(x, y) = \mu_1(x, y)\tilde{\varphi}_1(u_1(x, y))$ — интегрирующий множитель уравнения (1).

Пример 1. Решить уравнение $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$.

► Здесь $M(x, y) = x^2 + y^2 + x$; $N(x, y) = y \Rightarrow M(x, y), N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$. $M(x, y)$ и $N(x, y)$ обращаются одновременно в нуль в точках: $(0, 0)$; $(-1, 0)$. Имеем $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$; $\frac{\partial N}{\partial x} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2y.$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)d\omega}{N\frac{\partial\omega}{\partial x} - M\frac{\partial\omega}{\partial y}} \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{2y d\omega}{y\frac{\partial\omega}{\partial x} - (x^2 + y^2 + x)\frac{\partial\omega}{\partial y}}.$$

Положим $\omega = x$. Тогда $\frac{\partial\omega}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0$ и, следовательно,

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{2y}{y} dx \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = 2dx \Rightarrow \ln|\mu| = 2x + \ln C \Rightarrow |\mu| = e^{2x}C.$$

Возьмем, например, $\mu = e^{2x}$ ($\neq 0$). Умножаем обе части исходного уравнения на $\mu = e^{2x}$. Получаем уравнение

$$\underbrace{(x^2 + y^2 + x) \cdot e^{2x}}_{=\tilde{M}(x,y)} dx + \underbrace{y \cdot e^{2x}}_{=\tilde{N}(x,y)} dy = 0, \text{ равносильное исходному. Име-}$$

ем $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = 2ye^{2x}$; $\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = 2ye^{2x} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ в $(D) = (\mathbb{R}^2) \Rightarrow$ Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах

в (D) . $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0); (-1, 0)\}$ — множество точек единственности полученного и исходного уравнений.

Возьмем в качестве точки (x_0, y_0) точку $(1, 0)$.

$$u(x, y) = \int_1^x \tilde{M}(x, y_0) dx + \int_0^y \tilde{N}(x, y) dy = \int_1^x (x^2 + x) e^{2x} dx + \int_0^y y e^{2x} dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \frac{x^2}{2} e^{2x} \Big|_{x=1}^{x=x} - \int_1^x x e^{2x} dx + \int_1^x x e^{2x} dx + \frac{y^2}{2} e^{2x} \Big|_{y=0}^{y=y} =$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{2} e^{2x} - \frac{e^2}{2} \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{2} e^{2x} = \frac{C}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x^2 + y^2) e^{2x} = C$ — общий интеграл исходного уравнения. ◀

Пример 2. Решить уравнение $(x^2 + y^2 + y) dx - x dy = 0$.

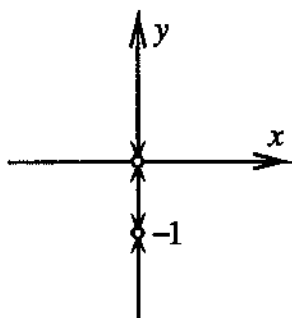


Рис. 1.16.
К примеру 2

► Здесь $M(x, y) = x^2 + y^2 + y$; $N(x, y) = -x \Rightarrow M(x, y), N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$. $M(x, y)$ и $N(x, y)$ обращаются одновременно в нуль в точках $(0, 0)$ и $(0, -1)$. Заметим, что

$$\begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ -1 < y < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < -1 \end{cases}$$

— решения исходного уравнения. Станем рассматривать наше уравнение в областях

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < +\infty \end{cases} \text{ и } (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < +\infty. \end{cases}$$

Имеем

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y + 1; \frac{\partial N}{\partial x} = -1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2(y + 1) \left(\frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial M}{\partial x} \in C(\mathbb{R}^2) \right);$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{2(y + 1)}{-x \frac{\partial \omega}{\partial x} - (x^2 + y^2 + y) \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega.$$

Положим $\omega = x^2 + y^2$. Тогда $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 2y$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{d\mu}{\mu} &= \frac{2(y+1)}{-2x^2 - 2y(x^2 + y^2 + y)} d\omega = \\ &= -\frac{2(y+1)}{2(y+1)(x^2 + y^2)} d\omega = -\frac{1}{x^2 + y^2} d\omega = -\frac{d\omega}{\omega} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} &= -\frac{d\omega}{\omega} \Rightarrow \ln|\mu| = -\ln|\omega| + \ln C.\end{aligned}$$

Возьмем, например, $\mu = \frac{1}{\omega}$, т. е. $\mu = \frac{1}{x^2 + y^2}$ ($\mu(x, y)$ определена и не равна нулю в $(D_1) \cup (D_2)$). Умножим обе части исходного урав-

нения на $\mu = \frac{1}{x^2 + y^2}$. Получим

$$\underbrace{\frac{x^2 + y^2 + y}{x^2 + y^2}}_{=\tilde{M}(x,y)} dx - \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2}}_{=\tilde{N}(x,y)} dy = 0.$$

Имеем:

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{(2y+1)(x^2 + y^2) - 2y(x^2 + y^2 + y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = -\frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ как в левой, так и в правой открытых полуплоскостях (т. е. в $(D_1) \cup (D_2)$). Значит, полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах в этих полуплоскостях.

1) Возьмем в качестве точки (x_0, y_0) точку $(1, 0)$.

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \int_1^x \tilde{M}(x, y_0) dx + \int_0^y \tilde{N}(x, y) dy = \\ &= \int_1^x dx - \int_0^y \frac{x dy}{x^2 + y^2} = x \Big|_{x=1}^{x=x} - x \cdot \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \Big|_{y=0}^{y=y}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(x, y) = x - 1 - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C$ — общий интеграл уравнения в правой полуплоскости.

2) Возьмем в качестве точки (x_0, y_0) точку $(-1, 0)$.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{-1}^x \tilde{M}(x, y_0) dx + \int_0^y \tilde{N}(x, y) dy = \\ &= \int_{-1}^x dx - \int_0^y \frac{x dy}{x^2 + y^2} = x + 1 - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow x - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C$ — общий интеграл уравнения в левой полуплоскости. ◀

Пример 3. Решить уравнение $y dy = (x dy + y dx) \sqrt{1 + y^2}$.

► Так как $\sqrt{1 + y^2} \neq 0$, то исходное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{y dy}{\sqrt{1 + y^2}} = x dy + y dx \Rightarrow \underbrace{y}_{=\tilde{M}(x, y)} dx + \underbrace{\left(x - \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} \right)}_{=\tilde{N}(x, y)} dy = 0.$$

Здесь $\tilde{M}(x, y) = y$; $\tilde{N}(x, y) = x - \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}}$; $\tilde{M}(x, y), \tilde{N}(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$.

$\tilde{M}(x, y)$ и $\tilde{N}(x, y)$ обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(0, 0)$. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ — множество точек единственности исходного

уравнения. Имеем $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = 1$; $\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ всюду в $\mathbb{R}^2$.

Функция $\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$ оказалась интегрирующим множителем исходного уравнения. Возьмем в качестве точки (x_0, y_0) точку $(0, 1)$.

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \int_0^x M(x, y) dx + \int_1^y N(x_0, y) dy = \\
 &= \int_0^x y dx - \int_1^y \frac{y dy}{\sqrt{1+y^2}} = xy \Big|_{x=0}^{x=x} - \sqrt{1+y^2} \Big|_{y=1}^{y=y} = \\
 &= xy - \sqrt{1+y^2} + \sqrt{2} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow xy - \sqrt{1+y^2} = C$ — общий интеграл уравнения. ◀

Пример 4. Решить уравнение

$$xy^2(xy' + y) = 1 \Leftrightarrow \underbrace{x^2y^2}_{=N(x,y)} dy + \underbrace{(xy^3 - 1)}_{=M(x,y)} dx = 0.$$

► Здесь $M(x, y) = xy^3 - 1$; $N(x, y) = x^2y^2$; $M(x, y), N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$.
 $M(x, y)$ и $N(x, y)$ не обращаются одновременно в нуль ни в одной точке плоскости x, y .

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3xy^2; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = xy^2 \quad \left(\frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathbb{R}^2); \right.$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) d\omega}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} = \frac{xy^2 d\omega}{x^2y^2 \frac{\partial \omega}{\partial x} - (xy^3 - 1) \frac{\partial \omega}{\partial y}}.$$

Положим $\omega = x$. Тогда

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0; \quad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{xy^2}{x^2y^2} dx \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{dx}{x} \quad \text{для } x \neq 0$$

$$\Rightarrow \ln|\mu| = \ln|x| + \ln C \Rightarrow |\mu| = C|x|.$$

Возьмем, например, $\mu = x$. Заметим, что исходное уравнение имеет

решение $\begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < +\infty. \end{cases}$ Для $x \neq 0$ и для любых y , т. е. в левой и

правой полуплоскостях, μ определена и $\mu \neq 0$. Поэтому, умножив обе части заданного уравнения на $\mu = x$, мы получим в каждой из полуплоскостей уравнение, равносильное исходному:

$$\underbrace{(x^2 y^3 - x)}_{= \tilde{M}(x,y)} dx + \underbrace{x^3 y^2}_{= \tilde{N}(x,y)} dy = 0.$$

Имеем $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = 3x^2 y^2$; $\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = 3x^2 y^2 \Rightarrow$ полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах в обеих полуплоскостях.

1) Возьмем в качестве точки (x_0, y_0) точку $(1, 0)$.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_1^x M(x, y_0) dx + \int_0^y N(x, y) dy = \int_1^x -x dx + \int_0^y x^3 y^2 dy = \\ &= -\frac{x^2}{2} \Big|_{x=1}^{x=x} + \frac{x^3 y^3}{3} \Big|_{y=0}^{y=y} = \frac{x^3 y^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{x^3 y^3}{3} - \frac{x^2}{2} = C$ — общий интеграл уравнения в правой полуплоскости.

2) Возьмем в качестве точки (x_0, y_0) точку $(-1, 0)$.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{-1}^x M(x, y_0) dx + \int_0^y N(x, y) dy = \\ &= \int_{-1}^x -x dx + \int_0^y x^3 y^2 dy = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{x^3 y^3}{3} \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{x^3 y^3}{3} - \frac{x^2}{2} = C$ — общий интеграл уравнения в левой полуплоскости.

Заметим, что решение исходного уравнения $\begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < +\infty \end{cases}$ со-

держится в общем решении. Оно получается из общего при $C = 0$. ◀

Пример 5. Решить уравнение $y^2 dx - (xy + x^3) dy = 0$.

► Отметим, что функции $M(x, y) = y^2$; $N(x, y) = -xy - x^3$ определены и непрерывны на всей плоскости x, y и обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(0, 0)$. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ — множество точек единственности заданного уравнения. Из вида уравнения следует, что

$$\begin{cases} y = 0, \\ 0 < x < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ -\infty < x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < 0 \end{cases}$$

— решения исходного уравнения. Поэтому искать решения исходного уравнения станем в областях:

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < 0; \end{cases} \quad (D_4) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < 0. \end{cases}$$

Имеем:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -y - 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 3(y + x^2)$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathbb{R}^2) \right);$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) d\omega}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} = \frac{3(y + x^2)}{-x(y + x^2) \frac{\partial \omega}{\partial x} - y^2 \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega.$$

Если положить $\omega = x$, то будем иметь $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$ и, следовательно,

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{3(y + x^2)}{-x(y + x^2)} dx \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -3 \frac{dx}{x}.$$

В качестве μ возьмем, например, $\mu = \frac{1}{x^3}$ (у нас в каждой из областей (D_k) , $k = \overline{1, 4}$: $x \neq 0$).

Умножим обе части исходного уравнения на $\mu = \frac{1}{x^3}$. Получим

$$\text{уравнение } \underbrace{\frac{y^2}{x^3}}_{\tilde{M}(x,y)} dx - \underbrace{\left(\frac{y}{x^2} + 1 \right)}_{\tilde{N}(x,y)} dy = 0, \text{ равносильное исходному в}$$

(D_k) , $k = \overline{1, 4}$. Имеем $\frac{\partial \tilde{M}(x, y)}{\partial y} = \frac{2y}{x^3}$; $\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = \frac{2y}{x^3} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} \equiv \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ в каждой (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. Значит, полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах в (D_k) , $k = \overline{1, 4}$.

Найдем общий интеграл заданного уравнения в областях (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. Для этого возьмем точку $(x_0, y_0) \in (D_k)$ ($x_0 \neq 0$; $y_0 \neq 0$). Будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = \\ &= \int_{x_0}^x \frac{y^2}{x^3} dx - \int_{y_0}^y \left(\frac{y}{x_0^2} + 1 \right) dy = -\frac{y^2}{2x^2} \Big|_{x=x_0}^{x=x} - \left(\frac{y^2}{2x_0^2} + y \right) \Big|_{y=y_0}^{y=y} = \\ &= -\frac{y^2}{2x^2} + \frac{y^2}{2x_0^2} - \frac{y^2}{2x_0^2} - y + \frac{y_0^2}{2x_0^2} + y_0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow u(x, y) = -\left(\frac{y^2}{2x^2} + y \right) + \frac{y_0^2}{2x_0^2} + y_0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{y^2}{2x^2} + y = C$ — общий интеграл заданного уравнения в каждой

из (D_k) . Заметим, что решения $\begin{cases} y = 0, \\ -\infty < x < 0; \end{cases} \begin{cases} y = 0, \\ 0 < x < +\infty \end{cases}$ содержатся в семействе $\frac{y^2}{2x^2} + y = C$ при значении $C = 0$. ◀

Пример 6. Решить уравнение $\left(y - \frac{1}{x} \right) dx + \frac{dy}{y} = 0$.

► Здесь $M(x, y) = y - \frac{1}{x}$; $N(x, y) = \frac{1}{y}$. Видим, что функция

$M(x, y) = y - \frac{1}{x}$ не определена на линии $\begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < +\infty, \end{cases}$ а функция

$N(x, y) = \frac{1}{y}$ не определена на линии $\begin{cases} y = 0, \\ -\infty < x < +\infty. \end{cases}$ $M(x, y)$ и

$N(x, y)$ определены и непрерывны в каждой из областей:

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < 0; \end{cases} \quad (D_4) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < 0. \end{cases}$$

$M(x, y)$ и $N(x, y)$ не обращаются в нуль ни в одной точке областей

$$(D_k), \quad k = \overline{1, 4}. \quad \text{Имеем} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(D_k), \quad k = \overline{1, 4} \right);$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) d\omega}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} = \frac{1}{\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} - \left(y - \frac{1}{x} \right) \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega.$$

Если положить $\omega = \frac{y}{x}$, то будем иметь $\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$; $\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{x}$;

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{-\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}} d\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{1}{\frac{y}{x}} d\left(\frac{y}{x}\right),$$

т. е.

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{d\omega}{\omega} \Rightarrow \ln |\mu| = -\ln |\omega| + \ln C.$$

В качестве интегрирующего множителя μ возьмем, например,

$$\mu = -\frac{1}{\omega} \Rightarrow \mu = -\frac{x}{y} \quad (\text{в областях } (D_k), \quad k = \overline{1, 4}, \quad x \neq 0 \text{ и } y \neq 0).$$

Умножим обе части исходного уравнения на $\mu = -\frac{x}{y}$. Получим

$$\underbrace{\left(\frac{1}{y} - x \right) dx}_{=\tilde{M}(x,y)} - \underbrace{\frac{x}{y^2} dy}_{=\tilde{N}(x,y)} = 0. \quad \tilde{M}(x, y) \text{ и } \tilde{N}(x, y) \text{ не обращаются одно-}$$

временно в нуль ни в одной точке областей (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. Имеем

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}; \quad \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} \equiv \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} \text{ в каждой из областей } (D_k).$$

Найдем общий интеграл заданного уравнения в областях (D_k) ,

$k = \overline{1, 4}$. Для этого возьмем точку $(x_0, y_0) \in (D_k)$ ($x_0 \neq 0$ и $y_0 \neq 0$).

Будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x \tilde{M}(x, y) dx + \int_{y_0}^y \tilde{N}(x_0, y) dy = \int_{x_0}^x \left(\frac{1}{y} - x \right) dx - \int_{y_0}^y \frac{x_0}{y^2} dy = \\ &= \left(\frac{x}{y} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=x_0}^{x=x} + \frac{x_0}{y} \Big|_{y=y_0}^{y=y} = \frac{x}{y} - \frac{x^2}{2} - \frac{x_0}{y} + \frac{x_0^2}{2} + \frac{x_0}{y} - \frac{x_0}{y_0} \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{x}{y} - \frac{x^2}{2} = C$ — общий интеграл исходного уравнения в каждой из (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. ◀

Пример 7. Решить уравнение $(x^2 + 3 \ln y) y dx - x dy = 0$.

► Здесь $M(x, y) = (x^2 + 3 \ln y) y$ — определена и непрерывна

в $(D) = \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$ $N(x, y) = -x$ — определена и непрерывна

на $\mathbb{R}^2 \Rightarrow M(x, y)$ и $N(x, y)$ определены и непрерывны в (D) ;

$M(x, y)$ и $N(x, y)$ одновременно обращаются в нуль лишь в точке

$(0, 1)$. Из вида заданного уравнения следует, что $\begin{cases} x = 0, \\ 1 < y < +\infty \end{cases}$

и $\begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ — решения этого уравнения. Поэтому решения на-

шего уравнения станем искать в областях: $(D_1) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ y > 0 \end{cases}$

и $(D_2) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ y > 0. \end{cases}$ Так как $y > 0$ в (D) , то заданное уравнение

равносильно уравнению

$$\underbrace{(x^2 + 3 \ln y)}_{=M_1(x,y)} dx - \underbrace{\frac{x}{y}}_{=N_1(x,y)} dy = 0. \quad (*)$$

Имеем

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{3}{y}; \quad \frac{\partial N_1}{\partial x} = -\frac{1}{y} \Rightarrow \frac{\partial M_1}{\partial y} - \frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{4}{y};$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M_1}{\partial y} - \frac{\partial N_1}{\partial x}}{N_1 \frac{\partial \omega}{\partial x} - M_1 \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega = \frac{\frac{4}{y}}{-\frac{x}{y} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} - (x^2 + 3 \ln y) \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega.$$

Если положить $\omega = x$, то будем иметь $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$;

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{4}{y}}{-\frac{x}{y}} dx \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -4 \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|\mu| = -4 \ln|x| + \ln C.$$

В качестве интегрирующего множителя возьмем, например, функцию $\mu = \frac{1}{x^4}$. Заметим, что $x \neq 0$ как в (D_1) , так и в (D_2) . Умно-

жим обе части уравнения (*) на $\mu = \frac{1}{x^4}$. Получим уравнение

$$\underbrace{\left(\frac{1}{x^2} + 3 \frac{\ln y}{x^4} \right)}_{=\tilde{M}(x,y)} dx - \underbrace{\frac{1}{x^3 y}}_{=\tilde{N}(x,y)} dy = 0,$$

равносильное исходному в $(D_1) \cup (D_2)$. Имеем $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{3}{x^4 y}$;

$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = \frac{3}{x^4 y} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ как в (D_1) , так и в (D_2) . Значит, полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найдем общий интеграл этого уравнения (а следовательно, и ис-

ходного уравнения) в областях (D_k) , $k = 1, 2$. Для этого возьмем точку $(x_0, y_0) \in (D_k)$ ($x_0 \neq 0$, $y_0 > 0$). Будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x \tilde{M}(x, y) dx + \int_{y_0}^y \tilde{N}(x_0, y) dy = \\ &= \int_{x_0}^x \left(\frac{1}{x^2} + 3 \frac{\ln y}{x^4} \right) dx - \int_{y_0}^y \frac{1}{x_0^3 y} dy = \left(-\frac{1}{x} - \frac{\ln y}{x^3} \right) \Big|_{x=x_0}^{x=x} - \frac{\ln y}{x_0^3} \Big|_{y=y_0}^{y=y} = \\ &= -\frac{1}{x} - \frac{\ln y}{x^3} + \frac{1}{x_0} + \frac{\ln y}{x_0^3} - \frac{\ln y_0}{x_0^3} + \frac{\ln y_0}{x_0^3} = -\frac{1}{x} - \frac{\ln y}{x^3} + \frac{1}{x_0} + \frac{\ln y_0}{x_0^3} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{\ln y}{x^3} &= C \quad \text{— общий интеграл нашего уравнения в} \end{aligned}$$

$(D_1) \cup (D_2)$ ◀

Пример 8. Решить уравнение $y(y^2 + 1)dx + x(y^2 - x + 1)dy = 0$.

► Здесь $M(x, y) = y(y^2 + 1)$; $N(x, y) = x(y^2 - x + 1) \Rightarrow M, N \in C(\mathbb{R}^2)$. $M(x, y)$ и $N(x, y)$ обращаются одновременно в нуль в точках $(0, 0)$, $(1, 0)$. Непосредственно из вида данного уравнения заключаем, что

$$\begin{cases} y = 0, \\ -\infty < x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ 0 < x < 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ 1 < x < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < 0 \end{cases}$$

— решения этого уравнения. Поэтому решения исходного уравнения станём искать в областях:

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < 0; \end{cases} \quad (D_4) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < 0. \end{cases}$$

Так как $y^2 + 1 \neq 0$, то исходное уравнение равносильно уравнению

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n dx + \left(x - \frac{x^2}{y^2 + 1} \right) dy}_{= N_1'} = 0. \quad (*)$$

Имеем

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial N_1}{\partial x} = 1 - \frac{2x}{y^2 + 1} \Rightarrow \frac{\partial M_1}{\partial y} - \frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{2x}{y^2 + 1};$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M_1}{\partial y} - \frac{\partial N_1}{\partial x}}{N_1 \frac{\partial \omega}{\partial x} - M_1 \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{2x}{y^2 + 1}}{\left(x - \frac{x^2}{y^2 + 1}\right) \frac{\partial \omega}{\partial x} - y \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega.$$

Если положить $\omega = x \cdot y$, то будем иметь $\frac{\partial \omega}{\partial x} = y$; $\frac{\partial \omega}{\partial y} = x$;

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{2x}{y^2 + 1}}{\left(x - \frac{x^2}{y^2 + 1}\right) y - xy} d\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{2x}{y^2 + 1}}{xy - \frac{x^2 y}{y^2 + 1} - xy} d\omega \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{\omega} d\omega.$$

В качестве интегрирующего множителя возьмем, например, функцию $\mu = \frac{1}{\omega^2} \Rightarrow \mu = \frac{1}{x^2 y^2}$ (у нас в каждой области (D_k) , $k = \overline{1, 4}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$).

Умножим обе части уравнения (*) на $\mu = \frac{1}{x^2 y^2}$. Получим уравнение

$$\underbrace{\frac{1}{x^2 y}}_{=\tilde{M}(x,y)} dx + \underbrace{\left(\frac{1}{xy^2} - \frac{1}{y^2(y^2 + 1)}\right)}_{=\tilde{N}(x,y)} dy = 0,$$

равносильное исходному в (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. Имеем $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = -\frac{1}{x^2 y^2}$;

$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = -\frac{1}{x^2 y^2} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ в каждой из областей (D_k) . Следова-

тельно, полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Найдем общий интеграл этого уравнения (а значит, и исходного уравнения) в каждой из областей (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. Для этого возьмем точку $(x_0, y_0) \in (D_k)$ ($x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$). Будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x \tilde{M}(x, y) dx + \int_{y_0}^y \tilde{N}(x_0, y) dy = \\ &= \int_{x_0}^x \frac{dx}{x^2 y} + \int_{y_0}^y \left(\frac{1}{x_0 y^2} - \frac{1}{y^2(1+y^2)} \right) dy = \\ &= -\frac{1}{xy} \Big|_{x=x_0}^{x=x} + \left(-\frac{1}{x_0 y} + \frac{1}{y} + \operatorname{arctg} y \right) \Big|_{y=y_0}^{y=y} = \\ &= -\frac{1}{xy} + \frac{1}{x_0 y} - \frac{1}{x_0 y_0} + \frac{1}{y} + \operatorname{arctg} y + \\ &+ \frac{1}{x_0 y_0} - \frac{1}{y_0} - \operatorname{arctg} y_0 = -\frac{1}{xy} + \frac{1}{y} + \operatorname{arctg} y + C_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{1}{xy} + \frac{1}{y} + \operatorname{arctg} y &= C \text{ — общий интеграл исходного уравнения} \end{aligned}$$

в (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. ◀

Пример 9. Решить уравнение $y^2 dx + (e^x - y) dy = 0$.

► Здесь $M(x, y) = y^2$; $N(x, y) = e^x - y \Rightarrow M(x, y), N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$. $M(x, y)$ и $N(x, y)$ не обращаются в нуль одновременно ни в одной точке из $\mathbb{R}^2$. Из самого уравнения легко видеть, что функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$ является решением уравнения. Поэтому станем рассматривать наше уравнение для $y \neq 0$, а именно: для $y > 0$ и для $y < 0$ (т. е. в открытых верхней и нижней полуплоскостях). Имеем

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2y - e^x;$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega = \frac{2y - e^x}{(e^x - y) \frac{\partial \omega}{\partial x} - y^2 \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega.$$

Если положить $\omega = x + \ln |y|$, то будет $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{y}$;

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{2y - e^x}{(e^x - y) - y^2 \frac{1}{y}} d\omega \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -d\omega.$$

Возьмем в качестве μ , например, функцию $\mu = e^{-\omega} \Rightarrow \mu = e^{-x} \cdot e^{-\ln |y|} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu = \frac{1}{|y| e^x} \Rightarrow \mu = \frac{1}{ye^x}$, если $y > 0$ и $\mu = -\frac{1}{ye^x}$, если $y < 0$. Умно-

жим обе части исходного уравнения на μ . Получим (как для открытой верхней, так и для открытой нижней полуплоскостей) уравнение

$$\underbrace{ye^{-x}}_{=\tilde{M}(x,y)} dx + \underbrace{\left(\frac{1}{y} - e^{-x}\right)}_{=\tilde{N}(x,y)} dy = 0, \text{ равносильное исходному. Имеем}$$

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = e^{-x}; \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = e^{-x} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} \text{ всюду в открытых верхней и ниж-}$$

ней полуплоскостях. Значит, полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах в отмеченных полуплоскостях.

Найдем общие интегралы нашего уравнения в верхней и нижней полуплоскостях. Для этого берем точку $(x_0, y_0) \in (D_k)$, $k = 1, 2$ ((D_1) — верхняя, а (D_2) — нижняя полуплоскости; x_0 — любое, а y_0 — любое, не равное нулю).

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x \tilde{M}(x, y) dx + \int_{y_0}^y \tilde{N}(x_0, y) dy = \int_{x_0}^x ye^{-x} dx + \int_{y_0}^y \left(\frac{1}{y} - e^{-x_0}\right) dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x, y) = -ye^{-x} \Big|_{x=x_0}^{x=x} + \left(\ln |y| - e^{-x_0} y\right) \Big|_{y=y_0}^{y=y} =$$

$$= -ye^{-x} + ye^{-x_0} + \ln |y| - ye^{-x_0} - \ln |y_0| + y_0 e^{x_0} = \ln |y| - ye^{-x} + C_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln |y| - ye^{-x} = C \text{ — общий интеграл уравнения в } (D_1) \cup (D_2) \blacktriangleleft$$

Пример 10. Решить уравнение $x^2 y(ydx + xdy) = 2ydx + xdy$.

► Здесь $M(x, y) = x^2 y^2 - 2y$; $N(x, y) = x^3 y - x \Rightarrow M(x, y), N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$. $M(x, y)$ и $N(x, y)$ обращаются одновременно в нуль в точке $(0, 0)$. Из заданного уравнения непосредственно видно, что

$$\begin{cases} y = 0, \\ -\infty < x < 0; \end{cases} \begin{cases} y = 0, \\ 0 < x < +\infty; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < 0 \end{cases}$$

— решения заданного уравнения. Станем рассматривать исходное уравнение в областях:

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < 0; \end{cases} \quad (D_4) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < 0. \end{cases}$$

1. Рассмотрим уравнение

$$x^2 y^2 dx + x^3 y dy = 0. \quad (*)$$

Легко видеть, что $\mu_1(x, y) = \frac{1}{x^3 y^2}$ является интегрирующим множителем этого уравнения в (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. В самом деле, после

умножения обеих его частей на μ_1 получаем: $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$ — урав-

нение в полных дифференциалах. $xu = C_1$ — общий интеграл уравнения (*) в каждой из областей (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. Тогда все интегрирующие множители уравнения (*) содержатся в формуле

$$\mu_1(x, y) = \mu_1(x, y) \cdot \varphi_1(x \cdot y) = \frac{1}{x^3 y^2} \varphi_1(x \cdot y), \text{ где } \varphi_1 \text{ — произвольная,}$$

непрерывно дифференцируемая функция.

2. Рассмотрим уравнение

$$2ydx + xdy = 0. \quad (**)$$

Легко видеть, что $\mu_2(x, y) = \frac{1}{xy}$ является интегрирующим множителем уравнения (**) в (D_k) , $k = \overline{1, 4}$, ибо после умножения обеих частей уравнения (**) на $\mu_2 = \frac{1}{xy}$ получаем уравнение в полных дифференциалах: $2\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow x^2y = C_2$ — общий интеграл уравнения (**) в каждой из (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. Тогда, как мы знаем, все интегрирующие множители уравнения (**) содержатся в соотношении: $\tilde{\mu}_2(x, y) = \mu_2(x, y) \cdot \varphi_2(x^2y) = \frac{1}{xy} \cdot \varphi_2(x^2y)$, где φ_2 — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Попытаемся подобрать функции $\tilde{\varphi}_1$ и $\tilde{\varphi}_2$ так, чтобы было

$$\mu_1(x, y) \cdot \tilde{\varphi}_1(xy) = \mu_2(x, y) \cdot \tilde{\varphi}_2(x^2y),$$

т. е. чтобы было $\frac{1}{x^3y^2} \tilde{\varphi}_1(xy) = \frac{1}{xy} \tilde{\varphi}_2(x^2y)$. Возьмем в качестве функ-

ции $\tilde{\varphi}_1(xy) \equiv 1$. Тогда $\tilde{\varphi}_2(x^2y) = \frac{1}{x^2y}$. Но тогда

$$\tilde{\mu}(x, y) = \mu_1(x, y) \cdot \tilde{\varphi}_1 = \mu_2(x, y) \cdot \tilde{\varphi}_2 = \frac{1}{x^3y^2}$$

будет интегрирующим множителем исходного уравнения в (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. Проверим это. Умножим обе части исходного уравнения

на $\tilde{\mu} = \frac{1}{x^3y^2}$. Получим

$$\underbrace{\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3y}\right)}_{=\tilde{M}(x,y)} dx + \underbrace{\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x^2y^2}\right)}_{=\tilde{N}(x,y)} dy = 0.$$

Имеем $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{2}{x^3y^2}$; $\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = \frac{2}{x^3y^2} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ в каждой (D_k) , $k = \overline{1, 4}$.

Найдем общие интегралы исходного уравнения в (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. Для этого возьмем точку $(x_0, y_0) \in (D_k)$ ($x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$). Будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x \tilde{M}(x, y) dx + \int_{y_0}^y \tilde{N}(x_0, y) dy = \\ &= \int_{x_0}^x \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3 y} \right) dx + \int_{y_0}^y \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x_0^2 y^2} \right) dy = \\ &= \left(\ln|x| + \frac{1}{x^2 y} \right) \Big|_{x=x_0}^{x=x} + \left(\ln|y| + \frac{1}{x_0^2 y} \right) \Big|_{y=y_0}^{y=y} = \\ &= \ln|x| + \frac{1}{x^2 y} - \ln|x_0| - \frac{1}{x_0^2 y} + \ln|y| + \frac{1}{x_0^2 y} - \ln|y_0| - \frac{1}{x_0^2 y_0} = \\ &= \ln|x| + \ln|y| + \frac{1}{x^2 y} + \tilde{C} \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow \ln|x| + \ln|y| + \frac{1}{x^2 y} = C$ — общий интеграл исходного уравнения в каждой из областей (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. ◀

Пример 11. Решить уравнение $y(x + y^2)dx + x^2(y - 1)dy = 0$.

► Здесь $M(x, y) = xy + y^3$; $N(x, y) = x^2y - x^2 \Rightarrow M, N \in C(\mathbb{R}^2)$. $M(x, y)$ и $N(x, y)$ обращаются одновременно в нуль в точках $(0, 0)$ и $(-1, 1)$. Видим непосредственно, что

$$\begin{cases} y = 0, \\ -\infty < x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ 0 < x < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < 0 \end{cases}$$

— решения заданного уравнения. Станем рассматривать исходное уравнение в областях:

$$\begin{aligned} (D_1) &= \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} & (D_2) &= \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \\ (D_3) &= \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < 0; \end{cases} & (D_4) &= \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Имеем

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x + 3y^2; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 2x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 3x + 3y^2 - 2xy;$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{3x + 3y^2 - 2xy}{(x^2y - x^2) \frac{\partial \omega}{\partial x} - (xy + y^3) \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega.$$

Если положить $\omega = y(x+y)^2$, то будет: $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 2y(x+y)$;

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = (x+y)(x+3y);$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{\mu} &= \frac{3x + 3y^2 - 2xy}{(x^2y - x^2)2y(x+y) - y(x+y)(x+y^2)(x+3y)} d\omega \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{3x + 3y^2 - 2xy}{-y(x+y)^2(3x + 3y^2 - 2xy)} d\omega \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{d\omega}{\omega}. \end{aligned}$$

Возьмем в качестве μ , например, функцию $\mu = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{y(x+y)^2}$.

Умножим обе части исходного уравнения на $\mu = \frac{1}{y(x+y)^2}$. Заме-

тим, что умножение на μ сводится к делению обеих частей уравнения на произведение $y(x+y)^2$. У нас в областях (D_k) , $k = \overline{1, 4}$, $y \neq 0$. В областях (D_1) и (D_3) : $x+y \neq 0$. В областях (D_2) и (D_4) $x+y=0$ на прямой $y=-x$. Отметим, что

$$\begin{cases} y = -x, \\ -\infty < x < -1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x, \\ -1 < x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x, \\ 0 < x < +\infty \end{cases}$$

— решения исходного уравнения. Поэтому станем рассматривать исходное уравнение в областях (D_1) , (D_{21}) , (D_{22}) , (D_3) , (D_{41}) , (D_{42}) , где

$$(D_{21}) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -x < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_{22}) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ 0 < y < -x; \end{cases}$$

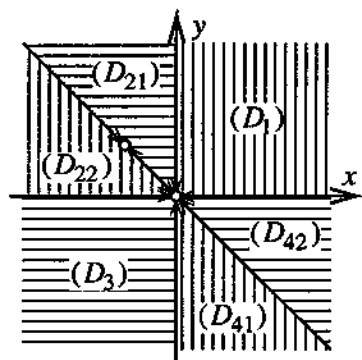


Рис. 1.17. К примеру 11

$$(D_{41}) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < -x; \end{cases}$$

$$(D_{42}) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -x < y < 0. \end{cases}$$

В каждой из этих областей, после умножения обеих частей исходного

уравнения на $\mu = \frac{1}{y(x+y)^2}$, мы по-

лучим уравнение, равносильное исходному. Это будет уравнение

$$\underbrace{\frac{x+y^2}{(x+y)^2}}_{=\tilde{M}(x,y)} dx + \underbrace{\frac{x^2(y-1)}{y(x+y)^2}}_{=\tilde{N}(x,y)} dy = 0.$$

Имеем $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{2x(y-1)}{(x+y)^3}$; $\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = \frac{2x(y-1)}{(x+y)^3} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ в областях

(D_1) , (D_{21}) , (D_{22}) , (D_3) , (D_{41}) , (D_{42}) . Следовательно, полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах в каждой из упомянутых областей.

Замечание. В этом примере установить вид функции $\omega(x, y)$

из условия, чтобы было $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} = f(\omega)$, оказалось делом не

совсем простым. Более удобным способом нахождения интегрирующего множителя μ для этого уравнения будет следующий.

Запишем исходное уравнение в виде

$$y^3 dx + x^2 y dy + xy dx - x^2 dy = 0.$$

1. Рассмотрим уравнение

$$y^3 dx + x^2 y dy = 0. \quad (*)$$

Легко видеть, что $\mu_1(x, y) = \frac{1}{x^2 y^3}$ является интегрирующим множителем этого уравнения. В самом деле, после умножения обеих его частей

на μ_1 получаем: $\frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y^2} = 0$ — уравнение в полных дифференциалах

$\Rightarrow -\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -C \Rightarrow \frac{x+y}{xy} = C$ — общий интеграл рассматриваемого

уравнения в областях (D_k) , $k = \overline{1, 4}$, $\Rightarrow \tilde{\mu}_1(x, y) = \varphi_1\left(\frac{x+y}{xy}\right) \mu_1(x, y)$ —

интегрирующий множитель уравнения (*). (φ_1 — произвольная, непрерывно дифференцируемая функция.)

2. Рассмотрим уравнение

$$xydx - x^2 dy = 0. \quad (**)$$

Легко видеть, что $\mu_2(x, y) = \frac{1}{x^2 y}$ является интегрирующим множителем уравнения (**), ибо после умножения обеих частей уравнения

(**) на $\mu_2 = \frac{1}{x^2 y}$ получаем $\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0$ — уравнение в полных диф-

ференциалах $\Rightarrow \frac{y}{x} = C$ — общий интеграл уравнения (**) в обла-

стях (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. Значит, $\tilde{\mu}_2(x, y) = \mu_2(x, y) \cdot \varphi_2\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^2 y} \varphi_2\left(\frac{y}{x}\right)$,

где φ_2 — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, — тоже интегрирующий множитель уравнения (**).

Попытаемся подобрать функции $\tilde{\varphi}_1$ и $\tilde{\varphi}_2$ так, чтобы было:

$$\frac{1}{x^2 y^3} \tilde{\varphi}_1\left(\frac{x+y}{xy}\right) = \frac{1}{x^2 y} \tilde{\varphi}_2\left(\frac{y}{x}\right).$$

Возьмем в качестве функции $\tilde{\varphi}_1(t) = \frac{1}{t^2}$, а в качестве функции

$\tilde{\varphi}_2(z) = (1+z)^{-2}$. Тогда $\tilde{\varphi}_1\left(\frac{x+y}{xy}\right) = \frac{x^2 y^2}{(x+y)^2}$, $\tilde{\varphi}_2\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2}{(x+y)^2}$ и, следовательно,

$$\mu_1 \tilde{\Phi}_1 \left(\frac{x+y}{xy} \right) = \mu_2 \tilde{\Phi}_2 \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{1}{y(x+y)^2}.$$

Вывод: $\tilde{\mu}(x, y) = \frac{1}{y(x+y)^2}$ — интегрирующий множитель для исходного уравнения.

Найдем общие интегралы исходного уравнения в областях:

$(D_1), (D_{21}), (D_{22}), (D_3), (D_{41}), (D_{42})$. Для этого возьмем точку (x_0, y_0) ($x_0 \neq 0$; $y_0 \neq 0$; $y_0 \neq -x_0$). Будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x \tilde{M}(x, y) dx + \int_{y_0}^y \tilde{N}(x_0, y) dy = \\ &= \int_{x_0}^x \frac{x+y^2}{(x+y)^2} dx + \int_{y_0}^y \frac{x_0^2(y-1)}{y(x_0+y)^2} dy = \\ &= \int_{x_0}^x \frac{(x+y) + (y^2-y)}{(x+y)^2} dx + \int_{y_0}^y \left(-\frac{1}{y} + \frac{x_0(x_0+1)}{(x_0+y)^2} + \frac{1}{x_0+y} \right) dy \Rightarrow \\ &\Rightarrow u(x, y) = \left(\ln|x+y| + \frac{y-y^2}{x+y} \right) \Big|_{x=x_0}^{x=x} - \\ &- \left(\ln|y| + \frac{x_0(x_0+1)}{x_0+y} - \ln|x_0+y| \right) \Big|_{y=y_0}^{y=y} \Rightarrow \\ &\Rightarrow u(x, y) = \ln|x+y| + \frac{y-y^2}{x+y} - \ln|x_0+y| - \\ &- \frac{y-y^2}{x_0+y} - \ln|y| - \frac{x_0(x_0+1)}{x_0+y} + \ln|x_0+y| + \\ &+ \ln|y_0| + \frac{x_0(x_0+1)}{x_0+y_0} - \ln|x_0+y_0| = \end{aligned}$$

$$= \ln \left| \frac{x+y}{y} \right| + \frac{y-y^2}{x+y} - \frac{y-y^2+x_0^2+x_0}{x_0+y} + C_1 =$$

$$= \ln \left| \frac{x+y}{y} \right| + \frac{y-y^2}{x+y} - 1 - x_0 + y + C_1 =$$

$$= \ln \left| \frac{x+y}{y} \right| + \frac{y-y^2+xy+y^2}{x+y} + C_2 = \ln \left| \frac{x+y}{y} \right| + \frac{(x+1)y}{x+y} + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \left| \frac{x+y}{y} \right| + \frac{(x+1)y}{x+y} = C \text{ — общий интеграл исходного уравнения}$$

в областях (D_1) , (D_{21}) , (D_{22}) , (D_3) , (D_{41}) , (D_{42}) . ◀

Пример 12. Решить уравнение $(x^2 - \sin^2 y)dx + x \sin 2y dy = 0$.

► Здесь $M(x, y) = x^2 - \sin^2 y$; $N(x, y) = x \sin 2y \Rightarrow M(x, y), N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$; $M(x, y)$ и $N(x, y)$ обращаются одновременно в нуль в точках $(0, k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и в точках $\left(-1, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(1, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Из заданного уравнения непосредственно видно, что $\begin{cases} x = 0, \\ k\pi < y < (k+1)\pi, \end{cases} k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ —

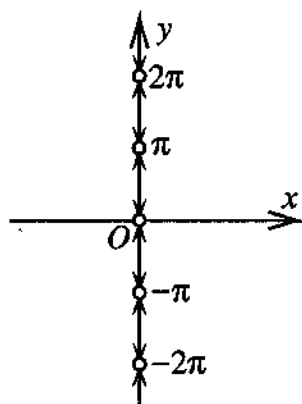


Рис. 1.18. К примеру 12

решения этого уравнения. Станем рас-

сматривать исходное уравнение в областях: $(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < +\infty \end{cases}$

и $(D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < +\infty \end{cases}$ (это открытые правая и левая полуплоскости). Имеем

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\sin 2y; \frac{\partial N}{\partial x} = \sin 2y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -2 \sin 2y;$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{-2 \sin 2y}{x \sin 2y \frac{\partial \omega}{\partial x} - (x^2 - \sin^2 y) \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega.$$

Если положить $\omega = x$, то будет $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$; $\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{x} dx$. Возьмем

в качестве μ , например, функцию $\mu = \frac{1}{x^2}$. Умножим обе части

исходного уравнения на $\mu = \frac{1}{x^2}$ (у нас в областях (D_k) , $k = \overline{1, 2}$:

$$x \neq 0$$
). Получим уравнение $\underbrace{\left(1 - \frac{\sin^2 y}{x^2}\right)}_{=\tilde{M}(x,y)} dx + \underbrace{\frac{\sin 2y}{x}}_{=\tilde{N}(x,y)} dy = 0$, равно-

сильное исходному в (D_k) , $k = \overline{1, 2}$. Имеем $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = -\frac{\sin 2y}{x^2}$;

$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = -\frac{\sin 2y}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ в (D_k) , $k = \overline{1, 2}$. Найдем общие интегралы полученного (а значит, и исходного) уравнения в областях (D_1) , (D_2) . Для этого возьмем точку (x_0, y_0) ($x_0 \neq 0$). Будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x \tilde{M}(x, y) dx + \int_{y_0}^y \tilde{N}(x_0, y) dy = \\ &= \int_{x_0}^x \left(1 - \frac{\sin^2 y}{x^2}\right) dx + \int_{y_0}^y \frac{\sin 2y}{x_0} dy = \left(x + \frac{\sin^2 y}{x}\right) \Big|_{x=x_0}^{x=x} - \frac{1}{2x_0} \cos 2y \Big|_{y=y_0}^{y=y} = \\ &= x + \frac{\sin^2 y}{x} - x_0 - \frac{\sin^2 y}{x_0} - \frac{1}{2x_0} \cos 2y + \frac{1}{2x_0} \cos 2y_0 = \\ &= x + \frac{\sin^2 y}{x} - \frac{1}{x_0} \left(\sin^2 y + \frac{\cos 2y}{2}\right) + C_1 = \\ &= x + \frac{\sin^2 y}{x} - \frac{1}{2x_0} (2\sin^2 y + \cos^2 y - \sin^2 y) + C_1 = x + \frac{\sin^2 y}{x} + \tilde{C}_1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow x + \frac{\sin^2 y}{x} = C$ — общий интеграл исходного уравнения в областях (D_1) и (D_2) . ◀

Пример 13. Решить уравнение $x(\ln y + 2 \ln x - 1)dy = 2ydx$.

► Перепишем исходное уравнение в виде

$$2ydx - x(\ln y + 2 \ln x - 1)dy = 0.$$

Ясно, что должно быть $x > 0$ и $y > 0$. Здесь $M(x, y) = 2y$; $N(x, y) = (1 - \ln y - 2 \ln x)x \Rightarrow M(x, y), N(x, y) \in C(D)$, где

$(D) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty. \end{cases}$ Так как $M(x, y) \neq 0$ в (D) , то $M(x, y)$ и $N(x, y)$ не обращаются в нуль одновременно ни в одной точке области (D) .

У нас $x \neq 0$ для точек $(x, y) \in (D)$. Поэтому исходное уравнение равносильно уравнению:

$$\underbrace{2 \frac{y}{x}}_{=M_1(x,y)} dx + \underbrace{(1 - \ln y - 2 \ln x)}_{=N_1(x,y)} dy = 0. \quad (*)$$

Имеем $\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{2}{x}$; $\frac{\partial N_1}{\partial x} = -\frac{2}{x} \Rightarrow \frac{\partial M_1}{\partial y} - \frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{4}{x}$;

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M_1}{\partial y} - \frac{\partial N_1}{\partial x}}{N_1 \frac{\partial \omega}{\partial x} - M_1 \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{4}{x}}{(1 - \ln y - 2 \ln x) \frac{\partial \omega}{\partial x} - 2 \frac{y}{x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega.$$

Если положить $\omega = y$, то будет $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 1$; $\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{y} dy$. Возьмем

в качестве μ , например, функцию $\mu = \frac{1}{y^2}$. Умножим обе части

уравнения $(*)$ на $\mu = \frac{1}{y^2}$ (у нас для точек $(x, y) \in (D)$: $y \neq 0$). Получим уравнение

$$\underbrace{\frac{2}{xy}}_{=\tilde{M}(x,y)} dx + \underbrace{\left(\frac{1 - \ln y - 2 \ln x}{y^2} \right)}_{=\tilde{N}(x,y)} dy = 0,$$

равносильное исходному в (D) . Имеем $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = -\frac{2}{xy^2}$; $\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = -\frac{2}{xy^2} \Rightarrow$

$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ в области (D) . Следовательно, полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Найдем общий интеграл этого (а значит, и исходного) уравнения в области (D) . Для этого возьмем точку $(x_0, y_0) \in (D)$ ($x_0 > 0$, $y_0 > 0$). Будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x \tilde{M}(x, y) dx + \int_{y_0}^y \tilde{N}(x_0, y) dy = \\ &= \int_{x_0}^x \frac{2}{xy} dx + \int_{y_0}^y \left(\frac{1 - 2 \ln x_0}{y^2} - \frac{\ln y}{y^2} \right) dy = \\ &= \frac{2}{y} \ln x \Big|_{x=x_0}^{x=x} + \left(\frac{2 \ln x_0 - 1}{y} + \frac{\ln y + 1}{y} \right) \Big|_{y=y_0}^{y=y} = \\ &= \frac{2}{y} \ln x - \frac{2}{y} \ln x_0 + \frac{2 \ln x_0}{y} - \frac{1}{y} + \frac{\ln y}{y} + \frac{1}{y} - \frac{2}{y_0} \ln x_0 + \frac{1}{y_0} - \frac{\ln y_0}{y_0} - \frac{1}{y_0} = \\ &= \frac{2}{y} \ln x + \frac{\ln y}{y} + C_1 = \frac{1}{y} (\ln y + 2 \ln x) + C_1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} (\ln y + 2 \ln x) = \tilde{C} \Rightarrow \frac{\ln (yx^2)}{y} = \tilde{C} \Rightarrow y = C \ln (x^2 y) \text{ — общий}$$

интеграл исходного уравнения в (D) . ◀

Пример 14. Решить уравнение $(x^2 + 1)(2x dx + \cos y dy) = 2x \sin y dx$.

► Так как $x^2 + 1 \neq 0$, то исходное уравнение будет равносильно

$$\text{уравнению } 2x dx + \cos y dy = \frac{2x}{x^2 + 1} \sin y dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(2x - \frac{2x}{x^2+1} \sin y\right)}_{=M(x,y)} dx + \underbrace{\frac{\cos y}{x^2+1}}_{=N(x,y)} dy = 0. \quad (*)$$

$M(x, y), N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$; M, N обращаются одновременно в нуль в точках $\left(0, \frac{\pi}{2}(2k+1)\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Станем рассматривать наше

уравнение в области $(D) = (\mathbb{R}^2) \setminus \left\{ \left(0, \frac{\pi}{2}(2k+1)\right) \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$.

Имеем

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{2x}{x^2+1} \cos y; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{2x}{x^2+1} \cos y;$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega = \frac{-\frac{2x}{x^2+1} \cos y}{\cos y \frac{\partial \omega}{\partial x} - \left(2x - \frac{2x}{x^2+1} \sin y\right) \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega.$$

Если положить $\omega = x$, то будет $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 1; \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0; \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2x}{x^2+1} dx$.

Возьмем в качестве μ , например, функцию $\mu = \frac{1}{x^2+1}$. Умножим

обе части уравнения (*) на $\mu = \frac{1}{x^2+1}$. Получим уравнение

$$\underbrace{\left(\frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} \sin y\right)}_{=\tilde{M}(x,y)} dx + \underbrace{\frac{\cos y}{x^2+1}}_{=\tilde{N}(x,y)} dy = 0,$$

равносильное исходному в области (D) . Имеем

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \cos y; \quad \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \cos y \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} \text{ в } (D).$$

Значит, полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найдем общий интеграл этого (а значит, и ис-

ходного) уравнения в (D) . Для этого берем точку $(x_0, y_0) \in (D)$. Будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x \tilde{M}(x, y) dx + \int_{y_0}^y \tilde{N}(x_0, y) dy = \\ &= \int_{x_0}^x \left(\frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} \sin y \right) dx + \int_{y_0}^y \frac{\cos y}{x_0^2 + 1} dy = \\ &= \left(\ln(1+x^2) + \frac{1}{1+x^2} \sin y \right) \Big|_{x=x_0}^{x=x} + \frac{\sin y}{1+x_0^2} \Big|_{y=y_0}^{y=y} = \\ &= \ln(1+x^2) + \frac{\sin y}{1+x^2} - \ln(1+x_0^2) - \frac{1}{1+x_0^2} \sin y + \frac{1}{1+x_0^2} \sin y - \frac{\sin y_0}{1+x_0^2} = \\ &= \ln(1+x^2) + \frac{\sin y}{1+x^2} + C_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln(1+x^2) + \frac{\sin y}{1+x^2} &= C \quad \text{— общий интеграл исходного уравнения} \\ &\text{в } (D). \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Пример 15. Решить уравнение $(2x^3y^2 - y)dx + (2x^2y^3 - x)dy = 0$.

► Здесь $M(x, y) = 2x^3y^2 - y$, $N(x, y) = 2x^2y^3 - x \Rightarrow M(x, y), N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$. $M(x, y)$ и $N(x, y)$ одновременно обращаются в нуль в точках $(0, 0)$, $(2^{-1/4}, 2^{-1/4})$; $(-2^{-1/4}, -2^{-1/4})$. Непосредственно из заданного уравнения видно, что

$$\begin{cases} y = 0, \\ -\infty < x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ 0 < x < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < 0 \end{cases}$$

— решения уравнения. Станем рассматривать исходное уравнение в областях

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < 0; \end{cases} \quad (D_4) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < 0. \end{cases}$$

Имеем

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4x^3y - 1; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy^3 - 1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy(x^2 - y^2);$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{4xy(x^2 - y^2)}{(2x^2y^3 - x)\frac{\partial\omega}{\partial x} - (2x^3y^2 - y)\frac{\partial\omega}{\partial y}} d\omega.$$

Если положить $\omega = xy$, то будет: $\frac{\partial\omega}{\partial x} = y$; $\frac{\partial\omega}{\partial y} = x$;

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{4xy(x^2 - y^2)}{xy(2xy^3 - 1 - 2x^3y + 1)} d\omega = \frac{4(x^2 - y^2)}{2xy(y^2 - x^2)} d\omega \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{\omega} d\omega.$$

Возьмем в качестве μ функцию $\mu = \frac{1}{\omega^2} \Rightarrow \mu = \frac{1}{x^2y^2}$. Умножим обе

части исходного уравнения на $\mu = \frac{1}{x^2y^2}$ (у нас $x \neq 0$ и $y \neq 0$ в (D_k) ,

$k = \overline{1, 4}$). Получим уравнение $\underbrace{\left(2x - \frac{1}{x^2y}\right)dx}_{=\tilde{M}(x,y)} + \underbrace{\left(2y - \frac{1}{xy^2}\right)dy}_{=\tilde{N}(x,y)} = 0$, рав-

носильное исходному в (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. Имеем $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{1}{x^2y^2}$;

$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = \frac{1}{x^2y^2} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ в (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. Следовательно, полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах в (D_k) .

Найдем общий интеграл этого (а значит, и исходного) уравнения в (D_k) . Для этого берем произвольную точку $(x_0, y_0) \in (D_k)$, $k = \overline{1, 4}$. Имеем

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x \tilde{M}(x, y) dx + \int_{y_0}^y \tilde{N}(x_0, y) dy = \\ &= \int_{x_0}^x \left(2x - \frac{1}{x^2y}\right) dx + \int_{y_0}^y \left(2y - \frac{1}{x_0y^2}\right) dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(x^2 + \frac{1}{xy} \right) \Big|_{x=x_0}^{x=x} + \left(y^2 + \frac{1}{x_0 y} \right) \Big|_{y=y_0}^{y=y} = \\
&= x^2 + \frac{1}{xy} - x_0^2 - \frac{1}{x_0 y} + y^2 + \frac{1}{x_0 y} - y_0^2 - \frac{1}{x_0 y_0} = \\
&= x^2 + \frac{1}{xy} + y^2 + C_1 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{1}{xy} = C$ — общий интеграл исходного уравнения в (D_k) ,

$k = \overline{1, 4}$. ◀

Пример 16. Решить уравнение $(x^2 y^3 + y)dx + (x^3 y^2 - x)dy = 0$.

► Здесь $M(x, y) = x^2 y^3 + y$; $N(x, y) = x^3 y^2 - x \Rightarrow$

$M(x, y), N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$. $M(x, y)$ и $N(x, y)$ одновременно обращаются в нуль в точке $(0, 0)$. Из заданного уравнения видно непосредственно, что

$$\begin{cases} y = 0, \\ -\infty < x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ 0 < x < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < +\infty \end{cases}$$

— решения уравнения. Станем рассматривать заданное уравнение в областях:

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < 0; \end{cases} \quad (D_4) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < 0. \end{cases}$$

Имеем $\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 y^2 + 1$; $\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 y^2 - 1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2$;

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega = \frac{2}{x(x^2 y^2 - 1) \frac{\partial \omega}{\partial x} - y(x^2 y^2 + 1) \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega.$$

Если положить $\omega = xy$, то будет $\frac{\partial \omega}{\partial x} = y$; $\frac{\partial \omega}{\partial y} = x$;

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{2d\omega}{xy(x^2y^2 - 1 - x^2y^2 - 1)} = -\frac{d\omega}{\omega}.$$

Возьмем в качестве μ , например, функцию $\mu = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{xy}$. Умножим

обе части исходного уравнения на $\mu = \frac{1}{xy}$ (у нас $x \neq 0$ и $y \neq 0$ в (D_k) , $k = \overline{1, 4}$). Получим уравнение

$$\left(xy^2 + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x^2y - \frac{1}{y}\right)dy = 0, \quad (*)$$

равносильное исходному уравнению в областях (D_k) , $k = \overline{1, 4}$.

В уравнении $(*)$ $\tilde{M}(x, y) = xy^2 + \frac{1}{x}$; $\tilde{N}(x, y) = x^2y - \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = 2xy$;

$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = 2xy \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ в (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. Следовательно, полученное уравнение $(*)$ является уравнением в полных дифференциалах в областях (D_k) , $k = \overline{1, 4}$.

Найдем общий интеграл полученного (а значит, и исходного) уравнения в областях (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. Для этого берем произвольную точку (x_0, y_0) в (D_k) . Будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x \tilde{M}(x, y) dx + \int_{y_0}^y \tilde{N}(x_0, y) dy = \\ &= \int_{x_0}^x \left(xy^2 + \frac{1}{x}\right) dx + \int_{y_0}^y \left(x_0^2y - \frac{1}{y}\right) dy = \\ &= \left(\frac{x^2y^2}{2} + \ln |x|\right) \Big|_{x=x_0}^{x=x} + \left(\frac{x_0^2y^2}{2} - \ln |y|\right) \Big|_{y=y_0}^{y=y} = \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2 y^2}{2} + \ln|x| - \frac{x_0^2 y^2}{2} - \ln|x_0| + \frac{x_0^2 y^2}{2} - \ln|y| - \frac{x_0^2 y_0^2}{2} + \\ + \ln|y_0| = \frac{x^2 y^2}{2} + \ln\left|\frac{x}{y}\right| + C_1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{x^2 y^2}{2} + \ln\left|\frac{x}{y}\right| = C$ — общий интеграл уравнения в каждой из областей (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. ◀

Пример 17. Решить уравнение $(x^2 - y)dx + x(y + 1)dy = 0$.

► Здесь $M(x, y) = x^2 - y$; $N(x, y) = x(y + 1) \Rightarrow M, N \in C(\mathbb{R}^2)$. $M(x, y)$, $N(x, y)$ обращаются одновременно в нуль в точке $(0, 0)$.

Из самого уравнения непосредственно видно, что $\begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < 0 \end{cases}$

и $\begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < +\infty \end{cases}$ — решения уравнения. Станем рассматривать задан-

ное уравнение в областях: $(D_1) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < +\infty; \end{cases}$ $(D_2) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < +\infty \end{cases}$

((D_1) и (D_2) — открытые левая и правая полуплоскости). Запишем исходное уравнение в виде

$$x^2 dx + xy dy + x dy - y dx = 0.$$

1. Рассмотрим уравнение

$$x^2 dx + xy dy = 0. \quad (*)$$

Легко видеть, что функция $\mu_1 = \frac{1}{x}$ является интегрирующим множителем для уравнения (*). В самом деле, после умножения обеих частей уравнения (*) на $\mu_1 = \frac{1}{x}$ получаем: $x dx + y dy = 0$ — уравнение в полных дифференциалах $\Rightarrow x^2 + y^2 = C$ — общий интеграл уравнения (*) в (D_1) и в (D_2) $\Rightarrow \bar{\mu}_1(x, y) = \mu_1 \phi_1(x^2 + y^2)$ — интегрирующий множитель уравнения

(*) ($\varphi_1(t)$ — произвольная, непрерывно дифференцируемая функция).

2. Рассмотрим уравнение

$$x dy - y dx = 0. \quad (**)$$

Легко видеть, что функция $\mu_2 = \frac{1}{xy}$ является интегрирующим множителем для уравнения (**). Действительно, после умножения обеих частей уравнения (**) на $\mu_2 = \frac{1}{xy}$ получаем: $\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow$

$$\ln|x| - \ln|y| = \ln|C| \Rightarrow \left| \frac{x}{y} \right| = |C| \Rightarrow \frac{x}{y} = C \text{ — общий интеграл урав-}$$

нения (**) в (D_1) и в $(D_2) \Rightarrow \tilde{\mu}_2(x, y) = \mu_2 \varphi_2\left(\frac{x}{y}\right)$ — интегрирующий множитель уравнения (**) ($\varphi_2(z)$ — произвольная, непрерывно дифференцируемая функция). Попробуем подобрать функции

$$\tilde{\varphi}_1 \text{ и } \tilde{\varphi}_2 \text{ так, чтобы было } \mu_1(x, y)\tilde{\varphi}_1(x^2 + y^2) \equiv \mu_2(x, y)\tilde{\varphi}_2\left(\frac{x}{y}\right), \text{ т. е.}$$

чтобы было $\frac{1}{x}\tilde{\varphi}_1(x^2 + y^2) \equiv \frac{1}{xy}\tilde{\varphi}_2\left(\frac{x}{y}\right)$. Возьмем в качестве функции

$$\tilde{\varphi}_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}, \text{ а в качестве функции } \tilde{\varphi}_2(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}. \text{ Тогда}$$

$$\tilde{\varphi}_1(x^2 + y^2) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \tilde{\varphi}_2\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ и, следовательно,}$$

$$\mu_1\tilde{\varphi}_1(x^2 + y^2) \equiv \mu_2\tilde{\varphi}_2\left(\frac{x}{y}\right) \equiv \frac{1}{x\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ в } (D_1) \cup (D_2).$$

Вывод: функция $\tilde{\mu} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 + y^2}}$ — интегрирующий множитель

для исходного уравнения в $(D_1) \cup (D_2)$.

Умножим обе части исходного уравнения на $\mu = \frac{1}{x\sqrt{x^2+y^2}}$ (у

нас $x \neq 0$). Получим уравнение
$$\underbrace{\frac{x^2-y}{x\sqrt{x^2+y^2}}}_{-\tilde{M}(x,y)} dx + \underbrace{\frac{y+1}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{-\tilde{N}(x,y)} dy = 0,$$

равносильное в $(D_1) \cup (D_2)$ исходному. Имеем

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = -\frac{x(1+y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}; \quad \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = -\frac{x(1+y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \Rightarrow \quad \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} \quad \text{в}$$

$(D_1) \cup (D_2)$. Следовательно, полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах как в (D_1) , так и в (D_2) .

Найдем общий интеграл полученного (а значит, и исходного) уравнения в (D_k) , $k = \overline{1, 2}$. Возьмем произвольную точку $(x_0, y_0) \in (D_k)$, $k = \overline{1, 2}$. Имеем

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x \tilde{M}(x, y) dx + \int_{y_0}^y \tilde{N}(x_0, y) dy = \\ &= \int_{x_0}^x \frac{x^2-y}{x\sqrt{x^2+y^2}} dx + \int_{y_0}^y \frac{y+1}{\sqrt{x_0^2+y^2}} dy = \\ &= \int_{x_0}^x \frac{x dx}{\sqrt{x^2+y^2}} - \int_{x_0}^x \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}} dx + \int_{y_0}^y \frac{y dy}{\sqrt{x_0^2+y^2}} + \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{x_0^2+y^2}} = \\ &= \sqrt{x^2+y^2} \Big|_{x=x_0}^{x=x} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{\sqrt{x^2+y^2}+y} \right| \Big|_{x=x_0}^{x=x} + \\ &\quad + \sqrt{x_0^2+y^2} \Big|_{y=y_0}^{y=y} + \ln \left| y + \sqrt{x_0^2+y^2} \right| \Big|_{y=y_0}^{y=y} = \\ &= \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x_0^2+y^2} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{\sqrt{x^2+y^2}+y} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x_0^2+y^2}-y}{\sqrt{x_0^2+y^2}+y} \right| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\sqrt{x_0^2+y^2}-\sqrt{x_0^2+y_0^2}+\ln\left|\sqrt{x_0^2+y^2}+y\right|-\ln\left|y_0+\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right|= \\
& =\sqrt{x^2+y^2}+\ln\left|\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right|-\ln\left|\frac{y}{x_0}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x_0^2}}\right|+\ln\left|\frac{y}{x_0}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x_0^2}}\right|+ \\
& +\ln\left|x_0\right|-\ln\left|y_0+\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right|=\sqrt{x^2+y^2}+\ln\left|\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right|+C_1 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}+\ln\left|\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right|=C \quad \text{— общий интеграл исходного}
\end{aligned}$$

уравнения в (D_k) , $k = \overline{1, 2}$. ◀

Пример 18. Решить уравнение $y^2(ydx - 2xdy) = x^3(xdy - 2ydx)$.

► Запишем уравнение в виде

$$(y^3 + 2x^3y)dx - (2y^2x + x^4)dy = 0.$$

Здесь $M(x, y) = 2x^3y + y^3$, $N(x, y) = -2xy^2 - x^4 \Rightarrow M(x, y), N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$; $M(x, y)$ и $N(x, y)$ обращаются одновременно в нуль в точке $(0, 0)$. Непосредственно из уравнения видно, что

$$\begin{cases} y = 0, \\ -\infty < x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ 0 < x < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < +\infty \end{cases}$$

— решения уравнения. Станем рассматривать заданное уравнение в областях:

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < 0; \end{cases} \quad (D_4) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < 0. \end{cases}$$

1. Рассмотрим уравнение

$$y^2(ydx - 2xdy) = 0. \quad (*)$$

Легко видеть, что функция $\mu_1(x, y) = \frac{1}{xy^3}$ является интегрирующим множителем для уравнения (*). В самом деле, после умножения обеих частей уравнения (*) на $\mu_1 = \frac{1}{xy^3}$ получаем $\frac{dx}{x} - 2\frac{dy}{y} = 0$ — уравнение в полных дифференциалах $\Rightarrow \frac{y^2}{x} = C$ — общий интеграл

уравнения (*) в (D_k) , $k = \overline{1, 4} \Rightarrow \bar{\mu}_1(x, y) = \mu_1(x, y)\varphi_1\left(\frac{y^2}{x}\right)$ — интегрирующий множитель уравнения (*) ($\varphi_1(t)$ — произвольная, непрерывно дифференцируемая функция).

2. Рассмотрим уравнение

$$x^3(xdy - 2ydx) = 0. \quad (**)$$

Легко видеть, что функция $\mu_2(x, y) = \frac{1}{x^4 y}$ — интегрирующий множитель для уравнения (**). Действительно, после умножения обеих частей уравнения (**) на $\mu_2 = \frac{1}{x^4 y}$ получаем $\frac{dy}{y} - \frac{2dx}{x} = 0$ — уравнение в полных дифференциалах $\Rightarrow \frac{x^2}{y} = C$ — общий интеграл

уравнения (**) в (D_k) , $k = \overline{1, 4} \Rightarrow \bar{\mu}_2(x, y) = \mu_2(x, y)\varphi_2\left(\frac{x^2}{y}\right)$ — интегрирующий множитель уравнения (**) ($\varphi_2(z)$ — произвольная, непрерывно дифференцируемая функция).

Попытаемся подобрать функции $\tilde{\varphi}_1$ и $\tilde{\varphi}_2$ так, чтобы было

$$\mu_1(x, y)\tilde{\varphi}_1\left(\frac{y^2}{x}\right) = \mu_2(x, y)\tilde{\varphi}_2\left(\frac{x^2}{y}\right), \text{ т. е. чтобы было}$$

$$\frac{1}{xy^3}\tilde{\varphi}_1\left(\frac{y^2}{x}\right) = \frac{1}{x^4 y}\tilde{\varphi}_2\left(\frac{x^2}{y}\right). \quad (***)$$

Возьмем в качестве функции $\tilde{\varphi}_1(t) = t^\alpha$, где α — число, пока неизвестное, а в качестве функции $\tilde{\varphi}_2(z) = z^\beta$, где β — число, пока неизвестное. Тождество (***) примет тогда вид

$$\frac{1}{xy^3} \cdot \frac{y^{2\alpha}}{x^\alpha} \equiv \frac{1}{x^4 y} \cdot \frac{x^{2\beta}}{y^\beta} \Rightarrow \frac{x^3}{y^2} \equiv \frac{x^{2\beta+\alpha}}{y^{\beta+2\alpha}} \Rightarrow \begin{cases} 2\beta + \alpha = 3, \\ \beta + 2\alpha = 2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}; \beta = \frac{4}{3}.$$

Значит, $\tilde{\varphi}_1(t) = t^{1/3}$; $\tilde{\varphi}_2(z) = z^{4/3}$. Следовательно,

$$\tilde{\mu}(x, y) = \frac{1}{xy^3} \left(\frac{y^2}{x} \right)^{1/3} \equiv \frac{1}{x^4 y} \left(\frac{x^2}{y} \right)^{4/3} \equiv \frac{1}{x^{4/3} y^{7/3}}$$

(у нас $x \neq 0$ и $y \neq 0$ в (D_k) , $k = \overline{1, 4}$). Умножим обе части исходного уравнения на $\mu = x^{-4/3} y^{-7/3}$. Получим уравнение

$$\underbrace{\left(x^{-4/3} y^{2/3} + 2x^{5/3} y^{-4/3} \right) dx}_{=\tilde{M}(x,y)} - \underbrace{\left(2x^{-1/3} y^{-1/3} + x^{8/3} y^{-7/3} \right) dy}_{=\tilde{N}(x,y)} = 0.$$

$$\text{Имеем } \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{2}{3} x^{-4/3} y^{-1/3} - \frac{8}{3} x^{5/3} y^{-7/3}; \quad \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = \frac{2}{3} x^{-1/3} y^{-1/3} - \frac{8}{3} x^{5/3} y^{-7/3} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} \equiv \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} \text{ в } (D_k), \quad k = \overline{1, 4}.$$

Найдем общий интеграл этого (а значит, и исходного) уравнения в (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. Для этого берем произвольную точку $(x_0, y_0) \in (D_k)$, $k = \overline{1, 4}$. Имеем

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x \tilde{M}(x, y) dx + \int_{y_0}^y \tilde{N}(x_0, y) dy = \\ &= \int_{x_0}^x \left(x^{-4/3} y^{2/3} + 2x^{5/3} y^{-4/3} \right) dx - \int_{y_0}^y \left(2x_0^{-1/3} y^{-1/3} + x_0^{8/3} y^{-7/3} \right) dy = \\ &= \left(-3x^{-1/3} y^{2/3} + \frac{3}{4} x^{8/3} y^{-4/3} \right) \Big|_{x=x_0}^{x=x} - \left(3x_0^{-1/3} y^{2/3} - \frac{3}{4} x_0^{8/3} y^{-4/3} \right) \Big|_{y=y_0}^{y=y} = \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{x^{8/3}}{y^{4/3}} - 3 \frac{y^{2/3}}{x^{1/3}} - \frac{3}{4} \cdot \frac{x_0^{8/3}}{y_0^{4/3}} + 3 \frac{y_0^{2/3}}{x_0^{1/3}} +$$

$$+ \frac{3}{4} \cdot \frac{x_0^{8/3}}{y^{4/3}} - 3 \frac{y^{2/3}}{x_0^{1/3}} - \frac{3}{4} \cdot \frac{x_0^{8/3}}{y_0^{4/3}} + 3 \frac{y_0^{2/3}}{x_0^{1/3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \frac{3}{4} \frac{x^{8/3}}{y^{4/3}} - 3 \frac{y^{2/3}}{x^{1/3}} + C_1 \Rightarrow u(x, y) = 3 \frac{x^3 - 4y^2}{4x^{1/3}y^{4/3}} + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \frac{x^3 - 4y^2}{4x^{1/3}y^{4/3}} = \tilde{C} \Rightarrow x^3 - 4y^2 = Cy \cdot \sqrt[3]{xy} \text{ — общий интеграл исход-}$$

ного уравнения в (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. ◀

Пример 19. Решить уравнение $y(x+y)dx + (xy+1)dy = 0$.

► Здесь $M(x, y) = y(x+y)$; $N(x, y) = xy+1 \Rightarrow M(x, y)$,

$$N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2). \quad \frac{\partial M}{\partial y} = x+2y; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathbb{R}^2).$$

$M(x, y)$ и $N(x, y)$ обращаются одновременно в нуль в точках $(1, -1)$ и $(-1, 1)$. Из заданного уравнения непосредственно видно, что $y=0$ — решение этого уравнения. Станем рассматривать

исходное уравнение в областях $(D_1) = \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$

$$(D_2) = \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ -\infty < y < 0. \end{cases} \text{ Имеем } \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = x+y;$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega = \frac{(x+y)d\omega}{(xy+1) \frac{\partial \omega}{\partial x} - y(x+y) \frac{\partial \omega}{\partial y}}.$$

Если положить $\omega = y$, то будем иметь $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 1$; $\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dy}{y}$.

Возьмем в качестве μ , например, функцию $\mu = \frac{1}{y}$ (у нас $y \neq 0$ в

(D_k) ; $k = \overline{1, 2}$). Умножим обе части исходного уравнения на $\mu = \frac{1}{y}$. Получим уравнение

$$(x+y)dx + \left(x + \frac{1}{y}\right)dy = 0, \quad (*)$$

равносильное исходному в областях (D_k) , $k = \overline{1, 2}$. Здесь

$$\tilde{M}(x, y) = x + y; \quad \tilde{N}(x, y) = x + \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} \equiv \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}.$$

Значит, уравнение (*) является уравнением в полных дифференциалах. Найдем общий интеграл уравнения (*) (а значит, и исходного уравнения) в областях (D_k) , $k = \overline{1, 2}$. Для этого берем в (D_k) , $k = \overline{1, 2}$, произвольную точку (x_0, y_0) . $\tilde{M}(x, y)$ и $\tilde{N}(x, y)$ обращаются одновременно в нуль в точках $(1, -1)$ и $(-1, 1)$. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, -1); (-1, 1)\}$ — множество точек единственности уравнения (*) (а значит, и исходного уравнения). Имеем

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x \tilde{M}(x, y) dx + \int_{y_0}^y \tilde{N}(x_0, y) dy = \int_{x_0}^x (x+y) dx + \int_{y_0}^y \left(x_0 + \frac{1}{y}\right) dy \Rightarrow \\ &\Rightarrow u(x, y) = \left(\frac{x^2}{2} + xy\right) \Big|_{x=x_0}^{x=x} + (x_0 y + \ln|y|) \Big|_{y=y_0}^{y=y} = \\ &= \frac{x^2}{2} + xy - \frac{x_0^2}{2} - x_0 y + x_0 y + \ln|y| - x_0 y_0 - \ln|y_0| = \\ &= \frac{x^2}{2} + xy + \ln|y| + C_1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + xy + \ln|y| = C$ — общий интеграл заданного уравнения в областях (D_1) и (D_2) . ◀

Пример 20. Решить уравнение $(x^2 + 2x + y)dx + (3x^2 y - x)dy = 0$.

► Здесь $M(x, y) = x^2 + 2x + y$; $N(x, y) = 3x^2 y - x \Rightarrow$

$$M(x, y), N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2); \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy - 1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x},$$

$\frac{\partial N}{\partial x} \in C(R^2)$. $M(x, y)$ и $N(x, y)$ обращаются одновременно в нуль в точках $(0, 0)$ и (x_*, y_*) , где $x_* = -2,08$, $y_* = -0,16$.

Из заданного уравнения непосредственно видно, что $\begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < 0 \end{cases}$ — решения этого уравнения.

Станем рассматривать уравнение в областях $(D_1) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < +\infty; \end{cases}$

$(D_2) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < +\infty. \end{cases}$ Имеем $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2(1 - 3xy)$;

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega = \frac{2(1 - 3xy)d\omega}{x(3xy - 1) \frac{\partial \omega}{\partial x} - (x^2 + 2x + y) \frac{\partial \omega}{\partial y}}.$$

Если положить $\omega = x$, то будет $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$; $\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2dx}{x}$. Возьмем

в качестве μ , например, функцию $\mu = \frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$ в (D_k) , $k = \overline{1, 2}$).

Умножим обе части заданного уравнения на $\mu = \frac{1}{x^2}$. Получим уравнение

$$\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(3y - \frac{1}{x}\right)dy = 0, \quad (*)$$

равносильное исходному в областях (D_1) и (D_2) . В $(*)$

$$\tilde{M}(x, y) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{y}{x^2}; \quad \tilde{N}(x, y) = 3y - \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{1}{x^2}; \quad \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} \text{ в } (D_k), \quad k = \overline{1, 2}. \text{ Значит, уравнение } (*) \text{ является уравне-}$$

нием в полных дифференциалах в (D_k) , $k = \overline{1, 2}$. Найдём общий интеграл уравнения $(*)$ (а значит, и исходного уравнения) в обла-

стях (D_k) , $k = \overline{1, 2}$. Для этого берем произвольную точку (x_0, y_0) в (D_k) , $k = \overline{1, 2}$. Имеем

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x \tilde{M}(x, y) dx + \int_{y_0}^y \tilde{N}(x_0, y) dy = \\ &= \int_{x_0}^x \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{y}{x^2} \right) dx + \int_{y_0}^y \left(3y - \frac{1}{x_0} \right) dy = \\ &= \left(x + 2 \ln|x| - \frac{y}{x} \right) \Big|_{x=x_0}^{x=x} + \left(\frac{3}{2} y^2 - \frac{y}{x_0} \right) \Big|_{y=y_0}^{y=y} \Rightarrow \\ &\Rightarrow u(x, y) = x + 2 \ln|x| - \frac{y}{x} - x_0 - 2 \ln|x_0| + \\ &\quad + \frac{y}{x_0} + \frac{3}{2} y^2 - \frac{y}{x_0} - \frac{3}{2} y_0^2 + \frac{y_0}{x_0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow u(x, y) = x + 2 \ln|x| - \frac{y}{x} + \frac{3}{2} y^2 + C_1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow x + 2 \ln|x| - \frac{y}{x} + \frac{3}{2} y^2 = C$ — общий интеграл исходного уравнения в областях (D_1) и (D_2) . ◀

Пример 21. Решить уравнение $xydx - (y^3 + x^2y + x^2)dy = 0$.

► Здесь $M(x, y) = xy$; $N(x, y) = -y^3 - x^2y - x^2 \Rightarrow M(x, y)$,

$N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$; $\frac{\partial M}{\partial y} = x$; $\frac{\partial N}{\partial x} = -2xy - 2x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathbb{R}^2)$.

$M(x, y)$, $N(x, y)$ обращаются одновременно в нуль в точке $(0, 0)$.

Из заданного уравнения видно непосредственно, что $\begin{cases} y = 0, \\ -\infty < x < 0; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 0, \\ 0 < x < +\infty \end{cases}$ — решения уравнения. Станем рассматривать исход-

ное уравнение в областях $(D_1) = \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$

$$(D_2) = \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ -\infty < y < 0. \end{cases} \text{ Имеем } \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = x(3+2y);$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega = \frac{x(3+2y) d\omega}{-(y^3 + x^2 y + x^2) \frac{\partial \omega}{\partial x} - xy \frac{\partial \omega}{\partial y}}.$$

Если положить $\omega = y$, то будет $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 1$; $\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{3+2y}{y} dy$.

Возьмем в качестве μ , например, функцию $\mu = \frac{e^{-2y}}{y^3}$ (у нас $y \neq 0$ в

(D_k) , $k = \overline{1, 2}$). Умножим обе части заданного уравнения на $\mu = \frac{e^{-2y}}{y^3}$. Получим уравнение

$$\frac{xe^{-2y}}{y^2} dx - \left(e^{-2y} + \frac{x^2}{y^2} e^{-2y} + \frac{x^2 e^{-2y}}{y^3} \right) dy = 0, \quad (*)$$

равносильное исходному в областях (D_k) , $k = \overline{1, 2}$. В (*)

$$\begin{aligned} \tilde{M}(x, y) &= \frac{xe^{-2y}}{y^2}; \quad \tilde{N}(x, y) = -\left(e^{-2y} + \frac{x^2}{y^2} e^{-2y} + \frac{x^2 e^{-2y}}{y^3} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} &= -2x \left(\frac{e^{-2y}}{y^2} + \frac{e^{-2y}}{y^3} \right); \quad \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = -2x \left(\frac{e^{-2y}}{y^2} + \frac{e^{-2y}}{y^3} \right) \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} \end{aligned}$$

в (D_k) , $k = \overline{1, 2}$. Значит, (*) является уравнением в полных дифференциалах. Найдем общий интеграл уравнения (*) в областях (D_k) , $k = \overline{1, 2}$. (Тем самым мы найдем общий интеграл исходного уравнения в областях (D_k) , $k = \overline{1, 2}$.) Для этого берем произ-

вольную точку (x_0, y_0) в (D_k) , $k = \overline{1, 2}$. Пусть это будет точка $(0, 1)$. Имеем

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x \tilde{M}(x, y) dx + \int_{y_0}^y \tilde{N}(x_0, y) dy = \int_0^x \frac{x e^{-2y}}{y^2} dx - \int_1^y e^{-2y} dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \frac{x^2 e^{-2y}}{2y^2} \Big|_{x=0}^{x=x} + \frac{e^{-2y}}{2} \Big|_{y=1}^{y=y} =$$

$$= \frac{x^2 e^{-2y}}{2y^2} + \frac{e^{-2y}}{2} - \frac{1}{2e^2} = \frac{x^2 e^{-2y}}{2y^2} + \frac{e^{-2y}}{2} + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-2y}}{2} \left(\frac{x^2}{y^2} + 1 \right) = C \text{ — общий интеграл заданного уравнения в}$$

областях (D_1) и (D_2) . ◀

Пример 22. Решить уравнение $(x^2 - y^2 + y)dx + x(2y - 1)dy = 0$.

► Здесь $M(x, y) = x^2 - y^2 + y$; $N(x, y) = x(2y - 1) \Rightarrow M(x, y)$,

$$N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2); \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 1 - 2y; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y - 1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathbb{R}^2).$$

$M(x, y)$, $N(x, y)$ обращаются одновременно в нуль в точках $(0, 0)$ и $(0, 1)$. Из заданного уравнения непосредственно видно, что

$$\begin{cases} x = 0, \\ 1 < y < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < 0 \end{cases} \text{ — решения этого уравнения.}$$

Станем рассматривать исходное уравнение в открытой левой и

правой полуплоскостях, т. е. в областях $(D_1) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < +\infty \end{cases}$ и

$$(D_2) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < +\infty. \end{cases} \text{ Имеем } \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2(1 - 2y);$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega = \frac{2(1 - 2y)}{x(2y - 1) \frac{\partial \omega}{\partial x} - (x^2 - y^2 + y) \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega.$$

Если положить $\omega = x$, то будет $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$; $\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{x} dx$. Возьмем в качестве μ , например, функцию $\mu = \frac{1}{x^2}$ (у нас $x \neq 0$ в областях (D_k) , $k = \overline{1, 2}$). Умножим обе части заданного уравнения на $\mu = \frac{1}{x^2}$. Получим уравнение

$$\underbrace{\left(1 - \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x^2}\right)}_{=\tilde{M}(x,y)} dx + \underbrace{\left(2\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\right)}_{=\tilde{N}(x,y)} dy = 0, \quad (*)$$

равносильное исходному уравнению в областях (D_k) , $k = \overline{1, 2}$. Имеем

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2} + \frac{1}{x^2}; \quad \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} \text{ в } (D_k), \quad k = \overline{1, 2}.$$

Значит, (*) является уравнением в полных дифференциалах.

Найдем общий интеграл уравнения (*) (а значит, и исходного уравнения) в областях (D_k) , $k = \overline{1, 2}$. Имеем

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x \tilde{M}(x, y) dx + \int_{y_0}^y \tilde{N}(x_0, y) dy = \\ &= \int_{x_0}^x \left(1 - \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x^2}\right) dx + \int_{y_0}^y \left(2\frac{y}{x_0} - \frac{1}{x_0}\right) dy = \\ &= \left(x + \frac{y^2}{x} - \frac{y}{x}\right) \Big|_{x=x_0}^{x=x} + \left(\frac{y^2}{x_0} - \frac{y}{x_0}\right) \Big|_{y=y_0}^{y=y} = \\ &= x + \frac{y^2}{x} - \frac{y}{x} - x_0 - \frac{y^2}{x_0} + \frac{y}{x_0} + \frac{y^2}{x_0} - \frac{y}{x_0} - \frac{y_0^2}{x_0} + \frac{y_0}{x_0} = \\ &= x + \frac{y^2}{x} - \frac{y}{x} + C_1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow x + \frac{y^2}{x} - \frac{y}{x} = C$ — общий интеграл заданного уравнения в областях (D_1) и (D_2) . ◀

Пример 23. Решить уравнение $(2x^2y^2 + y)dx + (x^3y - x)dy = 0$.

► Здесь $M(x, y) = 2x^2y^2 + y$; $N(x, y) = x^3y - x \Rightarrow M(x, y),$

$$N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2); \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 4x^2y + 1; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2y - 1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y},$$

$\frac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathbb{R}^2)$. $M(x, y), N(x, y)$ обращаются одновременно в нуль в

точке $(0, 0)$. Из уравнения видно непосредственно, что

$$\begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < 0; \end{cases} \begin{cases} y = 0, \\ -\infty < x < 0; \end{cases} \begin{cases} y = 0, \\ 0 < x < +\infty \end{cases} - \text{решения}$$

уравнения. Станем рассматривать исходное уравнение в областях:

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < 0; \end{cases} \quad (D_4) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < 0. \end{cases}$$

Имеем $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = x^2y + 2;$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega = \frac{(x^2y + 2)d\omega}{(x^3y - x) \frac{\partial \omega}{\partial x} - (2x^2y^2 + y) \frac{\partial \omega}{\partial y}}.$$

Если положить $\omega = xy$, то будет $\frac{\partial \omega}{\partial x} = y; \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = x;$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{(x^2y + 2)d\omega}{x^3y^2 - xy - 2x^3y^2 - xy} = \frac{(x^2y + 2)d\omega}{-xy(x^2y + 2)} = -\frac{d\omega}{\omega}.$$

Возьмем в качестве μ , например, функцию $\mu = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{xy}$ (у нас $x \neq 0$ и $y \neq 0$ в (D_k) , $k = \overline{1, 4}$). Умножаем обе части заданного уравнения

на $\mu = \frac{1}{xy}$. Получаем уравнение

$$\underbrace{\left(2xy + \frac{1}{x}\right)}_{=\tilde{M}(x,y)}dx + \underbrace{\left(x^2 - \frac{1}{y}\right)}_{=\tilde{N}(x,y)}dy = 0, \quad (*)$$

равносильное исходному в областях (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. Имеем $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = 2x$;
 $\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ в (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. Значит, $(*)$ является уравнением в полных дифференциалах в (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. Найдём общий интеграл уравнения $(*)$ (а значит, и исходного уравнения) в областях (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. Для этого берём произвольную точку (x_0, y_0) в (D_k) . Имеем

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x \tilde{M}(x, y) dx + \int_{y_0}^y \tilde{N}(x_0, y) dy = \\ &= \int_{x_0}^x \left(2xy + \frac{1}{x}\right) dx + \int_{y_0}^y \left(x_0^2 - \frac{1}{y}\right) dy = \\ &= \left(x^2 y + \ln|x|\right) \Big|_{x=x_0}^{x=x} + \left(x_0^2 y - \ln|y|\right) \Big|_{y=y_0}^{y=y} = \\ &= x^2 y + \ln|x| - x_0^2 y - \ln|x_0| + x_0^2 y - \ln|y| - x_0^2 y_0 + \\ &\quad + \ln|y_0| = x^2 y + \ln|x| - \ln|y| + C_1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow x^2 y + \ln|x| - \ln|y| = C$ — общий интеграл исходного уравнения в каждой из областей (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. ◀

Пример 24. Решить уравнение $(2x^2 y^3 - 1)y dx + (4x^2 y^3 - 1)x dy = 0$.

► Здесь $M(x, y) = (2x^2 y^3 - 1)y$; $N(x, y) = (4x^2 y^3 - 1)x \Rightarrow$
 $M(x, y), N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$. $\frac{\partial M}{\partial y} = 8x^2 y^3 - 1$; $\frac{\partial N}{\partial x} = 12x^2 y^3 - 1 \Rightarrow$
 $\frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathbb{R}^2)$. $M(x, y), N(x, y)$ обращаются одновременно в

нуль в точке $(0, 0)$. Из заданного уравнения видно непосредственно, что

$$\begin{cases} y = 0, \\ -\infty < x < 0; \end{cases} \begin{cases} y = 0, \\ 0 < x < +\infty; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < 0 \end{cases}$$

— решения уравнения. Станем рассматривать исходное уравнение в областях

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < 0; \end{cases} \quad (D_4) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < 0. \end{cases}$$

Имеем $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -4x^2y^3$;

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega = \frac{-4x^2y^3 d\omega}{(4x^3y^3 - x) \frac{\partial \omega}{\partial x} - (2x^2y^4 - y) \frac{\partial \omega}{\partial y}}.$$

Если положить $\omega = xy$, то будет $\frac{\partial \omega}{\partial x} = y$; $\frac{\partial \omega}{\partial y} = x$;

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{-4x^2y^3 d\omega}{4x^3y^4 - xy - 2x^3y^4 + xy} \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2d\omega}{\omega}.$$

Возьмем в качестве μ , например, функцию $\mu = \frac{1}{\omega^2} \Rightarrow \mu = \frac{1}{(xy)^2}$ (у

нас $x \neq 0$ и $y \neq 0$ в областях (D_k) , $k = \overline{1, 4}$). Умножим обе части

заданного уравнения на $\mu = \frac{1}{x^2y^2}$. Получим уравнение

$$\underbrace{\left(2y^2 - \frac{1}{x^2y}\right)}_{=\tilde{M}(x,y)} dx + \underbrace{\left(4xy - \frac{1}{xy^2}\right)}_{=\tilde{N}(x,y)} dy = 0, \quad (*)$$

равносильное исходному уравнению в областях (D_k) , $k = \overline{1, 4}$.

Имеем $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = 4y + \frac{1}{x^2 y^2}$; $\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = 4y + \frac{1}{x^2 y^2} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ в (D_k) ,

$k = \overline{1, 4}$. Значит, (*) является уравнением в полных дифференциалах в (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. Найдём общий интеграл уравнения (*) (а следовательно, и исходного уравнения) в областях (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. Имеем

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x \tilde{M}(x, y) dx + \int_{y_0}^y \tilde{N}(x_0, y) dy = \\ &= \int_{x_0}^x \left(2y^2 - \frac{1}{x^2 y} \right) dx + \int_{y_0}^y \left(4x_0 y - \frac{1}{x_0 y^2} \right) dy = \\ &= \left(2y^2 x + \frac{1}{xy} \right) \Big|_{x=x_0}^{x=x} + \left(2x_0 y^2 + \frac{1}{x_0 y} \right) \Big|_{y=y_0}^{y=y} = \\ &= 2xy^2 + \frac{1}{xy} - 2x_0 y^2 - \frac{1}{x_0 y} + 2x_0 y_0^2 + \frac{1}{x_0 y_0} - 2x_0 y_0^2 - \frac{1}{x_0 y_0} = \\ &= 2xy^2 + \frac{1}{xy} + C_1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow 2xy^2 + \frac{1}{xy} = C$ — общий интеграл исходного уравнения в областях (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. ◀

§9. Уравнения с разделяющимися переменными

Так называются уравнения вида

$$\underbrace{f_1(x)g_1(y)}_{=M(x,y)} dx + \underbrace{f_2(x)g_2(y)}_{=N(x,y)} dy = 0. \quad (1)$$

Предполагается, что функции $f_1(x), f_2(x) \in C(a, b)$, (a, b) лежит на оси Ox , а функции $g_1(y), g_2(y) \in C(c, d)$, (c, d) лежит на оси Oy

$\Rightarrow M(x, y) = f_1(x)g_1(y)$; $N(x, y) = f_2(x)g_2(y) \in C(D)$, где $(D) = (a, b) \times (c, d)$. Пусть $x = x_i$, $i = \overline{1, m}$ — вещественные корни уравнения $f_2(x) = 0$, а $y = y_j$, $j = \overline{1, n}$ — вещественные корни уравнения $g_1(y) = 0$. Непосредственно из уравнения (1) видно, что $x = x_i$ ($y \neq y_j$, $j = \overline{1, n}$), $i = \overline{1, m}$, а также $y = y_j$ ($x \neq x_i$, $i = \overline{1, m}$), $j = \overline{1, n}$, являются решениями уравнения (1). Отметим, что в областях

$$(D_{ij}) = \begin{cases} x_i < x < x_{i+1}, \\ y_j < y < y_{j+1}, \end{cases} \quad i = \overline{0, m}, \quad j = \overline{0, n}, \quad x_0 = a, \quad x_{m+1} = b, \quad y_0 = c, \quad y_{n+1} = d,$$

$f_2(x) \neq 0$ и $g_1(y) \neq 0$. Точки (x_i, y_j) , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, — особые точки уравнения (1).

Рассмотрим функцию $\mu(x, y) = \frac{1}{f_2(x)g_1(y)}$; эта функция определена и непрерывна в каждой из областей (D_{ij}) , $i = \overline{0, m}$, $j = \overline{0, n}$.

Покажем, что $\mu(x, y)$ является интегрирующим множителем для уравнения (1) в каждой из областей (D_{ij}) . Действительно, умножив обе части уравнения (1) на $\mu(x, y) = \frac{1}{f_2(x)g_1(y)}$, получаем

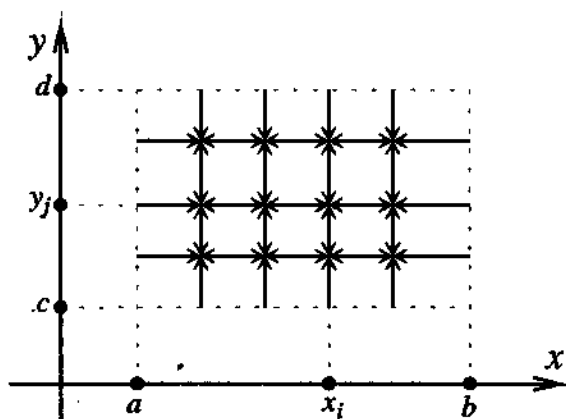


Рис. 1.19. К уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = 0. \quad (2)$$

Отметим, что уравнение (2) равносильно уравнению (1) в каждой (D_y) и что (2) — уравнение с разделенными переменными, а следовательно, (2) — уравнение в полных дифференциалах.

Найдем общий интеграл уравнения (2) (а значит, и уравнения (1)) в каждой из областей (D_y) . Для этого берем произвольную

точку $(x_0, y_0) \in (D_y)$. Будем иметь $u(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx +$
 $+ \int_{y_0}^y \frac{g_1(y)}{g_2(y)} dy \Rightarrow u(x, y) = C$ — общий интеграл в (D_y) .

Пример. Решить уравнение $(x^2 - 1)dy + 2xy^2dx = 0$.

► Непосредственно из уравнения видим, что $\begin{cases} y = 0, \\ -\infty < x < -1; \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 0, \\ -1 < x < 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ 1 < x < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ -\infty < y < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ -\infty < y < 0 \end{cases} \text{ — решения заданного уравнения. Точки } (-1, 0) \text{ и}$$

$(1, 0)$ — особые точки уравнения. Станем рассматривать заданное уравнение в областях:

$$(D_1) = \begin{cases} 1 < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -1 < x < 1, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_3) = \begin{cases} -\infty < x < -1, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$$

$$(D_4) = \begin{cases} -\infty < x < -1, \\ -\infty < y < 0; \end{cases} \quad (D_5) = \begin{cases} -1 < x < 1, \\ -\infty < y < 0; \end{cases} \quad (D_6) = \begin{cases} 1 < x < +\infty, \\ -\infty < y < 0. \end{cases}$$

Каждая из областей (D_k) ($k = \overline{1, 6}$) — область единственности для

заданного уравнения. Рассмотрим функцию $\mu(x, y) = \frac{1}{y^2(x^2 - 1)}$.

Она определена и непрерывна в каждой (D_k) , $k = \overline{1, 6}$, и является интегрирующим множителем для исходного уравнения в (D_k) , $k = \overline{1, 6}$. Действительно, умножив обе части заданного уравнения на $\mu(x, y)$, получаем: $\frac{2xdx}{x^2-1} + \frac{dy}{y^2} = 0$ — уравнение в полных дифференциалах. Полученное уравнение равносильно исходному в областях (D_k) , $k = \overline{1, 6}$.

Найдем общий интеграл полученного (а значит, и исходного уравнения) в (D_k) , $k = \overline{1, 6}$. Для этого берем произвольную точку $(x_0, y_0) \in (D_k)$. Будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x \frac{2xdx}{x^2-1} + \int_{y_0}^y \frac{dy}{y^2} = \ln|x^2-1| \Big|_{x=x_0}^{x=x} - \frac{1}{y} \Big|_{y=y_0}^{y=y} = \\ &= \ln|x^2-1| - \frac{1}{y} - \underbrace{\ln|x_0^2-1| + \frac{1}{y_0}}_{-C_1(\text{const})} = \ln|x^2-1| - \frac{1}{y} + C_1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow \ln|x^2-1| - \frac{1}{y} = C$ — общий интеграл уравнения в (D_k) , $k = \overline{1, 6}$. ◀

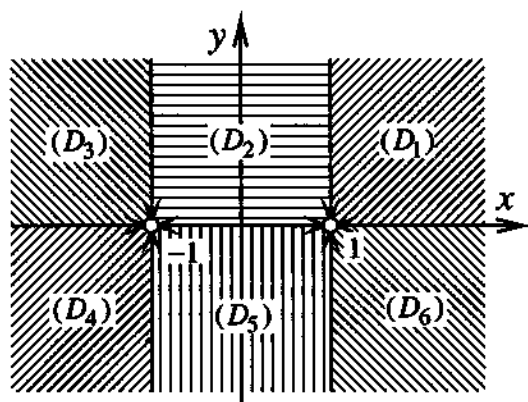


Рис. 1.20. К примеру

§10. Линейные уравнения первого порядка

Так называются уравнения вида

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (1)$$

(в (1) y и y' входят в первой степени и не перемножаются). Считаем, что функции $p(x)$ и $q(x)$ определены и непрерывны в промежутке (a, b) . Запишем уравнение (1) в виде, разрешенном относительно y' :

$$y' = - \underbrace{p(x)y + q(x)}_{=f(x,y) \text{ (обознач.)}}. \quad (1')$$

Ясно, что $f(x, y) \in C(D)$, где $(D) = \begin{cases} a < x < b, \\ -\infty < y < +\infty. \end{cases}$ Имеем далее

$f'_y(x, y) = -p(x) \Rightarrow f'_y(x, y) \in C(D)$. Значит, (D) — область единственности уравнения (1') (а следовательно, и уравнения (1)).

Вывод: через каждую точку $(x_0, y_0) \in (D)$ проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (1).

Существует несколько методов решения линейного уравнения.

1°. Метод интегрирующего множителя. Покажем, что функция

$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$ является интегрирующим множителем для уравнения (1). Для этого перепишем уравнение (1) в виде

$$[p(x)y - q(x)] dx + dy = 0. \quad (1'')$$

Умножим обе части уравнения (1'') на $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$. Получим

$$\underbrace{e^{\int p(x) dx} (p(x)y - q(x)) dx}_{= \tilde{M}(x,y)} + \underbrace{e^{\int p(x) dx} dy}_{= \tilde{N}(x,y)} = 0. \quad (2)$$

Имеем $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = p(x) e^{\int p(x) dx}$; $\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = e^{\int p(x) dx} \cdot p(x) \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ в (D) .

Следовательно, (2) — уравнение в полных дифференциалах.

Так как уравнение (2) равносильно уравнению (1), то, найдя общий интеграл уравнения (2) в (D) , мы найдем тем самым общий интеграл исходного уравнения (1).

Замечание. Формула для общего решения уравнения (1) может быть получена следующим образом. Умножаем обе части уравнения (1) на $\mu = e^{\int p(x) dx}$. Получаем

$$(y' + p(x)y) e^{\int p(x) dx} = q(x) e^{\int p(x) dx}. \quad (3)$$

Легко видеть, что уравнение (3) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(y e^{\int p(x) dx} \right) &= q(x) e^{\int p(x) dx} \Rightarrow y e^{\int p(x) dx} = \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= e^{-\int p(x) dx} \left(C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right). \end{aligned} \quad (4)$$

2°. Метод Бернулли. Метод Бернулли нахождения решения линейного уравнения (1) состоит в следующем: ищем решение $y(x)$ уравнения (1) в виде произведения двух функций, а именно, в виде

$$y = u(x)v(x). \quad (5)$$

Имеем $y'_x = u'_x v + u v'_x$. Поэтому уравнение (1) запишется так:

$$u'_x v + u v'_x + p(x) u v = q(x) \Rightarrow u'_x v + u (v'_x + p(x) v) = q(x). \quad (6)$$

В качестве функции $v(x)$ берем одно из решений уравнения: $v'_x + p(x)v = 0$, например,

$$v(x) = e^{-\int p(x) dx}. \quad (7)$$

При таком выборе функции $v(x)$ уравнение (6) примет вид:

$$\begin{aligned} u'_x v &= q(x), \text{ т. е. } e^{-\int p(x) dx} \frac{du}{dx} = q(x) \Rightarrow du = q(x) e^{\int p(x) dx} dx \Rightarrow \\ u &= \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C, \text{ где } C \text{ — произвольная постоянная. А тогда} \end{aligned}$$

$$y = u(x)v(x) = e^{-\int p(x) dx} \left(C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right).$$

Видим, что для решения $y(x)$ уравнения (1) снова получена формула (4).

3°. Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа). Уравнение (1), в котором $q(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$, называется *линейным неоднородным*. Уравнение

$$y' + p(x)y = 0 \quad (8)$$

условимся называть линейным однородным, соответствующим линейному неоднородному уравнению (1). Рассмотрим сначала уравнение (8). Оно является уравнением с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0 \Rightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad (9)$$

где C — произвольная постоянная.

Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной) состоит в том, что решение линейного неоднородного уравнения (1) ищется в форме, аналогичной форме (9), а именно:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}, \quad (10)$$

где $C(x)$ уже не постоянная, а искомая функция от x . Из (10) находим

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}. \quad (11)$$

Подставив выражения для y и y' из (10) и (11) в уравнение (1), получим

$$\begin{aligned} \underbrace{C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}}_{=y'} + p(x) \underbrace{C(x)e^{-\int p(x)dx}}_{=y} &= q(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow C'(x)e^{-\int p(x)dx} &= q(x) \Rightarrow C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow \\ \Rightarrow C(x) &= \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C. \end{aligned}$$

Окончательно, согласно равенству (10) для y , получаем

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right).$$

Видим, что и здесь для решения $y(x)$ уравнения (1) получена формула (4).

Пример 1. Решить уравнение $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$.

► Заданное уравнение — линейное; y и y' входят в уравнение в первой степени и не перемножаются. Здесь $p(x) = \cos x$; $q(x) = e^{-\sin x} \Rightarrow p(x), q(x) \in C(-\infty, +\infty)$. Найдем решения этого уравнения всеми тремя методами.

1. (Метод интегрирующего множителя.) $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \cos x dx} = e^{\sin x}$ — интегрирующий множитель для заданного

уравнения. Умножаем обе части исходного уравнения на $\mu(x) = e^{\sin x}$. Так как $\mu(x) \neq 0$, то получаем равносильное уравнение $(y' + y \cos x)e^{\sin x} = 1$ или $\frac{d}{dx}(ye^{\sin x}) = 1 \Rightarrow ye^{\sin x} = x + C \Rightarrow ye^{\sin x} - x = C$ — общий интеграл заданного уравнения на $(\mathbb{R}^2)$.

2. (Метод Бернулли.) Станем искать решение заданного уравнения в виде

$$y = u(x)v(x).$$

Имеем $y' = u'v + uv'$. Поэтому исходное уравнение запишется так:

$$u'v + u(v' + v \cos x) = e^{-\sin x}.$$

В качестве функции $v(x)$ берем одно из решений уравнения

$$v' + v \cos x = 0 \Rightarrow v(x) = e^{-\sin x}.$$

При таком выборе функции $v(x)$ для определения функции $u(x)$ получаем $u'e^{-\sin x} = e^{-\sin x} \Rightarrow u' = 1 \Rightarrow u = x + C$. А тогда $y = u(x)v(x) = (x + C)e^{-\sin x} \Rightarrow ye^{\sin x} - x = C$.

3. (Метод Лагранжа.) Ищем сначала решения линейного однородного уравнения, соответствующего заданному неоднородному, а именно: уравнения $y' + y \cos x = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\cos x \Rightarrow$

$y = Ce^{-\sin x}$, где C — произвольная постоянная. Решение исходного уравнения ищем в виде

$$y = C(x)e^{-\sin x}, \quad (*)$$

где $C(x)$ — неизвестная функция, которую нужно найти. Мы хотим, чтобы (*) была решением заданного уравнения. Но тогда должно быть

$$C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x} \cos x + C(x)e^{-\sin x} \cos x = e^{-\sin x} \Rightarrow C'(x) = 1 \Rightarrow C(x) = x + \tilde{C}, \text{ где } \tilde{C} \text{ — произвольная постоянная.}$$

Подставляя это выражение для $C(x)$ в (*), получаем $y = (x + \tilde{C})e^{-\sin x} \Rightarrow ye^{\sin x} - x = \tilde{C}$ — общий интеграл заданного уравнения. ◀

Замечание 2. Некоторые дифференциальные уравнения первого порядка оказываются линейными, если считать y аргументом, а $x(y)$ неизвестной функцией.

Пример 2. Решить уравнение $(2x + y)dy = ydx + 4 \ln y dy$.

► Отметим сразу, что заданное уравнение определено лишь в открытой верхней полуплоскости, так как должно быть $y > 0$. Видим, что уравнение не является линейным, если считать x аргументом, а $y(x)$ неизвестной функцией.

Если же считать y аргументом, а $x(y)$ неизвестной функцией, то заданное уравнение оказывается линейным. Действительно, имеем

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = 1 - 4 \frac{\ln y}{y} \quad (*)$$

(в $(*)$ x и x'_y входят в первой степени). Это уравнение равносильно исходному, ибо делить на y можно (y нас $y > 0$). В этом уравнении

$\tilde{p}(y) = -\frac{2}{y}$; $\tilde{q}(y) = 1 - 4 \frac{\ln y}{y}$. Станем решать полученное уравнение

методом интегрирующего множителя. Имеем

$\mu(y) = e^{\int \tilde{p}(y) dy} = e^{\int -\frac{2}{y} dy} = e^{-2 \ln y} = \frac{1}{y^2}$. Умножаем обе части $(*)$ на

$\mu = \frac{1}{y^2}$. Получим равносильное уравнение

$$\frac{1}{y^2} x'_y - \frac{2}{y^3} x = \frac{1}{y^2} - 4 \frac{\ln y}{y^3},$$

или

$$\left(\frac{x}{y^2} \right)'_y = \frac{1}{y^2} - 4 \frac{\ln y}{y^3} \Rightarrow \frac{x}{y^2} = \int \left(\frac{1}{y^2} - 4 \frac{\ln y}{y^3} \right) dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y^2} = -\frac{1}{y} - 4 \int \frac{\ln y}{y^3} dy = \left[\begin{array}{l} \ln y = u \Rightarrow du = \frac{dy}{y} \\ dv = \frac{dy}{y^3} \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y^2} \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{1}{y} - 4 \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y^2} \ln y + \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^3} \right) \Rightarrow \frac{x}{y^2} = -\frac{1}{y} + \frac{2}{y^2} \ln y + \frac{1}{y^2} + C \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = Cy^2 + 2 \ln y - y + 1$ — общее решение исходного уравнения. ◀

§11. Уравнение Бернулли

Так называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^m, \quad (1)$$

где $m \neq 0$ и $m \neq 1$, так как при $m = 0$ уравнение (1) — линейное, а при $m = 1$ уравнение (1) — линейное, и с разделяющимися переменными. В (1) $p(x)$ и $q(x)$ — известные функции, определенные и непрерывные в некотором промежутке (a, b) .

Разделим обе части уравнения (1) на y^m . Получим

$$y^{-m}y' + p(x)y^{1-m} = q(x). \quad (2)$$

(При переходе от уравнения (1) к уравнению (2) мы делили обе части (1) на y^m . Следовательно, если $m > 0$, то мы могли потерять решение $y = 0$.)

В уравнении (2) делаем замену $y^{1-m} = z$ ($z(x)$ — новая неизвестная функция) $\Rightarrow z'_x = (1-m)y^{-m}y'_x \Rightarrow y^{-m}y'_x = \frac{z'_x}{1-m}$ (у нас $m \neq 1$). Относительно новой неизвестной функции $z(x)$ уравнение (2) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{z'_x}{1-m} + p(x)z = q(x) \quad \text{или} \quad z'_x + (1-m)p(x)z = (1-m)q(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow z'_x + \tilde{p}(x)z = \tilde{q}(x). \end{aligned} \quad (3)$$

(Здесь положено $\tilde{p}(x) = (1-m)p(x)$; $\tilde{q}(x) = (1-m)q(x)$.) Видим, что (3) — линейное уравнение относительно функции $z(x)$. Решая уравнение (3) и подставляя затем y^{1-m} вместо z , получим решение исходного уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $y' + 2y = y^2 e^x$.

► Заданное уравнение является уравнением Бернулли. Здесь $p(x) = 2$; $q(x) = e^x$; $m = 2 (> 0)$. Непосредственно из уравнения видно, что $y = 0$ — решение уравнения. Станем рассматривать исходное уравнение в открытых верхней и нижней полуплоскостях, т. е. при $y > 0$ и при $y < 0$. В этих полуплоскостях заданное уравнение равносильно уравнению, полученному из него делением обеих его частей на y^2 , а именно:

$$y'y^{-2} + \frac{2}{y} = e^x. \quad (*)$$

Делаем замену: $\frac{1}{y} = z \Rightarrow z'_x = -\frac{1}{y^2} y'_x \Rightarrow y'_x y^{-2} = -z'_x$. Относительно новой неизвестной функции уравнение (*) примет вид $-z'_x + 2z = e^x \Rightarrow z'_x - 2z = -e^x$. Это — линейное уравнение. Найдем решение его методом Бернулли. Положим $z(x) = u(x)v(x) \Rightarrow z'_x = u'_x v + uv'_x$. Будем иметь $u'_x v + u(v'_x - 2v) = -e^x$. В качестве функции $v(x)$ берем одно из решений уравнения $v'_x - 2v = 0 \Rightarrow v = e^{2x}$. При таком выборе функции $v(x)$ для определения функции $u(x)$ получаем уравнение: $u'_x e^{2x} = -e^x \Rightarrow u'_x = -e^{-x} \Rightarrow u(x) = e^{-x} + C$. А тогда

$$z(x) = u(x)v(x) = e^{2x}(e^{-x} + C) \Rightarrow z(x) = e^x + Ce^{2x}.$$

Вспоминаем, что у нас $z = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{z}$ и, следовательно,

$y = \frac{1}{e^x + Ce^{2x}} \Rightarrow y(e^x + Ce^{2x}) = 1$ — общее решение исходного уравнения в верхней и нижней открытых полуплоскостях. ◀

Замечание. Решения уравнения Бернулли можно искать в виде $y(x) = u(x)v(x)$, не приводя его к линейному уравнению.

Пример 2. Решить уравнение

$$y' - y \operatorname{tg} x = y^4 \cos x.$$

► Заданное уравнение не определено на линиях:

$$\begin{cases} x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, & k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ -\infty < y < +\infty, \end{cases}$$

Непосредственно из уравнения видим, что

$$\begin{cases} y = 0, \\ (2k-1)\frac{\pi}{2} < x < (2k+1)\frac{\pi}{2}, & k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

— решения исходного уравнения. Станем рассматривать наше уравнение в областях:

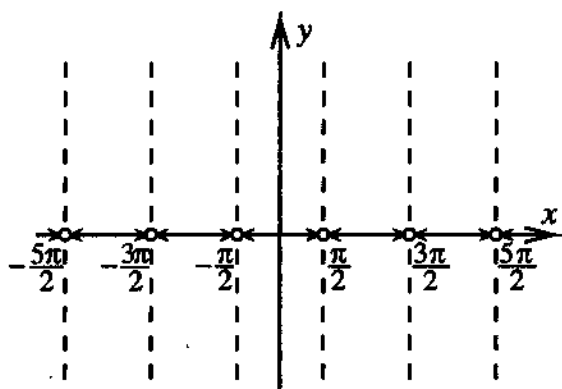


Рис. 1.21. К примеру 2

$$(D_k) = \begin{cases} (2k-1)\frac{\pi}{2} < x < (2k+1)\frac{\pi}{2}, & k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0 < y < +\infty, \end{cases}$$

и

$$(\tilde{D}_k) = \begin{cases} (2k-1)\frac{\pi}{2} < x < (2k+1)\frac{\pi}{2}, & k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ -\infty < y < 0, \end{cases}$$

Положим в исходном уравнении $y = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow y'_x = u'_x v + u v'_x$. Будем иметь

$$u'_x v + u(v'_x - v \operatorname{tg} x) = u^4 v^4 \cos x.$$

В качестве функции $v(x)$ берем одно из решений уравнения

$$v'_x - v \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow v = \frac{1}{\cos x}.$$

При таком выборе функции $v(x)$ для

определения функции $u(x)$ получаем уравнение

$$\begin{aligned} u'_x \frac{1}{\cos x} &= u^4 \frac{\cos x}{\cos^4 x} \Rightarrow u'_x = \frac{u^4}{\cos^2 x} \Rightarrow u^{-4} u'_x = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{3} u^{-3} \right)'_x &= \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow -\frac{1}{3} \frac{1}{u^3} = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3} C \Rightarrow \frac{1}{u^3} = C - 3 \operatorname{tg} x \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{u^3 v^3} &= C \cos^3 x - 3 \sin x \cos^2 x \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{1}{y^3} = C \cos^3 x - 3 \sin x \cos^2 x$ — общее решение исходного уравнения в (D_k) и $(\tilde{D}_k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. ◀

Замечание. Уравнение вида $y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x)$ называется *уравнением Риккати*. Это уравнение в общем случае не решается в квадратурах. Однако, если удастся найти какое-нибудь его частное решение $y = y_1(x)$, то заменой $y = y_1 + z$ ($z(x)$ — новая неизвестная функция) уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли.

► Действительно, пусть $y = y_1(x)$ — какое-нибудь частное решение уравнения Риккати. Тогда $y_1'(x) + p(x)y_1(x) + q(x)y_1^2(x) \equiv r(x)$. Делаем замену $y = y_1 + z$. Получаем

$$\begin{aligned} y_1' + p(x)y_1 + z' + p(x)z + q(x)(y_1^2 + 2y_1z + z^2) &= r(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \underbrace{y_1' + p(x)y_1 + q(x)y_1^2}_{=r(x)} + z' + (p(x) + 2y_1q(x))z + q(x)z^2 &\equiv r(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow z' + \tilde{p}(x)z &= \tilde{q}(x)z^2. \end{aligned}$$

А это — уравнение Бернулли относительно неизвестной функции $z(x)$. Здесь положено $\tilde{p}(x) = p(x) + 2y_1(x)q(x)$ — известная функция; $\tilde{q}(x) = -q(x)$. ◀

В задачах 3–7, найдя путем подбора частное решение $y = y_1(x)$, привести заданные уравнения Риккати к уравнениям Бернулли и решить их.

Задача 3. Дано уравнение $x^2 dy + (xy + x^2 y^2 - 4) dx = 0$.

► Здесь $M(x, y) = xy + x^2 y^2 - 4$; $N(x, y) = x^2 \Rightarrow M, N \in C(\mathbb{R}^2)$;

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x + 2x^2 y; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathbb{R}^2). \quad M(x, y) \text{ и } N(x, y)$$

не обращаются одновременно в нуль ни в одной точке. Из заданного уравнения видно непосредственно, что $x = 0$ — решение этого уравнения. Станем рассматривать исходное уравнение для $x \neq 0$, т. е. в левой и правой открытых полуплоскостях:

$$(D_1) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < +\infty. \end{cases} \quad \text{В областях } (D_k),$$

$k = 1, 2$, заданное уравнение равносильно уравнению

$$y' + \frac{1}{x}y + y^2 = \frac{4}{x^2}. \quad (*)$$

Попытаемся искать частное решение $y = y_1(x)$ уравнения (*)

в виде $y(x) = \frac{a}{x}$, где a — постоянное число, пока неизвестное.

Подставляя это выражение для $y(x)$ в уравнение (*), получаем

$$-\frac{a}{x^2} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^2} = \frac{4}{x^2} \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2.$$

Следовательно, функция $y_1(x) = \frac{2}{x}$ (а также функция $\tilde{y}_1 = -\frac{2}{x}$) является частным решением уравнения (*).

Делаем замену: $y = z + \frac{2}{x}$. Получаем

$$z' - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}z + \frac{2}{x^2} + \left(z^2 + \frac{4}{x}z + \frac{4}{x^2}\right) = \frac{4}{x^2} \Rightarrow z' + \frac{5}{x}z = -z^2$$

— уравнение Бернулли. Положим $z = u(x)v(x) \Rightarrow z' = u'v + uv'$.

Будем иметь $u'v = u\left(v' + \frac{5}{x}v\right) = -u^2v^2$. В качестве функции $v(x)$

берем одно из решений уравнения $v' + \frac{5}{x}v = 0 \Rightarrow v = \frac{1}{x^5}$. При таком выборе функции $v(x)$ для определения функции $u(x)$ получаем уравнение

$$u' \frac{1}{x^5} = -u^2 \frac{1}{x^{10}} \Rightarrow -\frac{u'}{u^2} = \frac{1}{x^5} \Rightarrow \frac{1}{u} = -\frac{1}{4x^4} + \frac{C}{4} \Rightarrow u = \frac{4x^4}{Cx^4 - 1}.$$

А тогда $z = uv = \frac{4}{Cx^5 - x}$. Следовательно, $y = \frac{2}{x} + \frac{4}{Cx^5 - x}$ в областях (D_1) и (D_2) ($x \neq 0$ в $(D_1) \cup (D_2)$). ◀

Задача 4. Решить уравнение $(x^2y^2 + 2)dx + 3x^2dy = 0$.

► Здесь $M(x, y) = x^2y^2 + 2$; $N(x, y) = 3x^2 \Rightarrow M(x, y),$

$$N(x, y) \in C(R^2); \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2x^2y; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 6x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(R^2).$$

$M(x, y)$ и $N(x, y)$ не обращаются в нуль одновременно ни в одной точке плоскости x, y . Из заданного уравнения видно непосредственно, что $x = 0$ — решение этого уравнения. Станем рассматривать наше уравнение для $x \neq 0$, т. е. в левой и правой открытых

полуплоскостях: $(D_1) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < +\infty. \end{cases}$ В об-

ластях (D_1) и (D_2) исходное уравнение равносильно уравнению

$$y' + \frac{1}{3}y^2 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2} \quad (*)$$

(это — уравнение Риккати). Попытаемся найти частное решение уравнения (*) в виде $y = \frac{a}{x}$. Подставляя это выражение для $y(x)$ в уравнение (*), получаем

$$-\frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{3} \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{a^2}{3} - a = -\frac{2}{3} \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 2.$$

Следовательно, функции $y_1 = \frac{1}{x}$ и $y_2 = \frac{2}{x}$ являются частными решениями уравнения (*).

Делаем замену: $y = z + \frac{1}{x}$. Получаем

$$z' - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} \left(z^2 + 2 \frac{z}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2} \Rightarrow z' + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} z = -\frac{1}{3} z^2$$

(это — уравнение Бернулли). Полагаем $z(x) = u(x)v(x) \Rightarrow$

$z'_x = u'_x v + u v'_x$. Будем иметь $u'_x v + u \left(v'_x + \frac{2}{3} \frac{1}{x} v \right) = -\frac{1}{3} u^2 v^2$. В качестве функции $v(x)$ берем одно из решений уравнения $v'_x + \frac{2}{3} \frac{1}{x} v = 0 \Rightarrow v(x) = x^{-\frac{2}{3}}$. При таком выборе функции $v(x)$ для определения функции $u(x)$ получаем уравнение

$$u'_x x^{-\frac{2}{3}} = -\frac{1}{3} u^2 x^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow \frac{1}{u} = x^{\frac{1}{3}} + C \Rightarrow u = \frac{1}{x^{1/3} + C}.$$

А тогда $z = uv = \frac{1}{Cx^{2/3} + x}$. Следовательно, $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{Cx^{2/3} + x}$ — общее решение исходного уравнения в областях (D_1) и (D_2) . (У нас $x \neq 0$ в $(D_1) \cup (D_2)$.) ◀

Задача 5. Решить уравнение $xdy + (-(2x+1)y + y^2 + x^2)dx = 0$.

► Здесь $M(x, y) = -(2x+1)y + y^2 + x^2$; $N(x, y) = x \Rightarrow M(x, y)$,

$$N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2); \frac{\partial M}{\partial y} = -(2x+1) + 2y; \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathbb{R}^2).$$

$M(x, y)$ и $N(x, y)$ обращаются одновременно в нуль в точках $(0, 0)$ и $(0, 1)$. Из уравнения видно непосредственно, что

$$\begin{cases} x = 0, \\ 1 < y < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 0, \\ -\infty < y < 0 \end{cases} \text{ — решения уравнения.}$$

Станем рассматривать наше уравнение для $x \neq 0$, т. е. в областях

$$(D_1) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < +\infty. \end{cases} \text{ В областях } (D_1) \text{ и } (D_2)$$

исходное уравнение равносильно уравнению

$$y' - \frac{2x+1}{x}y + \frac{1}{x}y^2 = -x \quad (*)$$

(это — уравнение Риккати). Будем искать частное решение уравнения (*) в виде $y = ax + b$. Подставляя это выражение для $y(x)$ в уравнение (*), получаем

$$\begin{aligned} a - \frac{2x+1}{x}(ax+b) + \frac{1}{x}(ax+b)^2 &= -x \Rightarrow \\ \Rightarrow ax - (2x+1)(ax+b) + (ax+b)^2 &= -x^2. \end{aligned}$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества.

$$\begin{array}{l|l} x^2 & a^2 - 2a = -1 \\ x & 2ab - 2b = 0 \\ x^0 & b^2 - b = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 1, \quad b = 0; \\ a = 1, \quad b = 1. \end{array}$$

Следовательно, функции $y_1 = x$ и $\tilde{y}_1 = x + 1$ являются частными решениями уравнения (*).

Делаем замену: $y = z + x$. Получаем

$$z' + 1 - \frac{2x+1}{x}(z+x) + \frac{1}{x}(z^2 + 2zx + x^2) = -x \Rightarrow z' - \frac{z}{x} = -\frac{z^2}{x}$$

(это — уравнение Бернулли). Полагаем $z(x) = u(x)v(x) \Rightarrow$

$z' = u'v + uv'$. Будем иметь $u'v + \left(v' - \frac{v}{x}\right)u = -\frac{u^2v^2}{x}$. В качестве функ-

кции $v(x)$ берем одно из решений уравнения $v' - \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow v(x) = x$.

При таком выборе функции $v(x)$ для определения функции $u(x)$

получаем уравнение $u'x = -u^2x \Rightarrow u' = -u^2 \Rightarrow u(x) = \frac{1}{x+C}$. А тог-

да $z = u(x)v(x) = \frac{x}{x+C}$. Следовательно, $y = x + \frac{x}{x+C}$ — общее ре-

шение исходного уравнения в областях (D_1) и (D_2) . ◀

Задача 6. Решить уравнение $(x^2 + y^2 - 2xy - 5)dx + dy = 0$.

► Здесь $M(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy - 5$; $N(x, y) = 1 \Rightarrow M(x, y)$,

$N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$; $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y - 2x$; $\frac{\partial N}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathbb{R}^2)$.

$M(x, y)$ и $N(x, y)$ не обращаются одновременно в нуль ни в одной точке плоскости x, y .

Запишем исходное уравнение в виде

$$y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2. \quad (*)$$

Попытаемся искать частное решение уравнения (*) в виде $y = ax + b$. Подставляя это выражение для $y(x)$ в уравнение (*), получаем

$$a - 2x(ax + b) + (ax + b)^2 = 5 - x^2.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества.

$$\begin{array}{l|l} x^2 & a^2 - 2a = -1 \\ x & 2ab - 2b = 0 \\ x^0 & b^2 + a = 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 1, \quad b = 2; \\ a = 1, \quad b = -2. \end{array}$$

Следовательно, функции $y_1(x) = x + 2$ и $\bar{y}_1 = x - 2$ являются частными решениями уравнения (*).

Делаем замену: $y = z + (x + 2)$. Получаем

$$z' + 1 - 2x(z + x + 2) + (z + x + 2)^2 = 5 - x^2 \Rightarrow z' + 4z = -z^2$$

(это — уравнение Бернулли). Полагаем $z = u(x)v(x) \Rightarrow z' = u'v + uv'$. Будем иметь $u'v + u(v' + 4v) = -u^2v^2$. В качестве функции $v(x)$ берем одно из решений уравнения $v' + 4v = 0 \Rightarrow v(x) = e^{-4x}$. При таком выборе функции $v(x)$ для определения функции $u(x)$ получаем уравнение

$$u'e^{-4x} = -u^2e^{-8x} \Rightarrow u' = -u^2e^{-4x} \Rightarrow \frac{1}{u} = -\frac{e^{-4x}}{4} + \frac{C}{4} \Rightarrow u = \frac{4}{C - e^{-4x}}.$$

А тогда $y = x + 2 + \frac{4}{Ce^{4x} - 1}$ — общее решение исходного уравнения на $\mathbb{R}^2$. ◀

Задача 7. Решить уравнение

$$y' + 2e^x y - y^2 = e^{2x} + e^x. \quad (*)$$

► Запишем исходное уравнение в виде разрешенном относительно y' :

$$y' = \underbrace{y^2 - 2e^x y + e^{2x} + e^x}_{=f(x,y)}.$$

Имеем $f'_y(x, y) = 2y - 2e^x$. Видим, что $f(x, y)$ и $f'_y(x, y) \in C(\mathbb{R}^2) \Rightarrow$ множеством точек единственности уравнения является вся плоскость x, y . Видим далее, что заданное уравнение — уравнение Риккати. Попытаемся искать частное решение уравнения (*) в виде $y = ae^x$. Подставляя это выражение для $y(x)$ в уравнение (*), получаем $ae^x + 2ae^{2x} - a^2e^{2x} \equiv e^{2x} + e^x$. Приравниваем коэффициенты при e^x и e^{2x} в левой и правой частях полученного тождества:

$$\begin{array}{l|l} e^x & a = 1 \\ e^{2x} & 2a - a^2 = 1 \end{array} \Rightarrow a = 1.$$

Следовательно, функция $y_1 = e^x$ является частным решением уравнения (*).

Делаем замену: $y = z + e^x$. Получаем вместо (*) уравнение

$$z' = z^2 \Rightarrow -\frac{1}{z} = x + C \Rightarrow z = -\frac{1}{x + C}.$$

Следовательно, $y = e^x - \frac{1}{x + C}$ — общее решение исходного уравнения на всей плоскости x, y . ◀

§12. Однородные уравнения

1°. Определение. Функция $u = f(x, y)$, заданная в некоторой области (D) , называется *однородной функцией степени p* в области (D) , если для каждой точки $(x, y) \in (D)$ и для каждого числа $t > 0$ такого, что точка $(tx, ty) \in (D)$, выполняется тождество

$$f(tx, ty) = t^p f(x, y). \quad (*)$$

Примеры.

1) Пусть $u = f(x, y) = x^2 + 5xy$. В этом случае

$$f(tx, ty) = (tx)^2 + 5(tx) \cdot (ty) = t^2(x^2 + 5xy) = t^2 f(x, y) \Rightarrow$$

$\Rightarrow u = f(x, y)$ — однородная функция степени $p = 2$.

2) Пусть $u = f(x, y) = \sqrt{2x - 5y}$. В этом случае

$$f(tx, ty) = \sqrt{2(tx) - 5(ty)} = t^{1/2} \sqrt{2x - 5y} = t^{1/2} f(x, y) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x, y)$ — однородная функция степени $p = \frac{1}{2}$.

3) Пусть $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$. В этом случае

$$f(tx, ty) = f\left(\frac{ty}{tx}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right) = t^0 \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ — однородная функция степени $p = 0$.

2°. Формула Эйлера. Пусть функция $u = f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой области (D) и имеет там непрерывные частные производные $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$. Пусть функция $u = f(x, y)$ является однородной функцией степени p в (D) . Тогда в каждой точке $(x, y) \in (D)$ имеет место равенство

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot y = p \cdot f(x, y).$$

► Выберем и закрепим любую точку $(x_0, y_0) \in (D)$. В силу основного тождества (*) будем иметь

$$f(tx_0, ty_0) = t^p f(x_0, y_0) \quad (**)$$

($f(tx_0, ty_0)$ — сложная функция аргумента t). Продифференцируем по t обе части (**). Получим

$$f'_x(tx_0, ty_0) \cdot x_0 + f'_y(tx_0, ty_0) \cdot y_0 = p t^{p-1} \cdot f(x_0, y_0).$$

В частности, при $t = 1$ будем иметь

$$f'_x(x_0, y_0) \cdot x_0 + f'_y(x_0, y_0) \cdot y_0 = p f(x_0, y_0).$$

У нас точка (x_0, y_0) — любая из области (D) . Значит, и для каждой точки $(x, y) \in (D)$ будет $xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = pf(x, y)$. ◀

3°. **Определение.** Дифференциальное уравнение вида

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

называется *однородным*, если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ являются однородными одной и той же степени p .

Считаем, что функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой области (D) и имеют там непрерывные частные производные $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$, $g'_x(x, y)$, $g'_y(x, y)$.

Пусть $(\tilde{D}) \in (D)$ и $(\tilde{D})$ — множество точек единственности уравнения (1). Пусть в точках области $(\tilde{D})$ $xf(x, y) + yg(x, y)$ не обращается в нуль. Покажем, что тогда функция

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xf(x, y) + yg(x, y)}$$
 является интегрирующим множителем

для уравнения (1) в $(\tilde{D})$.

В самом деле, умножим обе части уравнения (1) на $\mu(x, y)$. Получим

$$\underbrace{\frac{f}{xf + yg}}_{=\tilde{M}(x,y)} dx + \underbrace{\frac{g}{xf + yg}}_{=\tilde{N}(x,y)} dy = 0. \quad (*)$$

Рассмотрим разность $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f}{xf + yg} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g}{xf + yg} \right) = \\ &= \frac{\frac{\partial f}{\partial y} \cdot (xf + yg) - f \cdot \left(x \frac{\partial f}{\partial y} + g + y \frac{\partial g}{\partial y} \right) - \frac{\partial g}{\partial x} (xf + yg) + g \cdot \left(f + x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial x} \right)}{(xf + yg)^2} = \\ &= \frac{yg \frac{\partial f}{\partial y} - yf \frac{\partial g}{\partial y} - xf \frac{\partial g}{\partial x} + xg \frac{\partial f}{\partial x}}{(xf + yg)^2} = \frac{g \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) - f \left(x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} \right)}{(xf + yg)^2}.\end{aligned}$$

По условию, функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ — однородные одной и той же степени p . Но тогда по формуле Эйлера в каждой точке $(x, y) \in (\tilde{D})$ будет $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = p \cdot f$; $x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} = p \cdot g$. Следовательно, будем иметь

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = \frac{p \cdot f \cdot g - p \cdot g \cdot f}{(xf + yg)^2} = 0 \text{ в } (\tilde{D}) \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}, \text{ в } (\tilde{D}).$$

Значит, (*) является уравнением в полных дифференциалах в $(\tilde{D}) \Rightarrow$

$\mu(x, y) = \frac{1}{xf(x, y) + yg(x, y)}$ — интегрирующий множитель для уравнения (1).

Замечание. Замена $y = ux$, где $u(x)$ — новая неизвестная функция, приводит однородное уравнение (1) к уравнению с разделяющимися переменными.

Задача 1. Решить уравнение $(x + 2y)dx - xdy = 0$.

► Здесь $f(x, y) = x + 2y$; $g(x, y) = -x \Rightarrow f(x, y), g(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$.

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2$; $\frac{\partial g}{\partial x} = -1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x} \in C(\mathbb{R}^2)$. $f(x, y)$, $g(x, y)$ обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(0, 0)$. $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — однородные одной и той же степени $p = 1$ в $\mathbb{R}^2$. Имеем

$$xf(x, y) + yg(x, y) = x(x + 2y) - xy = x^2 + xy = x(x + y) = 0$$

на линиях: $x = 0$, $y = -x$.

Непосредственно из заданного уравнения видно, что

$$\begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x, \\ -\infty < x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x, \\ 0 < x < +\infty \end{cases}$$

— решения исходного уравнения.

Станем рассматривать заданное уравнение в областях:

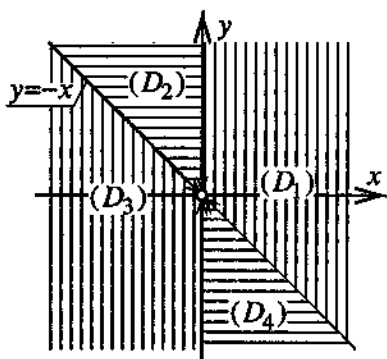


Рис. 1.22. К задаче 1

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -x < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -x < y < +\infty; \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < -x; \end{cases} \quad (D_4) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < -x. \end{cases}$$

В каждой из областей (D_k) , $k = \overline{1, 4}$,

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xf + yg} = \frac{1}{x(x + y)}$$

является интегрирующим множителем исходного уравнения. Умножим обе части заданного уравнения на $\mu = \frac{1}{x(x + y)}$. Получим

$$\underbrace{\frac{x + 2y}{x^2 + xy} dx}_{=\tilde{M}(x, y)} - \underbrace{\frac{1}{x + y} dy}_{=\tilde{N}(x, y)} = 0. \quad (*)$$

Это уравнение равносильно исходному в (D_k) . Имеем

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{2(x + y) - (x + 2y)}{(x + y)^2} = \frac{1}{(x + y)^2}; \quad \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = \frac{1}{(x + y)^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} \equiv \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ в (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. Найдем общий интеграл уравнения (*) (а значит, и исходного уравнения). Для этого берем произвольную точку (x_0, y_0) в (D_k) , $k = \overline{1, 4}$. Будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x \tilde{M}(x, y) dx + \int_{y_0}^y \tilde{N}(x_0, y) dy = \int_{x_0}^x \frac{x+2y}{x(x+y)} dx - \int_{y_0}^y \frac{dy}{x_0+y} = \\ &= \int_{x_0}^x \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+y} \right) dx - \int_{y_0}^y \frac{dy}{x_0+y} \Rightarrow \\ &\Rightarrow u(x, y) = \left(2 \ln|x| - \ln|x+y| \right) \Big|_{x=x_0}^{x=x} - \ln|x_0+y| \Big|_{y=y_0}^{y=y} = \\ &= 2 \ln|x| - \ln|x+y| - 2 \ln|x_0| + \ln|x_0+y| - \ln|x_0+y| + \ln|x_0+y_0| = \\ &= 2 \ln|x| - \ln|x+y| + C_1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow 2 \ln|x| - \ln|x+y| = C$ — общий интеграл исходного уравнения в каждой из областей (D_k) , $k = \overline{1, 4}$.

Второй способ решения задачи 1.

В заданном уравнении $f(x, y) = x + 2y$; $g(x, y) = -x \Rightarrow f(x, y)$,

$$g(x, y) \in C(\mathbb{R}^2); \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2; \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x} \in C(\mathbb{R}^2).$$

Функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ обращаются одновременно в нуль в точке $(0, 0)$. $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — однородные функции одной и той же степени $p = 1$ в $\mathbb{R}^2$. Непосредственно из заданного уравнения видно, что $\begin{cases} x = 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < 0 \end{cases}$ — решения исходного уравнения. Станем рассматривать исходное уравнение для $x \neq 0$, т. е. в левой и правой открытых полуплоскостях:

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < +\infty. \end{cases}$$

В заданном уравнении делаем замену: $y = u \cdot x$, где $u(x)$ — новая неизвестная функция. Будем иметь

$$(x + 2ux)dx - x(udx + xdu) = 0 \Leftrightarrow$$

(так как $x \neq 0$ в (D_1) и (D_2))

$$\Leftrightarrow (1 + 2u)dx - udx - xdu = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1 + u)dx - xdu = 0. \quad (**)$$

Замечаем, что $(**)$ является уравнением с разделяющимися переменными. Непосредственно из уравнения $(**)$ видно, что

$$\begin{cases} u = -1, \\ 0 < x < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} u = -1, \\ -\infty < x < 0 \end{cases} \quad \text{— решения уравнения } (**)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x, \\ 0 < x < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x, \\ -\infty < x < 0 \end{cases} \quad \text{— решения исходного уравнения в } (D_1) \text{ и в } (D_2) \text{ соответственно.}$$

Станем рассматривать уравнение $(**)$ в областях:

$$(\tilde{D}_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -1 < u < +\infty; \end{cases} \quad (\tilde{D}_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -1 < u < +\infty; \end{cases}$$

$$(\tilde{D}_3) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < u < -1; \end{cases} \quad (\tilde{D}_4) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < u < -1. \end{cases}$$

В областях $(\tilde{D}_k)$ уравнение $(**)$ равносильно уравнению

$$\frac{dx}{x} - \frac{du}{u+1} = 0 \quad (\mu(x, u) = \frac{1}{x(1+u)} \text{ — интегрирующий множитель}$$

уравнения $(**)$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} - \int_{u_0}^u \frac{du}{u+1} = \ln|x| \Big|_{x=x_0}^{x=x} - \ln|u+1| \Big|_{u=u_0}^{u=u} =$$

$$= \ln|x| - \ln|x_0| - \ln|u+1| + \ln|u_0+1| = \ln|x| - \ln|u+1| + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|x| - \ln|u+1| = C \text{ — общий интеграл уравнения } (**) \text{ в } (\tilde{D}_k),$$

$$k = \overline{1, 4} \Rightarrow \ln|x| - \ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| = C \Rightarrow 2\ln|x| - \ln|x+y| = C \text{ — общий}$$

интеграл исходного уравнения в областях

$$(\tilde{\tilde{D}}_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -x < y < +\infty; \end{cases} \quad (\tilde{\tilde{D}}_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < -x; \end{cases}$$

$$(\tilde{D}_3) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -x < y < +\infty; \end{cases} \quad (\tilde{D}_4) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < -x. \end{cases} \blacktriangleleft$$

Задача 2. Решить уравнение $(y + \sqrt{x^2 - y^2}) dx - x dy = 0$.

► Здесь $f(x, y) = y + \sqrt{x^2 - y^2}$; $g(x, y) = -x$ определены и непрерывны в областях: $(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -x < y < x; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ x < y < -x. \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}; \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x} \in C((D_1) \cup (D_2)). \quad f(x, y),$$

$g(x, y)$ обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(0; 0)$. $f(x, y)$, $g(x, y)$ — однородные функции одной и той же степени $p = 1$ в $(D_1) \cup (D_2)$. Следовательно, заданное уравнение является однородным. Имеем

$$xf(x, y) + yg(x, y) = xy + x\sqrt{x^2 - y^2} - xy = x\sqrt{x^2 - y^2} = 0$$

на линиях $x = 0$; $y = x$; $y = -x$. Эти линии не входят в $(D_1) \cup (D_2)$. Непосредственно из заданного уравнения видно, что

$$\begin{cases} y = x, \\ 0 < x < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x, \\ 0 < x < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x, \\ -\infty < x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x, \\ -\infty < x < 0 \end{cases}$$

— решения уравнения. Так как $xf + yg \neq 0$ в $(D_1) \cup (D_2)$, то функция

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xf + yg} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - y^2}}$$

является интегрирующим множителем заданного уравнения в $(D_1) \cup (D_2)$. Умножим обе части исходного уравнения на

$$\mu = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - y^2}}. \text{ Получим}$$

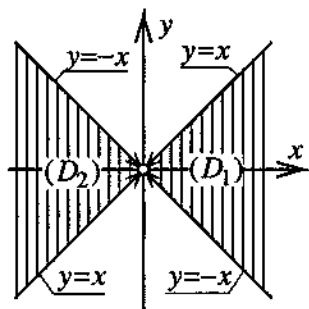


Рис. 1.23. К задаче 2

$$\underbrace{\left(\frac{1}{x} + \frac{y}{x\sqrt{x^2 - y^2}} \right)}_{=\tilde{M}(x,y)} dx - \underbrace{\frac{dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}}_{=\tilde{N}(x,y)} = 0. \quad (*)$$

Имеем $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{x}{(x^2 - y^2)^{3/2}}; \quad \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = \frac{x}{(x^2 - y^2)^{3/2}} \Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ в

$(D_1) \cup (D_2) \Rightarrow$ Уравнение $(*)$ является уравнением в полных дифференциалах в $(D_1) \cup (D_2)$. (Отметим, что уравнение $(*)$ в $(D_1) \cup (D_2)$ равносильно исходному уравнению.) Найдём общий интеграл уравнения $(*)$ (а значит, и исходного уравнения) в $(D_1) \cup (D_2)$. Для этого берём произвольную точку (x_0, y_0) в (D_k) , $k = \overline{1, 2}$. Будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x \tilde{M}(x, y) dx + \int_{y_0}^y \tilde{N}(x_0, y) dy = \\ &= \int_{x_0}^x \left(\frac{y}{x\sqrt{x^2 - y^2}} + \frac{1}{x} \right) dx - \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{x_0^2 - y^2}} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x \tilde{M}(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y \tilde{N}(x, y) dy = \\ &= \int_{x_0}^x \left(\frac{y_0}{x\sqrt{x^2 - y_0^2}} + \frac{1}{x} \right) dx - \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

Воспользуемся вторым выражением для $u(x, y)$, взяв в качестве точки (x_0, y_0) точку $(x_0, 0)$, где $x_0 \neq 0$. Получим

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} - \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \ln|x| \Big|_{x=x_0}^{x=x} - \operatorname{sgn} x \cdot \arcsin \frac{y}{x} \Big|_{y=0}^{y=y} = \\ &= \ln|x| - \ln|x_0| - \operatorname{sgn} x \cdot \arcsin \frac{y}{x} = \ln|x| - \operatorname{sgn} x \cdot \arcsin \frac{y}{x} + C_1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow \ln|x| - \operatorname{sgn} x \cdot \arcsin \frac{y}{x} = C$ — общий интеграл исходного уравнения в $(D_1) \cup (D_2)$. ◀

Задача 3. Решить уравнение $y \cos \ln \frac{y}{x} dx - x dy = 0$.

► Должно быть: $x \neq 0$ и $\frac{y}{x} > 0 \Rightarrow$ Заданное уравнение определено

но в областях: $(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < 0. \end{cases}$ В этом уравне-

нии $f(x, y) = y \cos \ln \frac{y}{x}$; $g(x, y) = -x \Rightarrow f(x, y), g(x, y) \in C((D_1) \cup (D_2))$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos \ln \frac{y}{x} - y \sin \ln \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{x} = \cos \ln \frac{y}{x} - \sin \ln \frac{y}{x}; \frac{\partial g}{\partial x} = -1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x} \in C((D_1) \cup (D_2))$. $f(x, y)$, $g(x, y)$ не обращаются одно-

временно в нуль ни в одной точке из $(D_1) \cup (D_2)$. Функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — однородные одной и той же степени $p = 1$ в $(D_1) \cup (D_2)$. Следовательно, заданное уравнение является однородным в $(D_1) \cup (D_2)$. В $(D_1) \cup (D_2)$ выражение

$$xf + yg = xy \cos \ln \frac{y}{x} - xy = xy \left(\cos \ln \frac{y}{x} - 1 \right)$$

обращается в нуль на линиях $\begin{cases} y = xe^{2k\pi}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ 0 < x < +\infty, \end{cases}$ и на

линиях $\begin{cases} y = xe^{2k\pi}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ -\infty < x < 0. \end{cases}$ Подстановкой в заданное

уравнение убеждаемся непосредственно, что эти линии являются интегральными кривыми. (На рис. 1.24 представлена схема расположения указанных линий.) В каждой из областей

$$(\bar{D}_{1k}) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ xe^{2\pi k} < y < xe^{2(k+1)\pi} \end{cases} \quad \text{и} \quad (\bar{D}_{2k}) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ xe^{2(k+1)\pi} < y < xe^{2k\pi}, \end{cases}$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $xf + yg \neq 0$ и, следовательно, функция $\mu = \frac{1}{xf + yg}$

$= \frac{1}{xy \left(\cos \ln \frac{y}{x} - 1 \right)}$ является интегриру-

ющим множителем в $(\tilde{D}_{1k})$ и в $(\tilde{D}_{2k})$.

Умножим обе части исходного уравнения на μ . Получим в каждой $(\tilde{D}_{1k})$ и в

$(\tilde{D}_{2k})$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, уравнение, равносильное исходному:

$$\underbrace{\frac{\cos \ln \frac{y}{x}}{x \left(\cos \ln \frac{y}{x} - 1 \right)}}_{=\tilde{M}(x,y)} dx - \underbrace{\frac{1}{y \left(\cos \ln \frac{y}{x} - 1 \right)}}_{=\tilde{N}(x,y)} dy = 0. \quad (*)$$

Имеем $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\sin \ln \frac{y}{x}}{xy \left(\cos \ln \frac{y}{x} - 1 \right)^2}$; $\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = \frac{\sin \ln \frac{y}{x}}{xy \left(\cos \ln \frac{y}{x} - 1 \right)^2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$ в $(\tilde{D}_{1k})$ и в $(\tilde{D}_{2k})$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \Rightarrow$ Уравнение (*)

является уравнением в полных дифференциалах в каждой из областей $(\tilde{D}_{1k})$ и $(\tilde{D}_{2k})$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Найдем общий интеграл уравнения (*) (а значит, и исходного уравнения) в областях $(\tilde{D}_{1k})$ и $(\tilde{D}_{2k})$. Для этого берем произвольную точку (x_0, y_0) в $(\tilde{D}_{1k})$, $(\tilde{D}_{2k})$. Будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x \tilde{M}(x, y) dx + \int_{y_0}^y \tilde{N}(x_0, y) dy = \\ &= \int_{x_0}^x \left[1 - \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\ln(y/x)}{2}} \right] \cdot \frac{dx}{x} + \int_{y_0}^y \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\ln(y/x_0)}{2}} dy = \end{aligned}$$

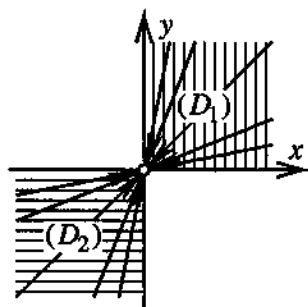


Рис. 1.24. К задаче 3

$$\begin{aligned}
&= \left[\ln|x| - \operatorname{ctg} \frac{\ln(y/x)}{2} \right] \Big|_{x=x_0}^{x=x} - \operatorname{ctg} \frac{\ln(y/x_0)}{2} \Big|_{y=y_0}^{y=y} \Rightarrow \\
&\Rightarrow u(x, y) = \ln|x| - \operatorname{ctg} \frac{\ln(y/x)}{2} - \ln|x_0| + \\
&+ \operatorname{ctg} \frac{\ln(y/x_0)}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\ln(y/x_0)}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\ln(y_0/x_0)}{2} = \\
&= \ln|x| - \operatorname{ctg} \frac{\ln(y/x)}{2} + C_1 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \ln|x| - \operatorname{ctg} \frac{\ln(y/x)}{2} = C$ — общий интеграл заданного уравнения в областях $(\tilde{D}_{1k}), (\tilde{D}_{2k}), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. ◀

§13. Простейшие уравнения, приводящиеся к однородному

I. Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right). \quad (1)$$

Отметим, что если в (1) $c_1 = c_2 = 0$, то уравнение (1) является од-

нородным, ибо в этом случае $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{y}{x}}{a_2 + b_2 \frac{y}{x}}\right) =$

$= \tilde{f}\left(\frac{y}{x}\right)$, а уравнение $y' = \tilde{f}\left(\frac{y}{x}\right)$ — однородное. Следовательно,

имеет смысл вести обсуждение, когда хотя бы одно из чисел c_1, c_2 отлично от нуля. Это мы и будем предполагать в дальнейшем.

Могут иметь место два случая, а именно: случаи, когда $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

и когда $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$.

Первый случай. Пусть $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Сделаем замену $\begin{cases} x = \xi + \alpha, \\ y = \eta + \beta, \end{cases}$ где ξ и η — новые переменные, а

α и β — некоторые постоянные числа, пока неизвестные. Относительно новых переменных уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2\xi + b_2\eta + a_2\alpha + b_2\beta + c_2}\right). \quad (2)$$

Числа α и β выбираем такими, чтобы было

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Это всегда можно сделать, так как система (3) имеет и притом единственное решение, ибо определитель этой системы отличен от нуля (по условию).

При таком выборе чисел α и β будем иметь вместо (2)

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right) \Rightarrow \frac{d\eta}{d\xi} = \tilde{f}\left(\frac{\eta}{\xi}\right). \quad (4)$$

(4) — однородное уравнение. Решив его и возвращаясь к старым переменным, получим решение исходного уравнения (1).

Второй случай. Пусть $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a_1b_2 = a_2b_1 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} (=k) \Rightarrow a_1 = ka_2, \quad b_1 = kb_2$. Следовательно, уравнение (1)

в этом случае запишется в виде

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{(a_2x + b_2y) + c_2}\right). \quad (5)$$

Сделаем замену, положив $a_2x + b_2y = z$ ($z(x)$ — новая неизвестная функция). Тогда $\frac{dz}{dx} = a_2 + b_2 \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_2} \frac{dz}{dx} - \frac{a_2}{b_2}$. Относительно новой неизвестной функции уравнение (1) будет таким:

$$\frac{1}{b_2} \frac{dz}{dx} = \underbrace{f\left(\frac{kz+c_1}{z+c_2}\right)}_{=f_1(z) \text{ (обозначение)}} + \frac{a_2}{b_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = b_2 f_1(z) + a_2. \quad (6)$$

(6) — уравнение с разделяющимися переменными. Решив его и подставив вместо z его выражение $a_2x + b_2y$, найдем решение исходного уравнения.

Задача 1. Решить уравнение $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$.

► Здесь $M(x, y) = 2x - 4y + 6$; $N(x, y) = x + y - 3 \Rightarrow M(x, y),$

$N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$; $\frac{\partial M}{\partial y} = -4$; $\frac{\partial N}{\partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathbb{R}^2)$. $M(x, y),$

$N(x, y)$ обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(1, 2)$.

Видим, что $y' = f\left(\frac{-2x + 4y - 6}{x + y - 3}\right)$ и что $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Положим $\begin{cases} x = \xi + \alpha, \\ y = \eta + \beta. \end{cases}$ Будем иметь

$$(2\xi - 4\eta + 2\alpha - 4\beta + 6)d\xi + (\xi + \eta + \alpha + \beta - 3)d\eta = 0.$$

Числа α и β берем такими, чтобы было

$$\begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6 = 0, \\ \alpha + \beta - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta + 3 = 0, \\ \alpha + \beta - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2.$$

А тогда замена $\begin{cases} x = \xi + 1, \\ y = \eta + 2 \end{cases}$ приводит к уравнению

$$(2\xi - 4\eta)d\xi + (\xi + \eta)d\eta = 0. \quad (*)$$

Здесь $f(\xi, \eta) = 2\xi - 4\eta$; $g(\xi, \eta) = \xi + \eta$ — однородные функции степени $p = 1$. Следовательно, $(*)$ — однородное уравнение.

Имеем $f(\xi, \eta)$, $g(\xi, \eta)$, $\frac{\partial f}{\partial \eta}$, $\frac{\partial g}{\partial \xi}$ —

непрерывны на всей плоскости ξ, η ; $f(\xi, \eta)$, $g(\xi, \eta)$ обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(0, 0)$. Выражение

$$\begin{aligned} \xi f(\xi, \eta) + \eta g(\xi, \eta) &= \\ &= \xi(2\xi - 4\eta) + \eta(\xi + \eta) = \\ &= 2\xi^2 - 3\xi\eta + \eta^2 = (\xi - \eta)(2\xi - \eta) \end{aligned}$$

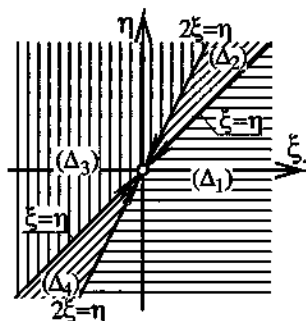


Рис. 1.25. К задаче 1

обращается в нуль на линиях $\eta = \xi$, $\eta = 2\xi$. Во всех остальных точках плоскости ξ, η выражение $\xi f(\xi, \eta) + \eta g(\xi, \eta) \neq 0$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что

$$\begin{cases} \eta = \xi, & \begin{cases} \eta = \xi, \\ 0 < \xi < +\infty; \end{cases} & \begin{cases} \eta = \xi, \\ -\infty < \xi < 0; \end{cases} & \begin{cases} \eta = 2\xi, \\ 0 < \xi < +\infty; \end{cases} & \begin{cases} \eta = 2\xi, \\ -\infty < \xi < 0 \end{cases} \end{cases}$$

— решения уравнения (*). Станем рассматривать уравнение (*) в областях:

$$\begin{aligned} (\Delta_1) &= \left\{ 0 < \xi < +\infty, \right. \cup \left. \begin{cases} -\infty < \xi < 0, \\ -\infty < \eta < \xi \end{cases} \right. & (\Delta_2) &= \left\{ 0 < \xi < +\infty, \right. \\ & \left. \begin{cases} \xi < \eta < 2\xi \end{cases} \right. & & \\ (\Delta_3) &= \left\{ -\infty < \xi < 0, \right. \cup \left. \begin{cases} 0 < \xi < +\infty, \\ 2\xi < \eta < +\infty \end{cases} \right. & (\Delta_4) &= \left\{ -\infty < \xi < 0, \right. \\ & \left. \begin{cases} \xi < \eta < +\infty \end{cases} \right. & & \end{aligned}$$

В каждой из областей (Δ_k) , $k = \overline{1, 4}$, $\mu(\xi, \eta) = \frac{1}{\xi f(\xi, \eta) + \eta g(\xi, \eta)}$ является интегрирующим множителем уравнения (*). Умножим обе части уравнения (*) на $\mu = \frac{1}{(\xi - \eta)(2\xi - \eta)}$. Получим

$$\underbrace{\frac{2\xi - 4\eta}{(\xi - \eta)(2\xi - \eta)}}_{= \tilde{M}(\xi, \eta)} d\xi + \underbrace{\frac{\xi + \eta}{(\xi - \eta)(2\xi - \eta)}}_{= \tilde{N}(\xi, \eta)} d\eta = 0. \quad (**)$$

Отметим, что уравнение (**) равносильно уравнению (*) в (Δ_k) ,

$$k = \overline{1, 4}. \text{ Имеем } \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \eta} = -2 \frac{\xi^2 + 2\xi\eta - 2\eta^2}{(\xi - \eta)^2 (2\xi - \eta)^2}; \frac{\partial \tilde{N}}{\partial \xi} = -2 \frac{\xi^2 + 2\xi\eta - 2\eta^2}{(\xi - \eta)^2 (2\xi - \eta)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial \xi} \text{ в } (\Delta_k), k = \overline{1, 4} \Rightarrow \text{Уравнение (**) является уравнением}$$

в полных дифференциалах в (Δ_k) , $k = \overline{1, 4}$.

Найдем общий интеграл уравнения (**) (а значит, и уравнения (*)) в (Δ_k) . Для этого берем произвольную точку (ξ_0, η_0) в (Δ_k) , $k = \overline{1, 4}$. Будем иметь

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \int_{\xi_0}^{\xi} \tilde{M}(\xi, \eta) d\xi + \int_{\eta_0}^{\eta} \tilde{N}(\xi_0, \eta) d\eta = \\ &= \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{2\xi - 4\eta}{(\xi - \eta)(2\xi - \eta)} d\xi + \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\xi_0 + \eta}{(\xi_0 - \eta)(2\xi_0 - \eta)} d\eta = \\ &= \int_{\xi_0}^{\xi} \left(\frac{6}{2\xi - \eta} - \frac{2}{\xi - \eta} \right) d\xi + \int_{\eta_0}^{\eta} \left(\frac{3}{\eta - 2\xi_0} - \frac{2}{\eta - \xi_0} \right) d\eta = \\ &= (3 \ln |2\xi - \eta| - 2 \ln |\xi - \eta|) \Big|_{\xi=\xi_0}^{\xi=\xi} + (3 \ln |\eta - 2\xi_0| - 2 \ln |\eta - \xi_0|) \Big|_{\eta=\eta_0}^{\eta=\eta} = \\ &= 3 \ln |2\xi - \eta| - 2 \ln |\xi - \eta| - 3 \ln |2\xi_0 - \eta| + 2 \ln |\xi_0 - \eta| + \\ &+ 3 \ln |\eta - 2\xi_0| - 2 \ln |\eta - \xi_0| - 3 \ln |\eta_0 - 2\xi_0| + 2 \ln |\eta_0 - \xi_0| \Rightarrow \\ &\Rightarrow u(\xi, \eta) = 3 \ln |2\xi - \eta| - 2 \ln |\eta - \xi| + C_1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow 3 \ln |2\xi - \eta| - 2 \ln |\xi - \eta| = C$ — общий интеграл уравнения (*) в (Δ_k) , $k = \overline{1, 4}$.

Возвратимся к прежним переменным x и y . У нас $\xi = x - 1$; $\eta = y - 2$. Следовательно, $3 \ln |2x - y| - 2 \ln |x - y + 1| = C$ — общий интеграл исходного уравнения в областях:

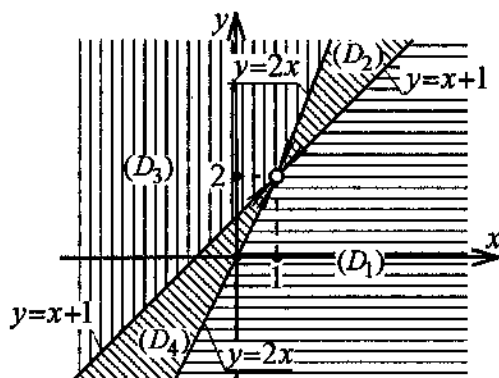


Рис. 1.26. К задаче 1

$$(D_1) = \left\{ 1 < x < +\infty, \quad -\infty < y < x+1 \right\} \cup \left\{ -\infty < x < 1, \quad -\infty < y < 2x \right\}, \quad (D_2) = \left\{ 1 < x < +\infty, \quad x+1 < y < 2x \right\},$$

$$(D_3) = \left\{ -\infty < x < 1, \quad x+1 < y < +\infty \right\} \cup \left\{ 1 < x < +\infty, \quad 2x < y < +\infty \right\}, \quad (D_4) = \left\{ -\infty < x < 1, \quad 2x < y < x+1 \right\}. \quad \blacktriangleleft$$

Задача 2. Решить уравнение $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$.

► Здесь $M(x, y) = 2x + y + 1$; $N(x, y) = -4x - 2y + 3 \Rightarrow M(x, y)$,

$$N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2); \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -4 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}; \frac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathbb{R}^2). \quad M(x, y),$$

$N(x, y)$ не обращаются в нуль ни в одной точке плоскости x, y .

Видим, что $y' = f\left(\frac{2x + y + 1}{4x + 2y - 3}\right)$ и что $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Поэтому

делаем замену: $2x + y = z$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Относительно новой неизвестной функции заданное уравнение примет вид

$$(5z - 5)dx + (3 - 2z)dz = 0 \quad (*)$$

((*) — уравнение с разделяющимися переменными). Непосред-

ственно видно, что $\left\{ \begin{matrix} z = 1, \\ -\infty < x < +\infty \end{matrix} \right\}$ — решение уравнения (*) $\Rightarrow$

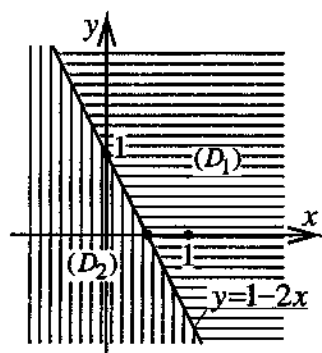


Рис. 1.27. К задаче 2

$\Rightarrow 2x + y = 1, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad \text{т. е.}$
 $y = 1 - 2x, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad \text{— решение}$
 исходного уравнения.

Станем рассматривать уравнение (*) в областях

$$(\tilde{D}_1) = \begin{cases} 1 < z < +\infty, \\ -\infty < x < +\infty; \end{cases}$$

$$(\tilde{D}_2) = \begin{cases} -\infty < z < 1, \\ -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Умножим обе части уравнения (*) на

$$\mu = \frac{1}{z-1}. \quad \text{Получим}$$

$$5dx + \frac{3-2z}{z-1} dz = 0. \quad (**)$$

Уравнение (**) равносильно уравнению (*) в областях $(\tilde{D}_1), (\tilde{D}_2)$ (в этих областях $z \neq 1$). Уравнение (**) является уравнением с разделенными переменными.

Найдем общий интеграл уравнения (**) (а значит, и уравнения (*)) в $(\tilde{D}_k), k = 1, 2$. Для этого берем произвольную точку

$(x_0, z_0) \in (\tilde{D}_k), k = 1, 2$. Будем иметь

$$u(x, z) = \int_{x_0}^x 5dx + \int_{z_0}^z \frac{3-2z}{z-1} dz = 5x \Big|_{x=x_0}^{x=x} - \int_{z_0}^z \left(2 - \frac{1}{z-1} \right) dz =$$

$$= 5x - 5x_0 - 2z + 2z_0 + \ln|z-1| - \ln|z_0-1| = 5x - 2z + \ln|z-1| + C_1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 5x - 2z + \ln|z-1| = C$ — общий интеграл уравнения (**) в $(\tilde{D}_k), k = 1, 2$.

Возвратимся к прежним переменным x и y . У нас $z = 2x + y$. Следовательно, $5x - 4x - 2y + \ln|2x + y - 1| = C \Rightarrow x - 2y + \ln|2x + y - 1| = C$ — общий интеграл исходного уравнения в областях (D_1) и

(D_2) , где $(D_1) = \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ 1 - 2x < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ -\infty < y < 1 - 2x. \end{cases} \quad \blacktriangleleft$

II. Некоторые дифференциальные уравнения можно привести к однородным заменой $y = z^k$. Число k обычно заранее неизвестно. Чтобы его найти, нужно в уравнении сделать замену $y = z^k$. Требуя, чтобы полученное после замены уравнение было однородным, находят k , если это возможно. Если же этого сделать нельзя, то уравнение не приводится к однородному этим способом.

Задача 3. Дано уравнение $(x^4 + y^2)dx - x^3 dy = 0$. Привести заданное уравнение к однородному.

► Здесь $M(x, y) = x^4 + y^2$; $N(x, y) = -x^3 \Rightarrow M(x, y), N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$; $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$; $\frac{\partial N}{\partial x} = -3x^2$ $\frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathbb{R}^2)$. $M(x, y)$ и $N(x, y)$ обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(0, 0)$. Делаем замену: $y = z^k \Rightarrow dy = kz^{k-1} dz$. Относительно новой неизвестной функции заданное уравнение станет таким:

$$\underbrace{(x^4 + z^{2k})}_{=f(x,z)} dx - \underbrace{kx^3 z^{k-1}}_{=g(x,z)} dz = 0. \quad (*)$$

Уравнение (*) будет однородным, если существует число k такое, при котором функции $f(x, z)$ и $g(x, z)$ являются однородными одной и той же степени. Последнее будет лишь тогда, когда

$$4 = 2k = 3 + k - 1 \Rightarrow k = 2.$$

Вывод: заданное уравнение приводится к однородному заменой $y = z^2$. При $k = 2$ уравнение (*) принимает вид

$$\underbrace{(x^4 + z^4)}_{\tilde{f}(x,z)} dx - \underbrace{2x^3 z}_{\tilde{g}(x,z)} dz = 0.$$

$\tilde{f}(x, z)$ и $\tilde{g}(x, z)$ — однородные функции степени $p = 4$. ◀

Задача 4. Дано уравнение $(y^3 + xy)dx - 2x^2 dy = 0$. Привести заданное уравнение к однородному.

► Здесь $M(x, y) = y^3 + xy$; $N(x, y) = -2x^2 \Rightarrow M(x, y), N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$; $\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 + x$; $\frac{\partial N}{\partial x} = -4x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathbb{R}^2)$. $M(x, y)$ и $N(x, y)$ обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(0, 0)$. Делаем замену: $y = z^k \Rightarrow dy = kz^{k-1} dz$. Относительно новой неизвестной функции заданное уравнение станет таким:

$$\underbrace{(z^{3k} + xz^k)}_{=f(x,z)} dx - \underbrace{2kx^2 z^{k-1}}_{=g(x,z)} dz = 0. \quad (*)$$

Уравнение (*) будет однородным, если существует число k такое, при котором функции $f(x, z)$ и $g(x, z)$ являются однородными одной и той же степени. Это будет лишь тогда, когда

$$3k = k + 1 = 2 + k - 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Вывод: заданное уравнение приводится к однородному заменой $y = z^{1/2}$. При $k = \frac{1}{2}$ уравнение (*) принимает вид

$$\underbrace{(z^{3/2} + xz^{1/2})}_{=\tilde{f}(x,z)} dx - \underbrace{x^2 z^{-1/2}}_{=\tilde{g}(x,z)} dz = 0.$$

$\tilde{f}(x, z)$ и $\tilde{g}(x, z)$ — однородные функции степени $p = \frac{3}{2}$. ◀

Задача 5. Дано уравнение $(x^2 y^4 + 1)y dx + 2x dy = 0$. Привести заданное уравнение к однородному.

► Здесь $M(x, y) = x^2 y^5 + y$; $N(x, y) = 2x \Rightarrow M(x, y), N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 5x^2 y^4 + 1; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2 \Rightarrow \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \in C(\mathbb{R}^2). \quad M(x, y)$$

и $N(x, y)$ обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(0, 0)$.

Делаем замену $y = z^k \Rightarrow dy = kz^{k-1} dz$. Относительно новой неизвестной функции заданное уравнение станет таким:

$$\underbrace{(x^2 z^{4k} + 1)z^k}_{=f(x,z)} dx + \underbrace{2kxz^{k-1}}_{=g(x,z)} dz = 0. \quad (*)$$

Уравнение (*) будет однородным, если существует число k такое, при котором функции $f(x, z)$ и $g(x, z)$ являются однородными одной и той же степени. Это будет лишь тогда, когда

$$2 + 5k = k = 1 + k - 1 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

Вывод: заданное уравнение приводится к однородному заменой $y = z^{\frac{1}{2}}$. При $k = -\frac{1}{2}$ уравнение (*) принимает вид

$$\underbrace{(x^2 z^{-2} + 1) z^{-1/2}}_{=\tilde{f}(x,z)} dx - \underbrace{x z^{-3/2}}_{=\tilde{g}(x,z)} dz = 0.$$

$\tilde{f}(x, z)$ и $\tilde{g}(x, z)$ — однородные функции степени $p = -\frac{1}{2}$. ◀

Задача 6. Дано уравнение $y dx + x(2xy + 1) dy = 0$. Привести заданное уравнение к однородному.

► Здесь $M(x, y) = y$; $N(x, y) = x(2xy + 1) \Rightarrow M(x, y), N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy + 1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathbb{R}^2). \quad M(x, y) \text{ и } N(x, y)$$

обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(0, 0)$. Делаем замену: $y = z^k \Rightarrow dy = k z^{k-1} dz$. Относительно новой неизвестной функции заданное уравнение станет таким:

$$\underbrace{z^k}_{=\tilde{f}(x,z)} dx + \underbrace{(2xz^k + 1)x \cdot k z^{k-1}}_{=\tilde{g}(x,z)} dz = 0. \quad (*)$$

Уравнение (*) будет однородным, если существует число k такое, при котором функции $\tilde{f}(x, z)$ и $\tilde{g}(x, z)$ являются однородными одной и той же степени. Это будет лишь тогда, когда

$$k = 2 + k + k - 1 = 1 + k - 1 \Rightarrow k = -1.$$

Вывод: заданное уравнение приводится к однородному заменой $y = \frac{1}{z}$. При $k = -1$ уравнение (*) принимает вид

$$\underbrace{\frac{1}{z}}_{=\tilde{f}(x,z)} dx - \underbrace{\left(\frac{2x}{z} + 1\right) \frac{x}{z^2}}_{=\tilde{g}(x,z)} dz = 0.$$

$\tilde{f}(x, z)$ и $\tilde{g}(x, z)$ — однородные функции степени $p = -1$. ◀

Задача 7. Дано уравнение $(x - 4\sqrt{y}) dx + 2 dy = 0$. Привести заданное уравнение к однородному.

► Должно быть $y \geq 0$. $\Rightarrow$ Уравнение следует рассматривать лишь в замкнутой верхней полуплоскости. Имеем $M(x, y) = x - 4\sqrt{y}$; $N(x, y) = 2 \Rightarrow M(x, y), N(x, y)$ — непрерыв-

ны в замкнутой верхней полуплоскости. $\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{2}{\sqrt{y}}$; $\frac{\partial N}{\partial x} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$ — непрерывны в открытой верхней полуплоскости.

$M(x, y)$ и $N(x, y)$ одновременно не обращаются в нуль ни в одной точке. Делаем замену: $y = z^k \Rightarrow dy = kz^{k-1} dz$. Относительно новой неизвестной функции заданное уравнение станет таким:

$$\underbrace{(x - 4z^{k/2})}_{=f(x,z)} dx + \underbrace{2kz^{k-1}}_{=g(x,z)} dz = 0. \quad (*)$$

Уравнение (*) будет однородным, если существует число k такое, при котором функции $f(x, z)$ и $g(x, z)$ являются однородными одной и той же степени. Это будет лишь тогда, когда

$$1 = \frac{k}{2} = k - 1 \Rightarrow k = 2.$$

Вывод: заданное уравнение приводится к однородному заменой $y = z^2$.

При $k = 2$ уравнение (*) принимает вид

$$\underbrace{(x - 4z)}_{=\tilde{f}(x,z)} dx + \underbrace{4z}_{=\tilde{g}(x,z)} dz = 0.$$

$\tilde{f}(x, z)$ и $\tilde{g}(x, z)$ — однородные функции степени $p = 1$. ◀

Задача 8. Дано уравнение $\left(y^2 - \frac{2}{x^2}\right) dx - dy = 0$. Привести заданное уравнение к однородному.

► Должно быть $x \neq 0$. $\Rightarrow$ Уравнение следует рассматривать лишь в открытых левой и правой полуплоскостях. Имеем

$M(x, y) = y^2 - \frac{2}{x^2}$; $N(x, y) = -1 \Rightarrow M(x, y), N(x, y)$ — непрерыв-

ны в открытых левой и правой полуплоскостях. $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$;

$\frac{\partial N}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$ — непрерывны в открытых левой и правой полуплоскостях.

$M(x, y)$ и $N(x, y)$ одновременно не обращаются в нуль ни в одной точке. Делаем замену: $y = z^k \Rightarrow dy = kz^{k-1} dz$. Относительно новой неизвестной функции заданное уравнение станет таким:

$$\underbrace{\left(z^{2k} - \frac{2}{x^2}\right)}_{=f(x,z)} dx - \underbrace{kz^{k-1}}_{=g(x,z)} dz = 0. \quad (*)$$

Уравнение (*) будет однородным, если существует число k такое, при котором функции $f(x, z)$ и $g(x, z)$ являются однородными одной и той же степени. Это будет лишь тогда, когда

$$2k = -2 = k - 1 \Rightarrow k = -1.$$

Вывод: заданное уравнение приводится к однородному заменой $y = \frac{1}{z}$.

При $k = -1$ уравнение (*) принимает вид

$$\underbrace{\left(\frac{1}{z^2} - \frac{2}{x^2}\right)}_{=f(x,z)} dx + \underbrace{\frac{1}{z^2}}_{=\tilde{g}(x,z)} dz = 0.$$

$\tilde{f}(x, z)$ и $\tilde{g}(x, z)$ — однородные функции степени $p = -2$. ◀

Задача 9. Дано уравнение $(y - y^2 \sqrt{x - x^2 y^2}) dx + 2xy dy = 0$. Привести заданное уравнение к однородному.

► Здесь $M(x, y) = y - y^2 \sqrt{x - x^2 y^2}$; $N(x, y) = 2xy$. Должно быть

$$x - x^2 y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x(1 - xy^2) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ -\infty < y < +\infty \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\frac{1}{\sqrt{x}} \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{x}}. \end{cases}$$

$M(x, y)$ и $N(x, y)$ обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(0, 0)$. Имеем

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 - 2y\sqrt{x - x^2y^2} + y^2 \frac{2x^2y}{\sqrt{x - x^2y^2}} = 1 + \frac{3x^2y^3 - 2xy}{\sqrt{x - x^2y^2}}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2.$$

$M(x, y), \quad N(x, y), \quad \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x}$ непрерывны в области

$$(D) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\frac{1}{\sqrt{x}} < y < \frac{1}{\sqrt{x}}. \end{cases} \text{ Делаем замену: } y = z^k \Rightarrow dy = kz^{k-1}dz. \text{ От-}$$

носительно новой неизвестной функции заданное уравнение станет таким:

$$\underbrace{(z^k - z^{2k}\sqrt{x - x^2z^{2k}})}_{=f(x,z)}dx + \underbrace{2kxz^{k-1}}_{=g(x,z)}dz = 0. \quad (*)$$

Уравнение (*) будет однородным, если существует число k такое, при котором функции $f(x, z)$ и $g(x, z)$ оказываются однородными одной и той же степени. Это будет лишь тогда, когда, во-первых,

$$1 = 2 + 2k \text{ и, во-вторых, } k = 2k + \frac{1}{2} = k \Rightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

Вывод: заданное уравнение приводится к однородному заменой $y = \frac{1}{\sqrt{z}}$.

При $k = -\frac{1}{2}$ уравнение (*) принимает вид

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{z}\sqrt{x - \frac{x^2}{z}}\right)}_{=\tilde{f}(x,z)}dx - \underbrace{x\frac{1}{z\sqrt{z}}}_{=\tilde{g}(x,z)}dz = 0.$$

$\tilde{f}(x, z)$ и $\tilde{g}(x, z)$ — однородные функции степени $p = -\frac{1}{2}$. ◀

Задача 10. Дано уравнение $(\sqrt{x^6 - y^4} + y^2)dx - \frac{2}{3}xydy = 0$.

Привести заданное уравнение к однородному.

► Должно быть

$$x^6 - y^4 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq |x|^3 \Leftrightarrow -|x|^{3/2} \leq y \leq |x|^{3/2}.$$

$M(x, y) = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2$; $N(x, y) = -\frac{2}{3}xy$. $M(x, y)$ и $N(x, y)$ обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(0, 0)$. Имеем

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{2y^3}{\sqrt{x^6 - y^4}} + 2y; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{2}{3}y. \quad M(x, y), \quad N(x, y), \quad \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x}$$

непрерывны в области $(D) = \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ -|x|^{3/2} < y < |x|^{3/2}. \end{cases}$ Делаем замену:

$y = z^k \Rightarrow dy = k z^{k-1} dz$. Относительно новой неизвестной функции заданное уравнение запишется в виде

$$\underbrace{\left(\sqrt{x^6 - z^{4k}} + z^{2k}\right)dx}_{=f(x,z)} - \underbrace{\frac{2}{3}kxz^k z^{k-1} dz}_{=g(x,z)} = 0. \quad (*)$$

Уравнение $(*)$ будет однородным, если существует число k такое, при котором функции $f(x, z)$ и $g(x, z)$ оказываются однородными одной и той же степени. Это будет лишь тогда, когда, во-первых, $6 = 4k$ и, во-вторых, $3 = 2k = 2k \Rightarrow k = \frac{3}{2}$.

Вывод: заданное уравнение приводится к однородному заменой $y = z^{3/2}$. При $k = \frac{3}{2}$ уравнение $(*)$ принимает вид

$$\underbrace{\left(\sqrt{x^6 - z^6} + z^3\right)dx}_{=\tilde{f}(x,z)} - \underbrace{xz^2 dz}_{=\tilde{g}(x,z)} = 0.$$

$\tilde{f}(x, z)$ и $\tilde{g}(x, z)$ — однородные функции степени $p = 3$. ◀

Задача 11. Дано уравнение $2ydx + (x^2y + 1)xdy = 0$. Привести заданное уравнение к однородному.

► Здесь $M(x, y) = 2y$; $N(x, y) = (x^2y + 1)x \Rightarrow M(x, y), N(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$;

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2y + 1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(\mathbb{R}^2). \quad M(x, y) \text{ и } N(x, y)$$

обращаются одновременно в нуль лишь в точке $(0, 0)$. Делаем

замену $y = z^k \Rightarrow dy = kz^{k-1} dz$. Относительно новой неизвестной функции заданное уравнение станет таким:

$$\underbrace{2z^k}_{=f(x,z)} dx + \underbrace{(x^2 z^k + 1)xkz^{k-1}}_{=g(x,z)} dz = 0. \quad (*)$$

Уравнение (*) будет однородным, если существует число k такое, при котором функции $f(x, z)$ и $g(x, z)$ оказываются однородными одной и той же степени. Это будет лишь тогда, когда, во-первых, $2 + k = 0$ и, во-вторых, $k = 2 + 2k = k \Rightarrow k = -2$.

Вывод: заданное уравнение приводится к однородному заменой $y = \frac{1}{z^2}$.

При $k = -2$ уравнение (*) примет вид

$$\underbrace{\frac{2}{z^2}}_{=\tilde{f}(x,z)} dx - 2 \underbrace{\frac{x}{z^3} \left(\frac{x^2}{z^2} + 1 \right)}_{=\tilde{g}(x,z)} dz = 0.$$

$\tilde{f}(x, z)$ и $\tilde{g}(x, z)$ — однородные функции степени $p = -2$. ◀

Глава 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

§1. Основные понятия и определения

Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной, имеет вид

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

Лишь в простейших случаях уравнение (1) удастся разрешить относительно y' и заменить его, следовательно, одним или несколькими уравнениями вида

$$y' = f_k(x, y), \quad k = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Так, например, уравнение

$$y(y')^2 + (x - y)y' - x = 0 \quad (\tilde{2})$$

в результате его решения относительно y' распадается для $y \neq 0$ на два уравнения: $y' = 1$ и $y' = -\frac{x}{y}$, откуда

$$y = x + C; \quad y^2 + x^2 = C. \quad (*)$$

Следовательно, все решения уравнения $(\tilde{2})$ содержатся в формулах (*). Таким образом, семейство интегральных кривых уравнения $(\tilde{2})$ получается в результате наложения семейств (*) (рис. 2.1).

Мы видим при этом, что через каждую точку $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ проходят ровно две интегральные кривые уравнения $(\tilde{2})$.

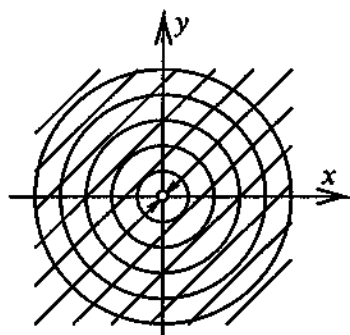


Рис. 2.1

В большинстве же случаев уравнение (1) не удастся разрешить относительно y' .

Станем рассматривать x, y, y' как координаты точек трехмерного пространства. Тогда уравнение (1) будет определять в этом пространстве некоторую поверхность (S) (рис. 2.2). Пусть $(\bar{D})$ — проекция поверхности (S) на плоскость Oxy . Ясно, что только для точек $(x, y) \in (\bar{D})$ суще-

ствуют значения y' , которые совместно с x и y удовлетворяют уравнению (1). Поэтому о решениях уравнения (1) имеет смысл говорить лишь применительно к области $(\bar{D})$.

Возьмем любую точку $(x_0, y_0) \in (D)$ и рассмотрим уравнение

$$F(x_0, y_0, y') = 0. \quad (3)$$

Пусть $y'_1, y'_2, \dots, y'_m$ — числа, которые являются различными вещественными корнями уравнения (3). Ради простоты ограничимся рассмотрением случая, когда уравнение (3) имеет конечное число вещественных корней (рис. 2.3).

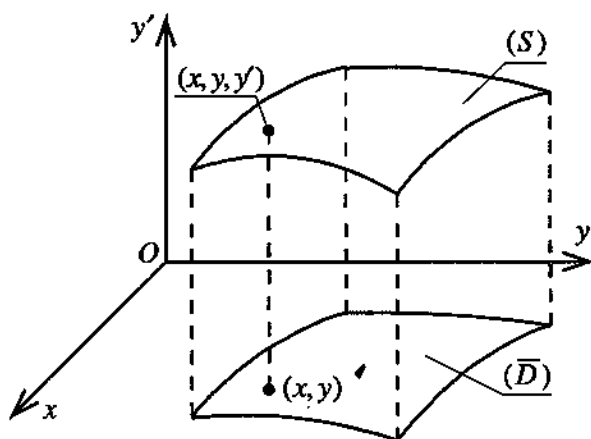


Рис. 2.2

Пусть $(\bar{P}_k)$, $k = \overline{1, m}$, — прямоугольный параллелепипед с центром в точке (x_0, y_0, y'_k) . Пусть параллелепипеды $(\bar{P}_k)$ такие, что $(\bar{P}_i) \cap (\bar{P}_j) = \emptyset$, $i, j = \overline{1, m}$, $i \neq j$. Предположим, что в каждом параллелепипеде $(\bar{P}_k)$, $k = \overline{1, m}$, функция $F(x, y, y')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x(x, y, y')$, $F'_y(x, y, y')$, $F'_{y'}(x, y, y')$ и что $\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{(x_0, y_0, y'_k)} \neq 0$, $k = \overline{1, m}$. В этом случае точку

(x_0, y_0) будем называть *обыкновенной точкой* уравнения (1). Всякую иную точку области (D) , а также все точки границы области (D) будем называть *особыми точками* уравнения (1). Видим, что в каждом параллелепипеде $(\bar{P}_k)$, $k = \overline{1, m}$, выполнены условия теоремы об однозначной разрешимости уравнения (1) относительно y' (см. теорию неявных функций). Следовательно, существует окрестность точки $M_0(x_0, y_0) : \bar{u}_k(x_0, y_0)$, $k = \overline{1, m}$, в которой уравнение (1) определяет y' как однозначную непрерывную функцию от x и y : $y' = f_k(x, y)$, $k = \overline{1, m}$, причем функция $f_k(x, y)$ имеет в $\bar{u}_k(x_0, y_0)$ непрерывные частные производные $\frac{\partial f_k(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f_k(x, y)}{\partial y}$.

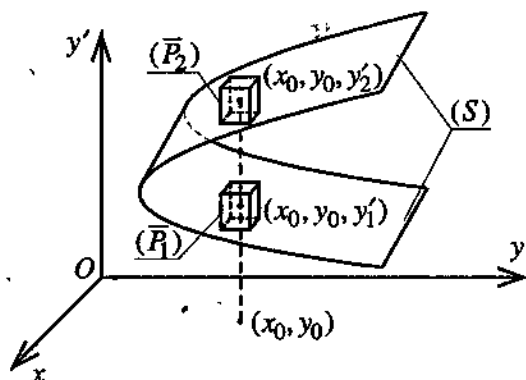


Рис. 2.3

Видим, таким образом, что если уравнение (1) рассматривать лишь в параллелепипеде $(\bar{P}_k)$ ($k = \overline{1, m}$), то мы будем находиться в условиях (уже изученного раньше) случая уравнения, разрешенного относительно производной.

Так как в $\bar{u}_k(x_0, y_0)$ функция $f_k(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f_k(x, y)}{\partial y}$, то по теореме о существовании и единственности решения уравнения, разрешенного относительно производной, заключаем, что через точку (x_0, y_0) проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения $y' = f_k(x, y)$, для которой $y'|_{M_0} = y'_k$ ($k = \overline{1, m}$).

Общий вывод: если точка $(x_0, y_0) \in (D)$ является обыкновенной точкой уравнения (1) и если уравнение (3) имеет m различных вещественных корней $y'_1, y'_2, \dots, y'_m$, то через точку (x_0, y_0) проходят ровно m интегральных кривых уравнения (1). Эти кривые расположены в пределах окрестности $u(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) , где

$$u(x_0, y_0) = \bigcap_{i=1}^m u_i(x_0, y_0).$$

Так как направления касательных к обсуждаемым кривым в точке (x_0, y_0) различны (поскольку они имеют различные угловые коэффициенты $y'_1, y'_2, \dots, y'_m$), то эти кривые в точке (x_0, y_0) не могут касаться друг друга (рис. 2.4). Заметим, что если соотношение (3) определяет бесконечное множество значений y' :

$$y'_1, y'_2, \dots, y'_m, \dots,$$

то через точку (x_0, y_0) будет, очевидно, проходить бесконечное множество интегральных кривых с различными направлениями касательных в этой точке. (Здесь предполагается, конечно, что точка (x_0, y_0) — обыкновенная для уравнения (1).)

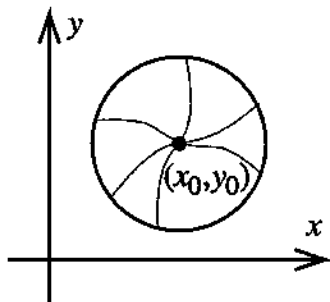


Рис. 2.4

В связи с тем, что соотношение (3) может давать для точки (x_0, y_0) более чем одно значение y' , постановка задачи Коши для уравнения (1) в этом случае нуждается в уточнении. Именно задача Коши для дифференциального уравнения (1) состоит в том, чтобы найти решение этого уравнения, которое проходит через точку (x_0, y_0) и имеет в этой точке определенное направление (одно из направлений, задаваемых в этой точке дифференциальным уравнением).

Замечание. Если точка $M_0(x_0, y_0) \in (\bar{D})$ является особой точкой для уравнения (1), то одному значению y'_k , являющемуся вещественным корнем уравнения (3), может отвечать не одна, а несколько интегральных кривых уравнения (1), проходящих через точку $M_0(x_0, y_0)$. Может оказаться также, что значению y'_k не будет отвечать никакая интегральная кривая уравнения (1); вместо кривой может получиться точка. Но если одному значению y'_k отвечает несколько интегральных кривых уравнения (1), проходящих через точку $M_0(x_0, y_0)$, то все эти кривые в точке M_0 имеют общую касательную (т. е. касаются друг друга в точке $M_0(x_0, y_0)$).

На рис. 2.5 представлена одна из возможных схем расположения интегральных кривых уравнения (1) в случае, когда точка $M_0(x_0, y_0)$ оказывается особой точкой этого уравнения. Если геометрическим местом особых точек уравнения (1) оказывается некоторая линия, то эту линию называют *особой линией* этого уравнения.

Из определения особых точек уравнения (1) ясно, что в области (D) их следует искать среди точек, являющихся проекциями на плоскость Oxy тех точек (x, y, y') , в окрестности которых не выполнены условия теоремы об однозначной разрешимости уравнения (1) относительно y' (см. теорию неявных функций).

Точками (x, y, y') , в окрестности которых не выполнены условия теоремы об однозначной разрешимости уравнения (1) относительно y' , являются, следовательно, либо точки, где одновременно

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0, \end{cases} \quad (4)$$

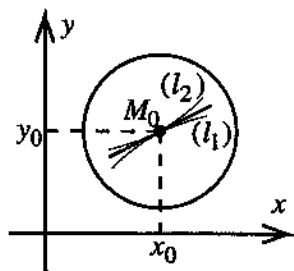


Рис. 2.5

либо точки, в окрестности которых нарушено условие существования и непрерывности функции $F(x, y, y')$ и ее частных производных $F'_x(x, y, y')$, $F'_y(x, y, y')$, $F'_{y'}(x, y, y')$.

Если предполагать, что функция $F(x, y, y')$ и ее частные производные по всем аргументам всюду существуют и непрерывны, то особые точки уравнения (1) в области (D) следует искать лишь среди точек, являющихся проекциями на плоскость Oxy тех точек (x, y, y') , в которых одновременно выполняются соотношения (4). Допустим, что каждое из уравнений системы (4) определяет в пространстве x, y, y' поверхность. Пусть это будут поверхности (S) и (S') . Равенства (4) будут выполняться одновременно вдоль линии (L) пересечения этих поверхностей (рис. 2.6). Проекция линии (L) на плоскость Oxy будет *особой линией* уравнения (1).

Заметим, что особая линия уравнения (1) представляет собой кривую, подозрительную на особое решение этого уравнения. Особая линия будет *особым решением* уравнения (1), если, во-первых, она является интегральной кривой этого уравнения и если, во-вторых, в каждой ее точке нарушается единственность решения задачи Коши.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$y^2 + (y')^2 - 1 = 0.$$

Здесь $F(x, y, y') = y^2 + (y')^2 - 1$, $F'_x = 0$, $F'_y = 2y$, $F'_{y'} = 2y'$. Видим, что $F(x, y, y')$ определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные во всем пространстве $Oxyy'$. Станем рассматривать систему

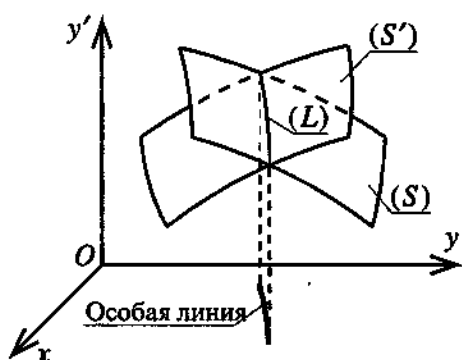


Рис. 2.6

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 + (y')^2 - 1 = 0, \\ 2y' = 0. \end{cases} \quad (\tilde{4})$$

Линию (L), определяемую системой ($\tilde{4}$), спроектируем на плоскость Oxy . Для этого нужно исключить y' из системы ($\tilde{4}$). Исключая y' из системы ($\tilde{4}$), получаем особую линию

$$y^2 = 1,$$

распадающуюся на две прямые: $y = 1$ и $y = -1$. Непосредственной подстановкой в исходное уравнение функций $y = 1$ и $y = -1$ убеждаемся, что они удовлетворяют этому уравнению. Значит, $y = 1$ и $y = -1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, — интегральные линии.

В нашем примере исходное уравнение удастся разрешить относительно y' : $y' = \pm\sqrt{1-y^2} \Rightarrow$ в полосе $\begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ -1 < y < 1 \end{cases}$ находим

$$\frac{dy}{\pm\sqrt{1-y^2}} = dx \Rightarrow \pm \arcsin y = x + C \Rightarrow y = \pm \sin(x + C) -$$

это общее решение заданного уравнения в области $\begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ -1 < y < 1. \end{cases}$

Решения $y = 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, и $y = -1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, являются особыми решениями исходного уравнения, так как в каждой точке этих решений нарушается единственность решения задачи Коши.

Отметим, что через каждую точку $(x_0, y_0) \in \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ -1 < y < 1 \end{cases}$ проходят ровно две интегральные кривые заданного уравнения с различными направлениями касательных в этой точке.

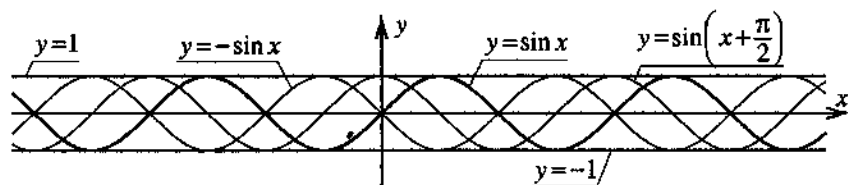


Рис. 2.7

§2. Метод введения параметра

Пусть имеется уравнение

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

Пусть (S) — поверхность, определяемая уравнением (1) в пространстве $Oxyy'$. Пусть (G) — некоторая область пространства $Oxyy'$, содержащая внутри себя поверхность (S) . Предполагается, что функция $F(x, y, y')$ определена, непрерывна в области (G) и имеет там непрерывные частные производные $F'_x(x, y, y')$, $F'_y(x, y, y')$, $F'_{y'}(x, y, y')$. Пусть, далее, функция $y = \varphi(x)$ является решением уравнения (1) в некотором промежутке $\langle a, b \rangle$ и $y_0 = \varphi(x_0)$, $y'_0 = \varphi'(x_0)$, причем точка $x_0 \in \langle a, b \rangle$, а точка $(x_0, y_0, y'_0) \in (S)$, а следовательно, принадлежит (G) .

Метод введения параметра основывается на следующих двух леммах.

Лемма 1. Если $\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{(x_0, y_0, y'_0)} \neq 0$, то в некоторой окрестности

$u(x_0)$ точки x_0 существует и непрерывна $\varphi''(x)$ ($u(x_0) \subset \langle a, b \rangle$).

► У нас (G) — область, и точка $(x_0, y_0, y'_0) \in (G)$. Следовательно, существует параллелепипед $(\bar{P})$, содержащий точку (x_0, y_0, y'_0) и содержащийся в (G) , в котором выполнены условия теоремы об однозначной разрешимости уравнения (1) относительно y' (см. теорию неявных функций). По этой теореме уравнение (1) в некоторой окрестности $V(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) определяет y' , как однозначную функцию от x и y :

$$y' = f(x, y), \quad (2)$$

причем функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывные част-

ные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ в $V(x_0, y_0)$. ($V(x_0, y_0) \subset (D)$, где (D) — проекция поверхности (S) на плоскость Oxy .)

По условию, $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $y|_{x=x_0} = y_0$ (т. е. $\varphi(x_0) = y_0$). Следовательно, существует окрестность $u(x_0)$ точки x_0 , в которой $y = \varphi(x)$ является решением уравнения (2) ($u(x_0) \subset \langle a, b \rangle$). Но тогда для $x \in u(x_0)$:

$$\phi'(x) \equiv f(x, \phi(x)). \quad (3)$$

Продифференцируем обе части (3) по x . Получим

$$\phi''(x) = f'_x(x, \phi(x)) + f'_y(x, \phi(x)) \cdot \phi'(x). \quad (4)$$

Здесь $f'_x(x, \phi(x))$, $f'_y(x, \phi(x))$, $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$ — непрерывны в $u(x_0)$ как суперпозиции непрерывных функций. А тогда из (4) следует, что $\phi''(x) \in C(u(x_0))$. ◀

Лемма 2. Если $\phi''(x)$ непрерывна в некоторой окрестности $u(x_0)$ точки x_0 ($u(x_0) \subset (a, b)$) и если $\phi''(x_0) \neq 0$, то решение $y = \phi(x)$ уравнения (1) представимо в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (5)$$

причем функции $x(t)$ и $y(t)$ в некоторой окрестности $V(t_0)$ точки t_0 имеют непрерывные производные и таковы, что

$$y'_x = t.$$

► Рассмотрим функцию $t = \phi'(x)$, $x \in u(x_0)$. По условию, $\phi''(x_0) \neq 0$. Пусть для определенности $\phi''(x_0) > 0$. Так как $\phi''(x)$ — непрерывная, то существует окрестность $\tilde{u}(x_0)$ точки x_0 , в которой $\phi''(x) > 0$ ($\tilde{u}(x_0) \subset u(x_0)$). Но тогда в $\tilde{u}(x_0)$ функция $t = \phi'(x)$ строго возрастающая. Следовательно, существует обратная ей функция $x = x(t)$, определенная в некоторой окрестности $V(t_0)$ точки t_0 ($t_0 = \phi'(x_0)$) и имеющая там непрерывную производную

$$x'_t, \text{ ибо } x'_t = \frac{1}{t'_x} = \frac{1}{\phi''(x)} \quad (\phi''(x) \neq 0).$$

Подставляя функцию $x = x(t)$ в равенство $y = \phi(x)$, получаем

$$y = \phi(x(t)), \text{ т. е. } y = y(t).$$

Ясно, что функция $y = y(t)$ определена и непрерывна в $V(t_0)$ как суперпозиция непрерывных функций и что она имеет в $V(t_0)$ непрерывную производную y'_t , ибо $y'_t = \phi'_x(x(t)) \cdot x'_t$ ($\phi'_x(x(t))$ — непрерывна как суперпозиция непрерывных функций, x'_t — непрерывна по доказанному выше).

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in V(t_0),$$

дают нужное параметрическое представление решения $y = \varphi(x)$ уравнения (1). ◀

Замечание 1.

1. Если $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, есть решение уравнения (1), подозрительное на особое, то $\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{(x, \varphi(x), \varphi'(x))} = 0$, и, следовательно, мы

не можем гарантировать существование и непрерывность $\varphi'(x)$ (см. лемму 1), а значит, не можем применить лемму 2, гарантирующую возможность нужного параметрического представления функции $y = \varphi(x)$ в виде (5).

2. Если уравнение (1) имеет решения вида $y = ax + b$, то $\varphi'(x) \equiv 0$ и, следовательно, лемма 2 не приложима. Значит, и в этом случае мы не можем гарантировать нужного параметрического представления этого решения.

Замечание 2. Методом введения параметра $t = y'$ очень часто выгодно искать решения дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно y' , но зато разрешенных относительно x или y , т. е. уравнений вида

$$x = g(y, y') \text{ или } y = f(x, y'). \quad (6)$$

Этот метод в принципе позволяет найти все решения таких уравнений, за исключением, быть может, решений вида $y = ax + b$ и решений, подозрительных на особое решение.

Но решения вида $y = ax + b$, если таковые имеются, могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов, а решения, подозрительные на особые, — методом, изложенным в предыдущем параграфе.

В качестве примера для отыскания решений дифференциального уравнения методом введения параметра рассмотрим уравнение

$$y = xy' + \varphi(y'), \quad (7)$$

где $\varphi(y')$ — любая функция, имеющая непрерывную производную $\varphi'_{y'}$. ((7) — уравнение Клеро.)

► Положим

$$y' = t \text{ (т. е. } dy = t dx \text{)}. \quad (8)$$

Тогда

$$y = xt + \varphi(t) \quad (9)$$

и, следовательно, $dy = tdx + xdt + \varphi'(t)dt$. Так как $dy = tdx$ (см. (8)), то получаем $xdt + \varphi'(t)dt = 0$ или $(x + \varphi'(t))dt = 0$. В последнем соотношении нельзя считать $dt = 0$, ибо dt является дифференциалом независимой переменной. Поэтому $x + \varphi'(t) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = -\varphi'(t). \quad (10)$$

В силу соотношений (9) и (10), получаем следующее решение исходного уравнения (7):

$$\begin{cases} x = -\varphi'(t), \\ y = -t\varphi'(t) + \varphi(t). \end{cases} \quad (11)$$

Выясним, не имеет ли уравнение (7) решений вида

$$y = ax + b. \quad (12)$$

Подстановка в уравнение (7) дает

$$ax + b = x \cdot a + \varphi(a).$$

Отсюда видим, что если $b = \varphi(a)$, где a — любое число (станем обозначать его через C), то (12) будет решением уравнения (7). Таким образом, уравнение (7) имеет еще решения вида

$$y = xC + \varphi(C). \quad (13)$$

(Решение (13) определено для всех значений C , при которых определена функция $\varphi(C)$; решение (13) представляет собой функцию от x и $C \Rightarrow$ (13) — общее решение уравнения (7).)

Выясним еще, не имеет ли уравнение (7) решений, подозрительных на особое.

Для нахождения таких решений нужно (как это следует из §1) рассмотреть систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = xy' + \varphi(y'), \\ 0 = x + \varphi'(y') \end{cases} \quad (14)$$

и исключить из нее y' .

Легко видеть, что результат исключения y' из системы (14) тождествен результату исключения параметра t из системы (11).

Вывод: решение (11) уравнения (7) подозрительно на особое решение этого уравнения.

§3. Примеры и задачи к главе 2

Задача 1. Найти все решения уравнения $(y')^2 + xy = y^2 + xy'$.

► Перепишем заданное уравнение в виде $(y')^2 - xy' + (xy - y^2) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y' = \frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} - xy + y^2} = \frac{x}{2} \pm \frac{\sqrt{(x-2y)^2}}{2} = \frac{x}{2} \pm \frac{x-2y}{2}.$$

Исходное уравнение распадается на два уравнения: $y' + y = x$ и $y' - y = 0$. $\mu = e^{\int dx} = e^x (\neq 0)$ и $\mu = e^{-\int dx} = e^{-x} (\neq 0)$ — интегрирующие множители для первого и второго из этих уравнений соответственно. После умножения обеих частей полученных уравнений на соответствующие им интегрирующие множители получаем уравнения

$$e^x y' + e^x y = x e^x \text{ и } e^{-x} y' - e^{-x} y = 0,$$

равносильные исходным. Последние могут быть записаны в виде

$$(e^x y)'_x = x e^x \text{ и } (e^{-x} y)'_x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x y = x e^x - e^x + C \text{ и } e^{-x} y = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = x - 1 + C e^{-x} \text{ и } y = C e^x.$$

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в формулах $y = x - 1 + C e^{-x}$; $y = C e^x$. ◀

Задача 2. Найти все решения уравнения $xy'(xy' + y) = 2y^2$.

► Перепишем заданное уравнение в виде $x^2(y')^2 + xy y' - 2y^2 = 0 \Rightarrow$ для $x \neq 0$ находим

$$y' = \frac{-xy \pm \sqrt{x^2 y^2 + 8x^2 y^2}}{2x^2} = \frac{-xy \pm 3xy}{2x^2} = \frac{-y \pm 3y}{2x} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ в левой и правой открытых полуплоскостях $y' = -2\frac{y}{x}$ и $y' = \frac{y}{x}$,

или $y' + \frac{2}{x}y = 0$ и $y' - \frac{1}{x}y = 0$. Из этих уравнений видно непосредственно, что

стационарно, что $\begin{cases} y = 0, \\ -\infty < x < 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} y = 0, \\ 0 < x < +\infty \end{cases}$ являются решениями каж-

дого из полученных уравнений. Замечаем, что оба уравнения являются линейными. $\mu = x^2$ — интегрирующий множитель для первого из них, а $\mu = \frac{1}{x}$ — интегрирующий множитель для второго; у нас

$x \neq 0$ в областях $(D_1) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < +\infty, \end{cases} (D_2) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < +\infty. \end{cases}$ После

умножения обеих частей полученных уравнений на соответствующие им интегрирующие множители получаем уравнения

$$x^2 y' + 2xy = 0 \text{ и } \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 0. \text{ Последние могут быть записаны}$$

в виде $(x^2 y)' = 0$ и $\left(\frac{y}{x}\right)' = 0 \Rightarrow x^2 y = C$ и $\frac{y}{x} = C$ в (D_k) , $k = 1, 2$.

Ответ. Все решения заданного уравнения в областях (D_k) , $k = 1, 2$, содержатся в формулах $x^2 y = C$ и $y = Cx$. ◀

Задача 3. Найти все решения уравнения $x(y')^2 - 2yy' + x = 0$.

► Имеем для $x \neq 0$: $y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - x^2}}{x}$. Ясно, что должно

быть $y^2 - x^2 \geq 0$. Легко проверить,

что функции $\begin{cases} y = \pm x, \\ -\infty < x < 0 \end{cases}$ и

$\begin{cases} y = \pm x, \\ 0 < x < +\infty \end{cases}$ являются решениями полученного уравнения. Станем рассматривать уравнения

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1} \text{ и } y' = \frac{y}{x} - \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1} \text{ в}$$

областях:

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ x < y < +\infty, \end{cases} (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -x < y < +\infty, \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < x, \end{cases} (D_4) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < -x. \end{cases}$$

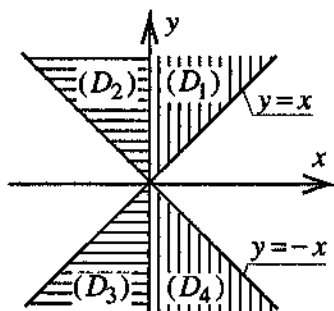


Рис. 2.8. К задаче 3

Оба этих уравнения являются однородными. Делаем замену: $y = u \cdot x$ ($u(x)$ — новая неизвестная функция). Тогда $y' = xu' + u$. Относительно новой неизвестной функции полученные уравнения станут такими:

$$xu'_x = \sqrt{u^2 - 1} \text{ и } xu'_x = -\sqrt{u^2 - 1}. \quad (*)$$

Отметим, что в каждой из областей (D_k) , $k = \overline{1, 4}$: $u^2 > 1$, $x \neq 0$. Следовательно, уравнения $(*)$ равносильны соответственно уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} &= \frac{dx}{x} \text{ и } \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln|u + \sqrt{u^2 - 1}| &= \ln|x| + \ln|C| \text{ и } \ln|u + \sqrt{u^2 - 1}| = -\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow \\ \Rightarrow u + \sqrt{u^2 - 1} &= Cx \text{ и } u + \sqrt{u^2 - 1} = \frac{C}{x}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к прежним переменным, получаем

$$y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2 \text{ и } y + \sqrt{y^2 - x^2} = C$$

в каждой (D_k) , $k = \overline{1, 4}$.

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формулах: $y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2$; $y + \sqrt{y^2 - x^2} = C$ в (D_k) , $k = \overline{1, 4}$, и $y = x$, $y = -x$, $x \in (-\infty, +\infty)$. ◀

Задача 4. Найти все решения уравнения $x(y')^2 - 2yy' + y = 0$.

▶ Имеем для $x \neq 0$: $y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - xy}}{x}$. Ясно, что должно быть

$y^2 - xy \geq 0$. Легко проверить, что функции

$$\begin{cases} y = 0, \\ -\infty < x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ 0 < x < +\infty; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x, \\ -\infty < x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x, \\ 0 < x < +\infty \end{cases}$$

являются решениями полученного уравнения.

Станем рассматривать уравнения

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}}, \quad y' = \frac{y}{x} - \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}}$$

в областях:

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ x < y < +\infty; \end{cases}$$

$$(D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\infty < y < x; \end{cases}$$

$$(D_4) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < 0. \end{cases}$$

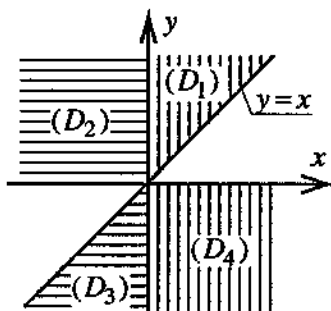


Рис. 2.9. К задаче 4

Оба эти уравнения являются однородными. Делаем замену: $y = ux$ ($u(x)$ — новая неизвестная функция). Тогда $y' = u'x + u$. Относительно новой неизвестной функции полученные уравнения станут такими:

$$xu'_x = \sqrt{u^2 - u}; \quad xu'_x = -\sqrt{u^2 - u}. \quad (*)$$

Отметим, что в каждой из областей (D_k) , $k = \overline{1, 4}$: $x \neq 0$ и $u^2 - u > 0$. Поэтому уравнения $(*)$ равносильны соответственно уравнениям

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 - u}} = \frac{dx}{x} \quad \text{и} \quad \frac{du}{\sqrt{u^2 - u}} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \left| u - \frac{1}{2} + \sqrt{u^2 - u} \right| = \ln |x| + \ln |C|;$$

$$\ln \left| u - \frac{1}{2} + \sqrt{u^2 - u} \right| = -\ln |x| + \ln |C| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u - \frac{1}{2} + \sqrt{u^2 - u} = Cx \quad \text{и} \quad u - \frac{1}{2} + \sqrt{u^2 - u} = \frac{C}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + \sqrt{y^2 - xy} = \frac{x}{2} + Cx^2 \quad \text{и} \quad y + \sqrt{y^2 - xy} - \frac{x}{2} = C,$$

в каждой (D_k) , $k = \overline{1, 4}$.

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формулах:

$$y + \sqrt{y^2 - xy} = \frac{x}{2} + Cx^2; \quad y + \sqrt{y^2 - xy} - \frac{x}{2} = C \text{ в } (D_k), \quad k = \overline{1, 4};$$

$$y = 0 \text{ и } y = x, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad \blacktriangleleft$$

Задача 5. Найти все решения уравнения $(y')^2 + x - 2y = 0$.

► Имеем $y' = \pm\sqrt{2y - x}$. Ясно, что должно быть $2y - x \geq 0$,

т. е. $y \geq \frac{x}{2}$. Станем рассматривать уравнения

$$y' = \sqrt{2y - x} \text{ и } y' = -\sqrt{2y - x}$$

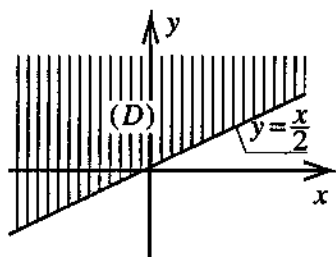


Рис. 2.10. К задаче 5

в области $(D) = \left\{ \begin{array}{l} -\infty < x < +\infty, \\ x/2 < y < +\infty. \end{array} \right.$ Сде-

лаем замену, положив $2y - x = u^2$ ($u(x)$ — новая неизвестная функция).

Ясно, что $u > 0$ в (D) . Получим

$$2y' - 1 = 2uu' \Rightarrow y' = uu' + \frac{1}{2}. \text{ Относи-}$$

тельно новой неизвестной функции полученные уравнения станут таки-
ми:

$$uu' = u - \frac{1}{2} \text{ и } uu' = -u - \frac{1}{2}. \quad (*)$$

Эти уравнения являются уравнениями с разделяющимися пере-

менными. Так как $u - \frac{1}{2} = 0$ при $u = \frac{1}{2}$, а $-\left(u + \frac{1}{2}\right) \neq 0 (< 0)$ в (D) ,

то из $(*)$ находим

$$\frac{u}{u - \frac{1}{2}} du = dx \text{ (если } u \neq \frac{1}{2}) \text{ и } -\frac{u}{u + \frac{1}{2}} du = dx. \quad (**)$$

Отметим, что $u = \frac{1}{2}$ является решением первого из уравнений $(*)$

(это соответствует решению $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{8}$ исходного уравнения).

Из уравнений $(**)$ получаем соответственно

$$u + \frac{1}{2} \ln \left| u - \frac{1}{2} \right| = x + C \quad (\text{если } u \neq \frac{1}{2}) \quad \text{и} \quad -u + \frac{1}{2} \ln \left| u + \frac{1}{2} \right| = x + C.$$

Возвращаясь к прежним переменным, находим

$$\sqrt{2y-x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{2} - \sqrt{2y-x} \right| = x + C, \quad \text{если } y \neq \frac{x}{2} + \frac{1}{8},$$

и

$$-\sqrt{2y-x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{2} + \sqrt{2y-x} \right| = x + C.$$

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формулах:

$$\sqrt{2y-x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{2} - \sqrt{2y-x} \right| = x + C \quad \text{в } (D), \quad \text{где } y \neq \frac{x}{2} + \frac{1}{8};$$

$$-\sqrt{2y-x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{2} + \sqrt{2y-x} \right| = x + C \quad \text{в } (D);$$

$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{8}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad \blacktriangleleft$$

Задача 6. Найти все решения уравнения $(y')^3 + (x+2)e^y = 0$.

► Имеем $y' = -(x+2)^{1/3} e^{y/3}$. Это — уравнение с разделяющимися переменными. Так как $e^{y/3} \neq 0$, то получаем уравнение $e^{-y/3} dy + (x+2)^{1/3} dx = 0$, равносильное исходному. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow -3e^{-y/3} + \frac{3}{4}(x+2)^{4/3} = \tilde{C} \Rightarrow 4e^{-\frac{y}{3}} = (x+2)^{\frac{4}{3}} + C.$$

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формуле $4e^{-y/3} = (x+2)^{4/3} + C$. $\blacktriangleleft$

Задача 7. Найти все решения уравнения $(y')^2 - 2xy' = 8x^2$.

► Имеем $(y')^2 - 2xy' - 8x^2 = 0 \Rightarrow y' = x \pm \sqrt{x^2 + 8x^2} = x \pm 3x$. Видим, что исходное уравнение распадается на два уравнения:

$$y' = 4x \quad \text{и} \quad y' = -2x \Rightarrow y = 2x^2 + C \quad \text{и} \quad y = -x^2 + C.$$

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формулах: $y = 2x^2 + C$ и $y = -x^2 + C$. $\blacktriangleleft$

Задача 8. Найти все решения уравнения $(xy' + 3y)^2 = 7x$.

► Из вида уравнения следует непосредственно, что должно быть $x \geq 0$. Имеем $xy' + 3y = \pm\sqrt{7}\sqrt{x} \Rightarrow$ для $x > 0$:

$$y' + \frac{3}{x}y = \pm \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{x}}. \quad (*)$$

Полученные уравнения (*) являются линейными. Они равносильны исходному в открытой правой полуплоскости, т. е. при $x > 0$.

$$\mu = e^{\int p(x) dx} = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3 \ln x} = x^3$$

— интегрирующий множитель для уравнений (*). Отметим, что $\mu \neq 0$ для $x > 0$. После умножения обеих частей уравнений (*) на $\mu = x^3$ будем иметь

$$\begin{aligned} x^3 y' + 3x^2 y &= \pm \sqrt{7} x^{5/2} \Leftrightarrow (x^3 y)'_x = \pm \sqrt{7} x^{5/2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x^3 y &= \pm \frac{2}{\sqrt{7}} x^{7/2} + C \Rightarrow y = Cx^{-3} \pm \frac{2}{\sqrt{7}} \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формулах $y = Cx^{-3} + 2\sqrt{\frac{x}{7}}$ и $y = Cx^{-3} - 2\sqrt{\frac{x}{7}}$, $x \in (0, +\infty)$. ◀

Задача 9. Найти все решения уравнения $(y')^2 - 2yy' = y^2(e^x - 1)$.

► Имеем

$$\begin{aligned} (y')^2 - 2yy' + y^2 &= y^2 e^x \Leftrightarrow (y' - y)^2 = y^2 e^x \Rightarrow \\ \Rightarrow y' - y &= \pm ye^{x/2} \Rightarrow y' = y(1 \pm e^{x/2}). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением полученных, а также и исходного уравнений. Станем рассматривать уравнения $y' = y(1 \pm e^{x/2})$ для $y \neq 0$, т. е. в открытых верхней и нижней полуплоскостях. Эти уравнения в областях $(D_1) = \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty \end{cases}$ и $(D_2) = \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ -\infty < y < 0 \end{cases}$ равносильны уравнениям

$$\frac{y'}{y} = 1 + e^{x/2} \text{ и } \frac{y'}{y} = 1 - e^{x/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = x + 2e^{x/2} + \ln|C| \text{ и } \ln|y| = x - 2e^{x/2} + \ln|C| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = Ce^{x+2e^{x/2}} \text{ и } y = Ce^{x-2e^{x/2}}.$$

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формулах $y = Ce^{x+2e^{x/2}}$, $y = Ce^{x-2e^{x/2}}$ в $(D_1) \cup (D_2)$ и $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$. ◀

Задача 10. Найти все решения уравнения $y'(2y - y') = y^2 \sin^2 x$.

► Имеем

$$y'(2y - y') - y^2 \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow (y')^2 - 2yy' + y^2(1 - \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y' - y)^2 = y^2 \cos^2 x \Rightarrow y' - y = \pm y \cos x \Rightarrow y' = (1 \pm \cos x)y.$$

Легко видеть, что функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением полученных, а также и исходного уравнений. Станем рассматривать уравнения

$$y' = (1 + \cos x)y \text{ и } y' = (1 - \cos x)y \quad (*)$$

в областях $(D_1) = \left\{ \begin{matrix} -\infty < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty \end{matrix} \right.$ и $(D_2) = \left\{ \begin{matrix} -\infty < x < +\infty, \\ -\infty < y < 0. \end{matrix} \right.$ Уравнения

(*) в $(D_1) \cup (D_2)$ равносильны соответственно уравнениям

$$\frac{y'}{y} = 1 + \cos x \text{ и } \frac{y'}{y} = 1 - \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = x + \sin x + \ln|C| \text{ и } \ln|y| = x - \sin x + \ln|C| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = Ce^{x+\sin x} \text{ и } y = Ce^{x-\sin x}.$$

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формулах: $y = Ce^{x+\sin x}$, $y = Ce^{x-\sin x}$ в $(D_1) \cup (D_2)$ и $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$. ◀

Задача 11. Найти все решения уравнения $(y')^4 + y^2 = y^4$.

► Видим непосредственно, что $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, — решение исходного уравнения. Имеем, далее,

$$(y')^4 = y^2(y^2 - 1) \Rightarrow (y')^2 = \pm y\sqrt{y^2 - 1}.$$

Ясно, что если $y \neq 0$, то должно быть $y^2 - 1 \geq 0$, т. е. должно быть: либо $y \in [1, +\infty)$, либо $y \in (-\infty, -1]$. Так как левая часть последнего соотношения неотрицательна, то для $y \in [1, +\infty)$: $(y')^2 = y\sqrt{y^2 - 1}$, а для $y \in (-\infty, -1]$: $(y')^2 = -y\sqrt{y^2 - 1}$. Замечаем, что функция $y = 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением первого из полученных уравнений, а функция $y = -1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением второго из этих уравнений. Отметим, что обе эти функции являются решениями исходного уравнения.

Станем рассматривать уравнение $(y')^2 = y\sqrt{y^2 - 1}$ в области

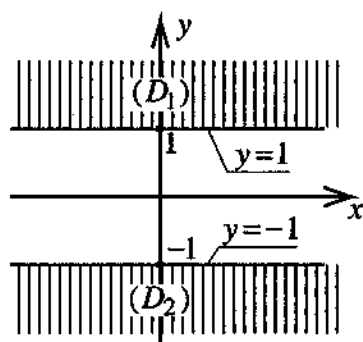


Рис. 2.11. К задаче 11

$$(D_1) = \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ 1 < y < +\infty, \end{cases} \text{ а уравнение}$$

$$(y')^2 = -y\sqrt{y^2 - 1} \quad \text{в области}$$

$$(D_2) = \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ -\infty < y < -1. \end{cases} \text{ В области } (D_1)$$

следует рассмотреть уравнения

$$y' = \pm \sqrt{y}(y^2 - 1)^{1/4}, \quad (*)$$

а в области (D_2) — уравнения

$$y' = \pm \sqrt{-y}(y^2 - 1)^{1/4}. \quad (**)$$

Заметим, что если в уравнениях $(**)$ сделать замену $y = -\tilde{y}$, то относительно функции $\tilde{y}$ будем иметь уравнения $\tilde{y}' = \mp \sqrt{\tilde{y}}(\tilde{y}^2 - 1)^{1/4}$, где $\tilde{y} \in (1, +\infty)$. Видим, что для $\tilde{y}$ получены точно такие же уравнения, как и уравнения $(*)$ для функции y . Следовательно, если будут найдены решения уравнений $(*)$, то тем самым будут найдены и решения уравнений относительно $\tilde{y}$ (а значит, и решения уравнений $(**)$). В области (D_1) уравнения $(*)$ равносильны уравнениям

$$\frac{dy}{\sqrt{y}(y^2 - 1)^{1/4}} = \pm dx \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{y} + \sqrt[4]{y^2 - 1}}{\sqrt{y} - \sqrt[4]{y^2 - 1}} \right| - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{y^2 - 1}}{\sqrt{y}} = C \pm x.$$

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формулах:

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{y} + \sqrt[4]{y^2 - 1}}{\sqrt{y} - \sqrt[4]{y^2 - 1}} \right| - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{y^2 - 1}}{\sqrt{y}} = C \pm x \text{ в области } (D_1),$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{-y} + \sqrt[4]{y^2 - 1}}{\sqrt{-y} - \sqrt[4]{y^2 - 1}} \right| - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{y^2 - 1}}{\sqrt{-y}} = C \pm x \text{ в области } (D_2),$$

$y = 0, x \in (-\infty, +\infty); y = 1, x \in (-\infty, +\infty); y = -1, x \in (-\infty, +\infty).$ ◀

Задача 12. Найти все решения уравнения $x(y - xy')^2 = x(y')^2 - 2yy'$.

► Непосредственно из заданного уравнения видно, что $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является его решением. Для $x \neq 0$ имеем:

$$\begin{aligned} (y - xy')^2 &= (y')^2 - 2y' \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} \Rightarrow (y - xy')^2 = \left(y' - \frac{y}{x} \right)^2 - \frac{y^2}{x^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow (y - xy')^2 &= \frac{(xy' - y)^2}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} \Rightarrow (xy' - y)^2 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) = \frac{y^2}{x^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow (xy' - y)^2 &= \frac{y^2}{1 - x^2}, \text{ если } x \neq \pm 1. \end{aligned}$$

Левая часть последнего соотношения неотрицательна. Следовательно, неотрицательной должна быть и правая часть. А это будет лишь тогда, когда $x \in (-1, 1)$.

Станем рассматривать полученное уравнение в областях:

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -1 < x < 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} -1 < x < 0, \\ -\infty < y < 0; \end{cases} \quad (D_4) = \begin{cases} 0 < x < 1, \\ -\infty < y < 0. \end{cases}$$

В каждой из областей (D_k) , $k = \overline{1, 4}$, будем иметь

$$xy' - y = \pm \frac{y}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow y' = \frac{y}{x} \pm \frac{y}{x\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \pm \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow$$

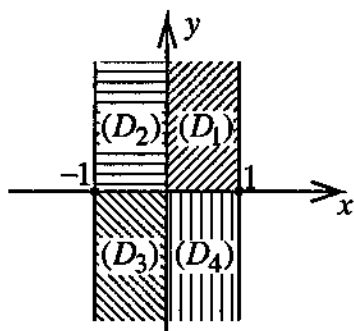


Рис. 2.12. К задаче 12

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln|x| \mp$$

$$\mp \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \right| - \ln|C| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1) Cy = \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$$

$$\Rightarrow Cy = \frac{x^2(1 - \sqrt{1 - x^2})}{x^2} \Rightarrow$$

$$Cy = 1 - \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow$$

$$(Cy - 1)^2 + x^2 = 1; 2) Cy = x \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \Rightarrow (Cy - 1)^2 + x^2 = 1.$$

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формулах $(Cy - 1)^2 + x^2 = 1$ в областях (D_k) , $k = \overline{1, 4}$, и $y = 0$, $x \in (-\infty, \infty)$. ◀

Задача 13. Найти все решения уравнения $y(xy' - y)^2 = y - 2xy'$.

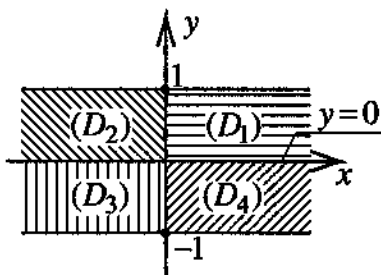


Рис. 2.13. К задаче 13

► Из заданного уравнения видно непосредственно, что функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является его решением. Разрешая исходное уравнение относительно y' , находим для $x \neq 0$ и $y \neq 0$:

$$y' = \frac{y^2 - 1}{xy} \pm \frac{\sqrt{1 - y^2}}{xy}. \quad (*)$$

Из полученных уравнений видим, что должно быть $1 - y^2 \geq 0 \Rightarrow$

$y \in [-1, 0) \cup (0, 1]$. Замечаем, что функции $y = 1$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, и $y = -1$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, являются решениями полученных, а также исходного уравнений. Станем рассматривать уравнения (*) в областях

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ 0 < y < 1; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ 0 < y < 1, \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -1 < y < 0, \end{cases} \quad (D_4) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -1 < y < 0. \end{cases}$$

Из уравнений (*) находим

$$yy' = \frac{1}{x} \left(y^2 - 1 \pm \sqrt{1 - y^2} \right) \text{ в } (D_k), \quad k = \overline{1, 4}.$$

Сделаем замену: $1 - y^2 = u^2$ ($u(x)$ — новая неизвестная функция; $u \neq 0$ для $y \in (-1, 0) \cup (0, 1)$). Относительно функции $u(x)$ получаем уравнения

$$-uu'_x = \frac{1}{x}(-u^2 \pm u) \Rightarrow u'_x = \frac{1}{x}(u \pm 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1) \ln|u+1| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow u+1 = Cx \Rightarrow (Cx-1)^2 = 1-y^2;$$

$$2) \ln|u-1| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow u-1 = Cx \Rightarrow (Cx+1)^2 = 1-y^2.$$

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формулах:

$$(Cx-1)^2 + y^2 = 1, \quad (Cx+1)^2 + y^2 = 1 \text{ в областях } (D_k), \quad k = \overline{1, 4};$$

$$y = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$y = -1, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty); \quad y = 1, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty). \quad \blacktriangleleft$$

Задача 14. Найти все решения уравнения $yy'(yy' - 2x) = x^2 - 2y^2$.

► Сделаем замену, положив $y^2 = u$ ($u(x)$ — новая неизвестная функция; $u \geq 0$). Тогда $yy'_x = \frac{1}{2}u'_x$. Относительно новой неизвестной функции исходное уравнение станет таким:

$$(u')^2 - 4xu' + (8u - 4x^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (u')^2 - 4xu' + 4x^2 + 8(u - x^2) = 0 \Leftrightarrow (2x - u')^2 + 8(u - x^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x - u')^2 = 8(x^2 - u). \quad (*)$$

Так как левая часть полученного уравнения неотрицательна, то неотрицательной должна быть и правая часть этого уравнения, т. е. должно быть $x^2 - u \geq 0 \Rightarrow x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq x^2$. Это неравенство выполняется в областях:

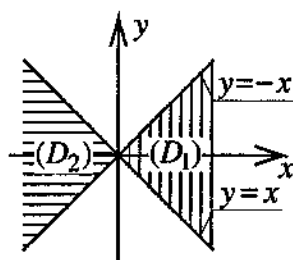


Рис. 2.14. К задаче 14

$$(\bar{D}_1) = \begin{cases} 0 \leq x < +\infty, \\ -x \leq y \leq x; \end{cases}$$

$$(\bar{D}_2) = \begin{cases} -\infty \leq x \leq 0, \\ x \leq y \leq -x. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что функция $u = x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением уравнения (*) (а значит, функции $y = x$, $x \in (-\infty, +\infty)$; $y = -x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, являются решениями исходного уравнения). Заметим, что в областях (D_k) , $k = 1, 2$, $x^2 - u > 0$. Поэтому уравнение (*) может быть записано в виде

$$\frac{(2x - u')^2}{8(x^2 - u)} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{(2x - u')}{\sqrt{x^2 - u}} = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - u)'}{2\sqrt{x^2 - u}} = \pm\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - u} = \pm\sqrt{2}x + C \Rightarrow \sqrt{x^2 - y^2} = C \pm \sqrt{2}x.$$

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формулах:

$$\sqrt{x^2 - y^2} = C \pm \sqrt{2}x \text{ в } (D_k), k = 1, 2;$$

$$y = -x, x \in (-\infty, +\infty); y = x, x \in (-\infty, +\infty). \blacktriangleleft$$

Задача 15. Найти все решения уравнения $(y')^2 + 4xy' - y^2 - 2x^2y = x^4 - 4x^2$.

► Имеем

$$y' = -2x \pm \sqrt{4x^2 + y^2 + 2x^2y + x^4 - 4x^2} = -2x \pm \sqrt{(y + x^2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' + 2x = \pm(y + x^2). \quad (*)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $y = -x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением полученных, а также исходного уравнений. Станем рассматривать уравнения (*) для $y \neq -x^2$. Тогда уравнения (*) будут равносильны уравнениям

$$\frac{y' + 2x}{y + x^2} = \pm 1 \Rightarrow \frac{(y + x^2)'}{y + x^2} = \pm 1 \Rightarrow \ln|y + x^2| = \pm x + \ln|C| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + x^2 = Ce^{\pm x}. \quad (**)$$

Отметим, что решение $y = -x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$, содержится в соотношении (**) при $C = 0$.

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формуле $y = Ce^{\pm x} - x^2$. ◀

Задача 16. Найти все решения уравнения $y(y - 2xy')^2 = 2y'$.

► Из заданного уравнения видно, что функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением исходного уравнения. Разрешая исходное уравнение относительно y' , находим для $x \neq 0$ и $y \neq 0$:

$$y' = \frac{2xy^2 + 1 \pm \sqrt{4xy^2 + 1}}{4x^2 y}. \quad (*)$$

Из полученных уравнений (*) заключаем, что должно быть

$$4xy^2 + 1 \geq 0.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функции

$$y = \frac{1}{2\sqrt{-x}}, \quad x \in (-\infty, 0),$$

и

$$y = -\frac{1}{2\sqrt{-x}}, \quad x \in (-\infty, 0),$$

являются решениями уравнений (*), а также решениями исходного уравнения. Станем рассматривать уравнения (*) в областях:

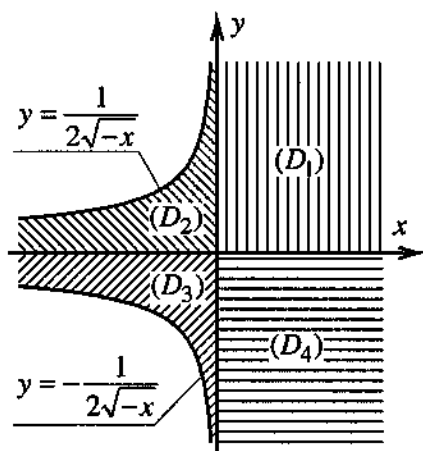


Рис. 2.15. К задаче 16

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ 0 < y < \frac{1}{2\sqrt{-x}}; \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} -\infty < x < 0, \\ -\frac{1}{2\sqrt{-x}} < y < 0; \end{cases} \quad (D_4) = \begin{cases} 0 < x < +\infty, \\ -\infty < y < 0. \end{cases}$$

Запишем уравнения (*) в виде

$$4x^2 y y' = 2xy^2 + 1 \pm \sqrt{4xy^2 + 1}. \quad (**)$$

Сделаем замену, положив $u = 4xy^2 + 1$ ($u(x)$ — новая неизвестная функция; $u(x) > 0$ в (D_k) , $k = \overline{1, 4}$). При такой замене

$u' = 4y^2 + 8xy y' \Rightarrow y y' = \frac{u' - 4y^2}{8x}$; $2xy^2 = \frac{u - 1}{2}$. Относительно новой неизвестной функции уравнения (**) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} \cdot x &= 2\sqrt{u} \cdot (\sqrt{u} \pm 1) \Leftrightarrow \frac{du}{2\sqrt{u}(\sqrt{u} \pm 1)} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d \ln |\sqrt{u} \pm 1| = d \ln |x| \Rightarrow \ln |\sqrt{u} \pm 1| = \ln |x| + \ln |C| \Rightarrow \\ \frac{du}{x} &= \frac{1}{x} dx \\ &\Rightarrow \sqrt{u} \pm 1 = Cx \Rightarrow \sqrt{u} = (Cx \mp 1) \Rightarrow \sqrt{4xy^2 + 1} = Cx \mp 1. \end{aligned}$$

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в формулах

$$\sqrt{4xy^2 + 1} = Cx \mp 1 \text{ в } (D_k), \quad k = \overline{1, 4};$$

$$y = \pm \frac{1}{2\sqrt{-x}}, \quad x \in (-\infty, 0); \quad y = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad \blacktriangleleft$$

Задача 17. Методом введения параметра решить уравнение $x = (y')^3 + y'$.

► Полагаем $y' = t$ ($\Leftrightarrow dy = t dx$). Тогда $x = t^3 + t \Rightarrow dx = (3t^2 + 1) dt$. У нас $dy = t dx$. Следовательно, $dy = t(3t^2 + 1) dt \Rightarrow y = \frac{3}{4} t^4 + \frac{t^2}{2} + C$.

$$\begin{cases} x = t^3 + t, \\ y = \frac{3}{4} t^4 + \frac{1}{2} t^2 + C \end{cases} \text{ — общее решение исходного уравнения в}$$

параметрической форме.

1) Проверим, не имеет ли исходное уравнение решений вида $y = ax + b$. Подстановка этой функции в заданное уравнение дает $x = a^3 + a$. Видим, что тождественного равенства не получается. Значит, исходное уравнение не имеет решений вида $y = ax + b$.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. Имеем

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - (y')^3 - y' = 0, \\ -3(y')^2 - 1 = 0 \Rightarrow (y')^2 = -\frac{1}{3} \text{ (невозможно)}. \end{cases}$$

Следовательно, решений, подозрительных на особое, заданное уравнение не имеет.

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в соотношениях

$$\begin{cases} x = t^3 + t, \\ y = \frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + C. \end{cases} \blacktriangleleft$$

Задача 18. Найти все решения уравнения: $x((y')^2 - 1) = 2y'$ (методом введения параметра).

► Из заданного уравнения находим при $y' \neq \pm 1$

$$x = \frac{2y'}{(y')^2 - 1}.$$

Полагаем $y' = t$ ($\Leftrightarrow dy = tdx$). Получаем

$$x = \frac{2t}{t^2 - 1}, \quad t \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

У нас $dy = tdx$. Следовательно,

$$\begin{aligned} dy &= -\frac{2t(t^2 + 1)}{(t^2 - 1)^2} dt \Leftrightarrow dy = -\frac{(t^2 + 1)d(t^2 - 1)}{(t^2 - 1)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow dy = -\frac{[(t^2 - 1) + 2]d(t^2 - 1)}{(t^2 - 1)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow dy = -\frac{d(t^2 - 1)}{t^2 - 1} - 2\frac{d(t^2 - 1)}{(t^2 - 1)^2} \Rightarrow y = -\ln|t^2 - 1| + \frac{2}{t^2 - 1} + C. \end{aligned}$$

Таким образом, получили

$$\begin{cases} x = \frac{2t}{t^2 - 1}, \\ y = \frac{2}{t^2 - 1} - \ln|t^2 - 1| + C, \end{cases} \quad t \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

Это — общее решение заданного уравнения в параметрической форме.

1) Проверим, не имеет ли исходное уравнение решений вида $y = ax + b$. Подстановка этой функции в заданное уравнение дает $x(a^2 - 1) = 2a$. Видим, что тождественного равенства не получается. Значит, исходное уравнение не имеет решений вида $y = ax + b$.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. Для этого вводим в рассмотрение систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x((y')^2 - 1) - 2y' = 0, \\ 2xy' - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{(невозможно, если } x=0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ x\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) - \frac{2}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ -\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 \quad (\text{невозможно}). \end{cases}$$

Следовательно, решений, подозрительных на особое, заданное уравнение не имеет.

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в соотношениях

$$\begin{cases} x = \frac{2t}{t^2 - 1}, \\ y = \frac{2}{t^2 - 1} - \ln|t^2 - 1| + C, \end{cases} \quad t \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty). \blacktriangleleft$$

Задача 19. Найти все решения уравнения $x = y' \sqrt{1 + (y')^2}$ (методом введения параметра).

► Полагаем $y' = t$ ($\Leftrightarrow dy = tdx$). Тогда $x = t\sqrt{1+t^2}$. У нас $dy = tdx$. Следовательно,

$$\begin{aligned} dy &= t \left(\sqrt{1+t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} \right) dt = t \left(\sqrt{1+t^2} + \frac{(t^2+1)-1}{\sqrt{1+t^2}} \right) dt = \\ &= t \left(2\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right) dt \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow dy = \sqrt{1+t^2} d(1+t^2) - \frac{1}{2} \frac{d(1+t^2)}{\sqrt{1+t^2}} \Rightarrow y = \frac{2}{3} (1+t^2)^{3/2} - \sqrt{1+t^2} + C.$$

Получили, таким образом,

$$\begin{cases} x = t\sqrt{1+t^2}, \\ y = \frac{2}{3}(1+t^2)^{3/2} - \sqrt{1+t^2} + C, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение решений вида $y = ax + b$. Подстановка этой функции в заданное уравнение дает

$x = a\sqrt{1+a^2}$. Видим, что тождественного равенства не получается. Значит, исходное уравнение не имеет решений вида $y = ax + b$.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое? Для этого рассматриваем систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_y(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y'\sqrt{1+(y')^2} = 0, \\ -\sqrt{1+(y')^2} - \frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = 0 \Rightarrow 1 + 2(y')^2 = 0 \text{ (невозможно)}. \end{cases}$$

Значит, решений, подозрительных на особое, заданное уравнение не имеет.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях

$$\begin{cases} x = t\sqrt{1+t^2}, \\ y = \frac{2}{3}(1+t^2)^{3/2} - \sqrt{1+t^2} + C, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty). \quad \blacktriangleleft$$

Задача 20. Найти все решения уравнения $y'(x - \ln y) = 1$ (методом введения параметра).

► Из заданного уравнения следует, что должно быть $y' > 0$.

Положим $y' = t$ ($t > 0$). Тогда $x = \ln t + \frac{1}{t}$. У нас $dy = tdx$. Поэтому

$$dy = t \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt = dt - \frac{dt}{t} \Rightarrow y = t - \ln t + C$$

(у нас $t > 0$). Таким образом, получили

$$\begin{cases} x = \ln t + \frac{1}{t}, \\ y = t - \ln t + C, \end{cases} \quad t \in (0, +\infty).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение решений вида $y = ax + b$. Подстановка этой функции в заданное уравнение дает $a(x - \ln a) = 1$. Видим, что тождественного равенства нет. Значит, исходное уравнение не имеет решений вида $y = ax + b$.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью составим систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'(x - \ln y') - 1 = 0, \\ x - \ln y' - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y' = 1, \text{ а значит, } x = 1.$$

$x = 1$ — не есть решение исходного уравнения. Следовательно, исходное уравнение не имеет решений, подозрительных на особое.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях

$$\begin{cases} x = \ln t + \frac{1}{t}, \\ y = t - \ln t + C, \end{cases} \quad t \in (0, +\infty). \quad \blacktriangleleft$$

Задача 21. Найти все решения уравнения $y = (y')^2 + 2(y')^3$ (методом введения параметра).

► Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow dy = t dx$). Тогда

$$y = t^2 + 2t^3 \quad (*)$$

$\Rightarrow dy = (2t + 6t^2) dt$. У нас $dy = t dx$. Будем иметь, следовательно,

$$t dx = 2t(1 + 3t) dt. \quad (**)$$

Замечаем, что если $t = 0$, то из (*): $y = 0$. Непосредственной подстановкой в заданное уравнение убеждаемся, что функция $y = 0$, $x = (-\infty, +\infty)$, является его решением. Для $t \neq 0$, из соотношения (**), получаем

$$dx = 2(1 + 3t) dt \Rightarrow x = 2t + 3t^2 + C.$$

Таким образом, получили

$$\begin{cases} x = 2t + 3t^2 + C, \\ y = t^2 + 2t^3, \end{cases} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение еще решений вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в исходное уравнение дает

$$ax + b = a^2 + 2a^3 \Rightarrow a = 0, b = 0.$$

Получаем, что $y = 0$, $x = (-\infty, +\infty)$, является решением исходного уравнения (это было отмечено и раньше).

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. Для этой цели рассматриваем систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y')^2 + 2(y')^3 - y = 0, \\ 2y' + 6(y')^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = 0, \\ y = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y' = -\frac{1}{3}, \\ y = \frac{1}{27}. \end{cases}$$

Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что функция $y = 0$, $x = (-\infty, +\infty)$, является решением, а функция $y = \frac{1}{27}$, $x = (-\infty, +\infty)$, не является решением заданного уравнения. Решения $y = 0$, $x = (-\infty, +\infty)$, подозрительно на особое.

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в соотношениях:

$$\begin{cases} x = 2t + 3t^2 + C, \\ y = t^2 + 2t^3, \end{cases} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), \text{ и } y = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad \blacktriangleleft$$

Задача 22. Найти все решения уравнения $y = \ln(1 + (y')^2)$ (методом введения параметра).

► Положим $y' = t$ ($dy = tdx$). Тогда

$$y = \ln(1 + t^2), \quad t \in (-\infty, +\infty) \quad (*)$$

$\Rightarrow dy = \frac{2tdt}{1+t^2}$. У нас $dy = tdx$. Следовательно, будем иметь

$$tdx = \frac{2tdt}{1+t^2}. \quad (**)$$

Замечаем, что если $t = 0$, то из (*): $y = 0$. Подстановкой в заданное уравнение убеждаемся, что функция $y = 0$, $x = (-\infty, +\infty)$, является его решением. Для $t \neq 0$ из соотношения (**) находим

$$dx = 2 \frac{dt}{1+t^2} \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t + C.$$

Таким образом, получили

$$\begin{cases} x = 2 \operatorname{arctg} t + C, \\ y = \ln(1+t^2), \end{cases} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение еще решений вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в исходное уравнение дает

$$ax + b = \ln(1+a^2).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x , получаем

$$\begin{cases} a = 0, \\ b = \ln(1+a^2) \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = 0.$$

Значит, функция $y = 0$, $x = (-\infty, +\infty)$, является решением заданного уравнения.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассматриваем систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(1+(y')^2) - y = 0, \\ \frac{2y'}{1+(y')^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = 0, \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = 0$, $x = (-\infty, +\infty)$, — решение исходного уравнения, подозрительное на особое.

Ответ. Все решения исходного уравнения содержатся в соотношениях:

$$\begin{cases} x = 2 \operatorname{arctg} t + C, \\ y = \ln(1+t^2), \end{cases} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), \text{ и } y = 0, x \in (-\infty, +\infty). \quad \blacktriangleleft$$

Задача 23. Найти все решения уравнения $(y' + 1)^3 = (y' - y)^2$ (методом введения параметра).

► Из вида заданного уравнения следует, что должно быть $y' \geq -1$ и что

$$y' - y = \pm (y' + 1)^{3/2} \Rightarrow y = y' \mp (y' + 1)^{3/2}.$$

Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow dy = tdx$), $t \geq -1$. Тогда

$$y = t \mp (t+1)^{3/2}, \quad t \geq -1. \quad (*)$$

$\Rightarrow dy = \left(1 \mp \frac{3}{2}(t+1)^{1/2}\right) dt$. У нас $dy = tdx$. Поэтому

$$tdx = \left(1 \mp \frac{3}{2}(t+1)^{1/2}\right) dt. \quad (**)$$

Если $t = 0$, то из (*) следует, что $y = \mp 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Подстановкой в заданное уравнение убеждаемся, что функции $y = 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, и $y = -1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, являются его решениями. Для $t \neq 0$ из (**) находим

$$dx = \left(\frac{1}{t} \mp \frac{3}{2} \frac{\sqrt{t+1}}{t}\right) dt \Rightarrow x = \ln|t| \mp 3\sqrt{t+1} \mp \frac{3}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1} \right| + C.$$

Таким образом, получили

$$\begin{cases} x = \ln|t| \mp 3\sqrt{t+1} \mp \frac{3}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1} \right| + C, \\ y = t \mp (t+1)^{3/2}, \end{cases} \quad t \in [-1, 0) \cup (0, +\infty).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение еще решений вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в исходное уравнение дает

$$(a+1)^3 = (a-ax-b)^2.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x , получаем

$$\begin{array}{l|l} x^2 & a^2 = 0, \\ x & 2a(b-a) = 0, \quad a = 0; \quad b = \pm 1. \\ x^0 & (b-a)^2 = (a+1)^3, \end{array}$$

Значит, функции $y = +1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, и $y = -1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, являются решениями исходного уравнения.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассматриваем систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y'+1)^3 - (y' - y)^2 = 0, \\ 3(y'+1)^2 - 2(y' - y) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (y'+1)^3 = (y'-y)^2, \\ \frac{y'+1}{3} = \frac{y'-y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = 3y+2, \\ (3y+3)^3 = (2y+2)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27(y+1)^3 = 4(y+1)^2 \Rightarrow y = -1 \text{ и } y = -\frac{23}{27}.$$

Непосредственной подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что $y = -1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением, а $y = -\frac{23}{27}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, не является решением заданного уравнения. Решение $y = -1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, подозрительно на особое. ◀

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях

$$\begin{cases} x = \ln|t| \mp 3\sqrt{t+1} \mp \frac{3}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1} \right| + C, & t \in [-1, 0) \cup (0, +\infty); \\ y = t \mp (t+1)^{3/2}, \end{cases}$$

$$y = -1, x \in (-\infty, +\infty); y = 1, x \in (-\infty, +\infty). \quad \blacktriangleleft$$

Задача 24. Найти все решения уравнения $y = (y' - 1)e^{y'}$ (методом введения параметра).

► Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow dy = tdx$). Тогда

$$y = (t - 1)e^t. \quad (*)$$

$\Rightarrow dy = te^t dt$. У нас $dy = tdx$. Поэтому

$$tdx = te^t dt. \quad (**)$$

Если $t = 0$, то из (*) следует, что $y = -1$. Подстановкой в заданное уравнение убеждаемся, что функция $y = -1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является его решением. Для $t \neq 0$ из (**) находим $dx = e^t dt \Rightarrow x = e^t + C$. Таким образом, получили

$$\begin{cases} x = e^t + C, \\ y = (t - 1)e^t, \end{cases} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение еще решений вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в заданное уравнение дает

$$ax + b = (a - 1)e^a.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x , находим

$$\left. \begin{array}{l|l} x & a = 0 \\ x^0 & b = (a - 1)e^a \end{array} \right\} \Rightarrow a = 0, b = -1.$$

Функция $y = -1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением исходного уравнения.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассматриваем систему

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (y' - 1)e^{y'} - y = 0, \\ y'e^{y'} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y' = 0, \\ y = -1 \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow$ функция $y = -1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением исходного уравнения, подозрительным на особое.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях

$$\left\{ \begin{array}{l} x = e^t + C, \\ y = (t - 1)e^t, \end{array} \right. \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), \text{ и } y = -1, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad \blacktriangleleft$$

Задача 25. Найти все решения уравнения $(y'')^4 - (y')^2 = y^2$ (методом введения параметра).

► Положим $y' = t$ ($dy = tdx$). Тогда $y^2 = t^4 - t^2 \Rightarrow y^2 = t^2(t^2 - 1)$. Ясно, что должно быть $|t| \geq 1$ и $t = 0$, т. е. $t \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ и $t = 0$. Итак, имеем

$$y = \pm t\sqrt{t^2 - 1}. \quad (*)$$

Для $t \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$: $dy = \pm \left[\sqrt{t^2 - 1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 - 1}} \right] dt$. У нас $dy = tdx$. Поэтому

$$tdx = \pm \left[\sqrt{t^2 - 1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 - 1}} \right] dt. \quad (**)$$

Замечаем, что если $t = 0$, то из (*) следует $y = 0$. Подстановкой в заданное уравнение убеждаемся, что функция $y = 0$,

$x \in (-\infty, +\infty)$, является его решением. Для $t \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ из (***) находим

$$\begin{aligned} dx &= \pm \left(\frac{t}{\sqrt{t^2-1}} + \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} \right) dt \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \pm \left(\sqrt{t^2-1} + \sqrt{t^2-1} - \operatorname{arctg} \sqrt{t^2-1} \right) + C. \end{aligned}$$

Таким образом, получили

$$\begin{cases} x = \pm \left(2\sqrt{t^2-1} - \operatorname{arctg} \sqrt{t^2-1} \right) + C, \\ y = \pm t\sqrt{t^2-1}, \end{cases} \quad t \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение еще решения вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в исходное уравнение дает

$$a^4 - a^2 = a^2 x^2 + 2abx + b^2.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x .

$$\begin{array}{l|l} x^2 & a^2 = 0, \\ x & 2ab = 0, \\ x^0 & b^2 = a^2(a^2 - 1) \end{array} \Rightarrow a = 0, b = 0.$$

Значит, функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением исходного уравнения.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассматриваем систему

$$\begin{aligned} \begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (y')^4 + (y')^2 - y^2 = 0, \\ 4(y')^3 - 2y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} y' = 0, \\ y = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y' = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ y^2 = -\frac{1}{4} \end{cases} \text{ (невозможно)}. \end{aligned}$$

Функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением заданного уравнения, подозрительным на особое.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях

$$\begin{cases} x = \pm \left(2\sqrt{t^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{t^2 - 1} \right) + C, \\ y = \pm t\sqrt{t^2 - 1}, \end{cases} \quad t \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

и $y = 0, x \in (-\infty, +\infty)$. ◀

Задача 26. Найти все решения уравнения $(y')^2 - (y')^3 = y^2$ (методом введения параметра).

► Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow dy = tdx$). Тогда $y^2 = t^2 - t^3 = t^2(1 - t)$. Ясно, что должно быть $t \leq 1$, т. е. $t \in (-\infty, 1] \Rightarrow$

$$y = \pm t\sqrt{1 - t}, \quad (*)$$

$t \in (-\infty, 1], \Rightarrow$ для $t \in (-\infty, 1)$:

$$dy = \pm \left(\sqrt{1 - t} - \frac{t}{2\sqrt{1 - t}} \right) dt.$$

У нас $dy = tdx$. Поэтому

$$tdx = \pm \left(\sqrt{1 - t} - \frac{t}{2\sqrt{1 - t}} \right) dt. \quad (**)$$

Если $t = 0$ или $t = 1$, то из (*) следует $y = 0$. Подстановкой в заданное уравнение убеждаемся, что функция $y = 0, x \in (-\infty, +\infty)$, является решением этого уравнения. Для $t \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ находим из (**)

$$\begin{aligned} dx &= \pm \left(\frac{\sqrt{1 - t}}{t} - \frac{1}{2\sqrt{1 - t}} \right) dt \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \pm \left(\sqrt{1 - t} + 2\sqrt{1 - t} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1 - t} - 1}{\sqrt{1 - t} + 1} \right| \right) + C. \end{aligned}$$

Таким образом, получили

$$\begin{cases} x = \pm \left(3\sqrt{1 - t} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1 - t} - 1}{\sqrt{1 - t} + 1} \right| \right) + C, \\ y = \pm t\sqrt{1 - t}, \end{cases} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, 1).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение еще решения вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в заданное уравнение дает

$$a^2 - a^3 = a^2 x^2 + 2abx + b^2.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x .

$$\begin{array}{l|l} x^2 & a^2 = 0, \\ x & 2ab = 0, \\ x^0 & b^2 = a^2 - a^3 \end{array} \Rightarrow a = 0, b = 0.$$

Значит, функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением исходного уравнения.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y')^2 - (y')^3 - y^2 = 0, \\ 2y' - 3(y')^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = 0, \\ y = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y' = \frac{2}{3}, \\ y = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что функции

$y = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, не являются решениями, а функция

$y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением заданного уравнения (решение $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$ подозрительно на особое).

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях

$$\begin{cases} x = \pm \left(3\sqrt{1-t} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1-t}-1}{\sqrt{1-t}+1} \right| \right) + C, \\ y = \pm t\sqrt{1-t}, \end{cases} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, 1),$$

и $y = 0, x \in (-\infty, +\infty)$. ◀

Задача 27. Найти все решения уравнения $(y')^4 = 2yy' + y^2$ (методом введения параметра).

► Имеем $y^2 + 2yy' - (y')^4 = 0 \Rightarrow y = -y' \pm \sqrt{(y')^2 + (y')^4}$. Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow dy = tdx$). Тогда

$$y = -t \pm t\sqrt{1+t^2}, \quad t \in (-\infty, +\infty). \quad (*)$$

$$\Rightarrow dy = \left[-1 \pm \left(\sqrt{1+t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} \right) \right] dt. \text{ У нас } dy = tdx. \text{ А тогда для } t \neq 0$$

$$dx = \left[-\frac{1}{t} \pm \left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right) \right] dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\ln|t| \pm \left(\sqrt{1+t^2} + \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{1+t^2}+1} \right| \right) + C.$$

Таким образом, получили

$$\begin{cases} x = -\ln|t| \pm \left(2\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{1+t^2}+1} \right| \right) + C, \\ y = -t \pm t\sqrt{1+t^2}, \end{cases} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

При $t = 0$ получаем из (*): $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Подстановкой в исходное уравнение функции $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, убеждаемся, что эта функция является решением заданного уравнения.

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение еще решений вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в исходное уравнение дает

$$a^4 = 2a^2x + ab + a^2x^2 + 2abx + b^2.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x .

$$\begin{array}{l|l} x^2 & a^2 = 0, \\ x & 2a(a+b) = 0, \Rightarrow a = 0, b = 0. \\ x^0 & a^4 = b(a+b) \end{array}$$

Значит, функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением исходного уравнения.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 + 2yy' - (y')^4 = 0, \\ 2y - 4(y')^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ исключая y' , находим $y = 0$ и $\sqrt[3]{y^2} = -\frac{3}{2^{4/3}}$ (невозможно).

Значит, функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением заданного уравнения, подозрительным на особое.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях

$$\begin{cases} x = -\ln|t| \pm \left(2\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{1+t^2}+1} \right| \right) + C, \\ y = -t \pm t\sqrt{1+t^2}, \end{cases} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

и $y = 0, x \in (-\infty, +\infty)$. ◀

Задача 28. Найти все решения уравнения: $(y')^2 - 2xy' = x^2 - 4y$ (методом введения параметра).

► Имеем $y = \frac{x^2}{4} + \frac{xy'}{2} - \frac{(y')^2}{4}$. Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow dy = tdx$).

Тогда

$$y = \frac{x^2}{4} + \frac{xt}{2} - \frac{t^2}{4}. \quad (*)$$

У нас $dy = tdx$. Поэтому

$$tdx = \frac{x}{2}dx + \frac{t}{2}dx + \frac{x}{2}dt - \frac{t}{2}dt \Rightarrow \left(\frac{x}{2} - \frac{t}{2} \right) dx + \left(\frac{x}{2} - \frac{t}{2} \right) dt = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-t)(dx+dt) = 0 \Rightarrow x-t=0 \text{ и } d(x+t)=0 \Rightarrow x=t \text{ и } x+t=C.$$

$$\alpha) \begin{cases} x=t, \\ y = \frac{x^2}{4} + \frac{xt}{2} - \frac{t^2}{4} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{x^2}{2}, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\beta) \begin{cases} x+t=C, \\ y = \frac{x^2}{4} + \frac{xt}{2} - \frac{t^2}{4} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{x^2}{2} + Cx - \frac{1}{4}C^2, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение решений вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в исходное уравнение дает

$$a^2 - 2ax = x^2 - 4(ax + b) \text{ (невозможно).}$$

Значит, заданное уравнение не имеет решений вида $y = ax + b$.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{4} + \frac{xy'}{2} - \frac{(y')^2}{4}, \\ 0 = \frac{x}{2} - \frac{y'}{2}. \end{cases}$$

Исключая из этой системы y' , находим $y = \frac{x^2}{2}$. Значит, функция

$y = \frac{x^2}{2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением заданного уравнения,

подозрительным на особое.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях:

$$y = -\frac{x^2}{2} + Cx - \frac{1}{4}C^2, x \in (-\infty, +\infty), \text{ и } y = \frac{x^2}{2}, x \in (-\infty, +\infty). \blacktriangleleft$$

Задача 29. Найти все решения уравнения $5y + (y')^2 = x(x + y')$ (методом введения параметра).

$$\blacktriangleright \text{ Имеем } y = \frac{1}{5} [x(x + y') - (y')^2]. \quad \text{Положим } y' = t$$

($\Leftrightarrow dy = tdx$). Тогда

$$y = \frac{1}{5} [x(x + t) - t^2]. \quad (*)$$

У нас $dy = tdx$. Поэтому будем иметь

$$\begin{aligned} tdx &= \frac{1}{5} [(x + t)dx + x(dx + dt) - 2tdt] \Rightarrow \\ &\Rightarrow (2t - x)dt + (4t - 2x)dx = 0 \Rightarrow (2t - x)(dt + 2dx) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2t - x = 0 \text{ и } d(t + 2x) = 0 \Rightarrow x = 2t \text{ и } 2x + t = C. \end{aligned}$$

$$\alpha) \begin{cases} x = 2t, \\ y = \frac{1}{5}[x(x+t) - t^2] \end{cases} \Rightarrow y = \frac{x^2}{4}, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\beta) \begin{cases} 2x + t = C, \\ y = \frac{1}{5}[x(x+t) - t^2] \end{cases} \Rightarrow y = -x^2 + Cx - \frac{C^2}{5}, x \in (-\infty, +\infty).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение решений вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в исходное уравнение дает

$$5(ax + b) + a^2 = x(x + a) \quad (\text{невозможно}).$$

Значит, заданное уравнение не имеет решений вида $y = ax + b$.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое? С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5y + (y')^2 = x(x + y'), \\ 2y' = x. \end{cases}$$

Исключая из этой системы y' , находим $y = \frac{x^2}{4}$. Значит, функция

$y = \frac{x^2}{4}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением заданного уравнения, подозрительным на особое.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях

$$y = -x^2 + Cx - \frac{C^2}{5}, x \in (-\infty, +\infty), \text{ и } y = \frac{x^2}{4}, x \in (-\infty, +\infty). \quad \blacktriangleleft$$

Задача 30. Найти все решения уравнения $x^2(y')^2 = xyu' + 1$ (методом введения параметра).

► Из заданного уравнения видно, что $x \neq 0$ и $y' \neq 0$. А тогда

$$y = \frac{x^2(y')^2 - 1}{xy'}.$$

Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow dy = tdx$), $t \neq 0$. Тогда $y = \frac{x^2 t^2 - 1}{xt} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = xt - \frac{1}{xt}. \quad (*)$$

У нас $dy = tdx$. Поэтому будем иметь

$$\begin{aligned} tdx &= tdx + xdt + \frac{xdt + tdx}{x^2t^2} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{xt^2}\right)dt + \frac{1}{x^2t}dx = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x^2t^2 + 1}{t}dt + \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} + \frac{x}{t} = -x^3t \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{x^3}x' + \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{x^2} = -t. \end{aligned} \quad (**)$$

Положим $\frac{1}{x^2} = u$ ($u(t)$ — новая неизвестная функция)

$\Rightarrow -2\frac{x'}{x^3} = u'$. Относительно новой неизвестной функции уравне-

ние (**) станет таким: $-\frac{u'}{2} + \frac{u}{t} = -t \Rightarrow u' - \frac{2}{t}u = 2t$. Полученное уравнение является линейным. Для него интегрирующим множи-

телем будет, например, функция $\mu = \frac{1}{t^2}$. После умножения обеих частей последнего уравнения на μ будем иметь

$$\frac{u'}{t^2} - \frac{2}{t^3}u = \frac{2}{t} \Leftrightarrow \left(\frac{u}{t^2}\right)' = 2(\ln|t|)' \Rightarrow \frac{u}{t^2} = \ln t^2 + C.$$

Возвращаясь к прежним переменным, получим

$$\frac{1}{x^2t^2} = \ln t^2 + C \Rightarrow x^2 = \frac{1}{t^2(C + \ln t^2)}.$$

Таким образом, получили

$$\begin{cases} x = \pm \frac{1}{t\sqrt{C + \ln t^2}}, \\ y = xt - \frac{1}{xt}, \end{cases} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение решений вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в исходное уравнение дает

$$x^2a^2 = ax(ax + b) = 1.$$

$$x^2 \mid a^2 = a^2,$$

$$x \mid ab = 0,$$

$$x^0 \mid 1 = 0 \text{ (невозможно)}.$$

Значит, исходное уравнение не имеет решений вида $y = ax + b$.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2(y')^2 = xy' + 1, \\ 2x^2y' = xy. \end{cases}$$

Исключая из этой системы y' , получаем $\frac{y^2}{4} = -1$ (невозможно).

Значит, заданное уравнение не имеет решений, подозрительных на особое.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношении

$$\begin{cases} x = \pm \frac{1}{t\sqrt{C + \ln t^2}}, \\ y = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{C + \ln t^2}} - \sqrt{C + \ln t^2} \right), \end{cases} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty). \quad \blacktriangleleft$$

Задача 31. Найти все решения уравнения $(y')^3 + y^2 = xy y'$ (методом введения параметра).

► Из заданного уравнения видно непосредственно, что функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является его решением. (Заметим, что $y = \text{const} \neq 0$ не является решением исходного уравнения.) Из заданного уравнения имеем для $y \neq 0$:

$$x = \frac{(y')^2}{y} + \frac{y}{y'}.$$

Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow dy = tdx$). Будем иметь для $t \neq 0$

$$x = \frac{t^2}{y} + \frac{y}{t}. \quad (*)$$

У нас $dy = tdx$. Следовательно,

$$dy = t \left(\frac{2t}{y} dt - \frac{t^2}{y^2} dy + \frac{1}{t} dy - \frac{y}{t^2} dt \right) \Rightarrow \frac{dy}{dt} - \frac{2}{t} y = -\frac{y^3}{t^4} \Rightarrow$$

(это — уравнение Бернулли)

$$\Rightarrow \frac{y'_t}{y^3} - \frac{2}{t} \cdot \frac{1}{y^2} = -\frac{1}{t^4}. \quad (**)$$

Положим $\frac{1}{y^2} = u$ ($u(t)$ — новая неизвестная функция). Относительно новой неизвестной функции уравнение (**) будет таким:

$$u'_t + \frac{4}{t}u = \frac{2}{t^4}$$

(это — линейное уравнение). Для него интегрирующим множителем является, например, функция $\mu = t^4$. После умножения обеих частей последнего уравнения на $\mu = t^4$ получим

$$u'_t t^4 + 4t^3 u = 2 \Rightarrow (u t^4)'_t = 2 \Rightarrow u t^4 = 2t + C.$$

У нас $u = \frac{1}{y^2}$. Поэтому будем иметь $y^2 = \frac{t^4}{2t + C}$. Таким образом, получили

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{y} + \frac{y}{t}, & t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty). \\ y^2(2t + C) = t^4, \end{cases}$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение еще решений вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в исходное уравнение дает

$$a^3 + (ax + b)^2 = ax(ax + b).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x .

$$\begin{array}{l|l} x^2 & a^2 = a^2, \\ x & 2ab = ab, \Rightarrow a = 0, b = 0. \\ x^0 & a^3 + b^2 = 0 \end{array}$$

Значит, функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением заданного уравнения (это было замечено и раньше).

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y')^3 + y^2 = xy y', \\ 3(y')^2 = xy. \end{cases}$$

Исключая из этой системы y' , находим $y = 0$ и $y = \frac{4}{27}x^3$. Непосредственной подстановкой функций $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, и $y = \frac{4}{27}x^3$, $x \in (-\infty, +\infty)$, в заданное уравнение убеждаемся, что $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением, а функция $y = \frac{4}{27}x^3$, $x \in (-\infty, +\infty)$, не является решением заданного уравнения. Решение $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, — подозрительное на особое решение исходного уравнения.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{y} + \frac{y}{t}, \\ y^2(2t + C) = t^4, \end{cases} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), \text{ и } y = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad \blacktriangleleft$$

Задача 32. Найти все решения уравнения $2xy' - y = y' \ln yy'$ (методом введения параметра).

► Из заданного уравнения следует, что должно быть $yy' > 0$.

Так как $y' \neq 0$, то находим $x = \frac{y}{2y'} + \frac{\ln yy'}{2}$. Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow dy = tdx$), $t \neq 0$. Тогда

$$x = \frac{y}{2t} + \frac{\ln yt}{2} \quad (*)$$

(должно быть $yt > 0$). У нас $dy = tdx$. Поэтому

$$dy = t \left(\frac{1}{2t} dy - \frac{y}{2} \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{2} \frac{dy}{y} + \frac{1}{2} \frac{dt}{t} \right) \Rightarrow \left(1 - \frac{t}{y} \right) dy = \left(1 - \frac{y}{t} \right) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y-t}{y} dy - \frac{y-t}{t} dt = 0 \Rightarrow (y-t) \left(\frac{dy}{y} - \frac{dt}{t} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha) \begin{cases} y = t, \\ x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln y^2; \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} y = Ct, \\ x = \frac{C}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{y^2}{C}. \end{cases}$$

Заметим, что решение $\alpha)$ содержится в решении $\beta)$ при $C = 1$

и что решение $\alpha)$ представимо в виде $y = \pm \frac{e^x}{\sqrt{e}}$.

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение решений вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в исходное уравнение дает

$$2ax - (ax + b) = a \ln [(ax + b)a]$$

(такое тождество невозможно). Значит, заданное уравнение решений вида $y = ax + b$ не имеет.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy' - y = y' \ln yy', \\ 2x = \ln yy' + 1. \end{cases}$$

Исключая из этой системы y' , находим $y^2 = e^{2x-1} \Rightarrow y = \pm \frac{e^x}{\sqrt{e}}$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся,

что функции $y = \pm \frac{e^x}{\sqrt{e}}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, являются решениями заданного уравнения. Эти решения — подозрительные на особые решения.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в формуле $y^2 = Ce^{2x-C}$. ◀

Задача 33. Найти все решения уравнения $y' = e^{\frac{xy'}{y}}$ (методом введения параметра).

► Из заданного уравнения следует, что должно быть $y \neq 0$, а $y' > 0$. Прологарифмировав обе части исходного уравнения, находим

$$\frac{xy'}{y} = \ln y' \Rightarrow x = \frac{y \ln y'}{y'}.$$

Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow dy = t dx$), $t > 0$. Тогда

$$x = \frac{t \ln t}{t}, \quad t \in (0, +\infty). \quad (*)$$

У нас $dy = t dx$. Поэтому

$$\begin{aligned} dy &= t \left(\frac{\ln t}{t} dy - y \frac{\ln t}{t^2} dt + \frac{y}{t^2} dt \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow (1 - \ln t) dy - \frac{y}{t} (1 - \ln t) dt &= 0 \Rightarrow (1 - \ln t) \left(dy - \frac{y}{t} dt \right) = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\alpha) \begin{cases} 1 - \ln t = 0, \\ x = y \frac{\ln t}{t} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{y}{e};$$

$$\beta) \begin{cases} dy - \frac{y}{t} dt = 0, \\ x = \frac{y \ln t}{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = Ct, \\ x = \frac{y \ln t}{t} \end{cases} \Rightarrow x = C \ln \frac{y}{C}.$$

Таким образом, получили $y = ex$ и $x = C \ln \frac{y}{C}$.

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение решений вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в исходное уравнение дает

$$a = e^{\frac{ax}{ax+b}} \Rightarrow \frac{ax}{ax+b} = \ln a \Rightarrow ax = (ax+b) \ln a.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$\begin{array}{l|l} x & a = a \ln a, \\ x^0 & b \ln a = 0 \end{array} \Rightarrow a = e, b = 0.$$

Значит, $y = ex$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, — решение исходного уравнения ($x \neq 0$, так как должно быть $y \neq 0$).

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = e^{\frac{xy'}{y}}, \\ 1 = e^{\frac{xy'}{y}} \cdot \frac{x}{y}. \end{cases}$$

Исключая из этой системы y' , находим $\frac{y}{x} = e \Rightarrow y = ex$. Значит, решение $y = ex$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, заданного уравнения подозрительно на особое.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в формулах $x = C \ln \frac{y}{C}$ ($y \neq 0$); $y = ex$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ◀.

Задача 34. Найти все решения уравнения $y = xy' - x^2(y')^3$ (методом введения параметра).

► Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow dy = tdx$). Тогда

$$y = xt - x^2 t^3. \quad (*)$$

У нас $dy = tdx$. Поэтому будем иметь

$$tdx = tdx + xdt - 2xt^3 dx - 3x^2 t^2 dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(1 - 3xt^2)dt = 2xt^3 dx \Rightarrow \text{для } x \neq 0 \text{ и } t \neq 0: \frac{dx}{dt} + \frac{3}{2t}x = \frac{1}{2t^3}.$$

Это линейное уравнение. Для него $\mu = t^{3/2}$ является интегрирующим множителем. Умножим обе части последнего уравнения на $\mu = t^{3/2}$. Получаем

$$\begin{aligned} x'_t t^{3/2} + \frac{3}{2} t^{1/2} x &= \frac{1}{2} t^{-3/2} \Leftrightarrow (xt^{3/2})'_t = \frac{1}{2} t^{-3/2} \Rightarrow \\ \Rightarrow xt^{3/2} &= -t^{-1/2} + C \Rightarrow x = Ct^{-3/2} - \frac{1}{t^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, получили

$$\begin{cases} xt^2 = C\sqrt{t} - 1, \\ y = xt - x^2 t^3, \end{cases} \quad t \in (0, +\infty).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение решений вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в заданное уравнение дает

$$ax + b = ax - x^2 a^3.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$x^2 \quad | \quad -a^3 = 0,$$

$$x \quad | \quad a = a, \Rightarrow a = 0, b = 0.$$

$$x^0 \quad | \quad b = 0.$$

Функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением исходного уравнения.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = xy' - x^2(y')^3, \\ 0 = x - 3x^2(y')^2. \end{cases}$$

Исключая из этой системы y' , получим $y = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} \sqrt{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что $y = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} \sqrt{x}$ не есть решения заданного уравнения.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях:

$$\begin{cases} xt^2 = C\sqrt{t} - 1, \\ y = xt - x^2 t^3, \end{cases} \quad t \in (0, +\infty); y = 0, x \in (-\infty, +\infty). \quad \blacktriangleleft$$

Задача 35. Найти все решения уравнения $y = 2xy' + y^2(y')^3$ (методом введения параметра).

► Из заданного уравнения видно непосредственно, что функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является его решением, а $y = \text{const} \neq 0$ не является решением исходного уравнения ($\Rightarrow y' \neq 0$, для $y \neq 0$). Станем рассматривать заданное уравнение для $y \neq 0$.

Имеем для $y' \neq 0$: $x = \frac{y}{2y'} - \frac{y^2}{2(y')^2}$. Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow dy = t dx$).

Тогда для $t \neq 0$:

$$x = \frac{y}{2t} - \frac{y^2}{2t^2}. \quad (*)$$

У нас $dy = tdx$. Следовательно,

$$dy = t \left(\frac{1}{2t} dy - \frac{y}{2t^2} dt - \frac{y}{t^2} dy + \frac{y^2}{t^3} dt \right) \Rightarrow \frac{y}{t} \left(2 - \frac{y}{t} \right) dt + \left(\frac{1}{2} + \frac{y}{t} \right) dy = 0$$

(это — однородное уравнение); $\mu = \frac{2}{5y}$ — интегрирующий множитель полученного уравнения. У нас $y \neq 0$ и $t \neq 0$ в каждой из областей:

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < t < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < t < 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} -\infty < t < 0, \\ -\infty < y < 0; \end{cases} \quad (D_4) = \begin{cases} 0 < t < +\infty, \\ -\infty < y < 0. \end{cases}$$

Умножив обе части последнего уравнения на $\mu = \frac{2}{5y}$, получим

$$\frac{2}{5t} \left(2 - \frac{y}{t} \right) dt + \left(\frac{1}{5y} + \frac{2}{5t} \right) dy = 0.$$

Это — уравнение в полных дифференциалах $\Rightarrow$

$$4 \ln|t| + \ln|y| + \frac{2y}{t} = C.$$

Таким образом, получили в каждой из областей (D_k) , $k = \overline{1, 4}$,

$$\begin{cases} x = \frac{y}{2t} - \frac{y^2}{2t^2}, \\ 4 \ln|t| + \ln|y| + \frac{2y}{t} = C, \end{cases} \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение еще решения вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в исходное уравнение дает

$$ax + b = 2xa + (ax + b)^2 a^3.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x .

$$\begin{array}{l|l} x^2 & a^5 = 0, \\ x & 2a^4b + 2a = a, \Rightarrow a = 0, b = 0. \\ x^0 & b = a^3b^2 \end{array}$$

Функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением заданного уравнения (это было замечено и раньше).

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy' + y^2(y')^3 - y = 0, \\ 2x + 3y^2(y')^2 = 0. \end{cases}$$

Исключая из этой системы y' , получим $27y^4 = -32x^3$, $x \in (-\infty, 0)$. Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что функция, определяемая для $x \in (-\infty, 0)$ соотношением $27y^4 = -32x^3$, является решением заданного уравнения, подозрительным на особое.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях:

$$\begin{cases} x = \frac{y}{2t} - \frac{y^2}{2t^2}, \\ 4 \ln|t| + \ln|y| + \frac{2y}{t} = C, \end{cases} \text{ в } (D_k), \quad k = \overline{1, 4};$$

$$y = 0, x \in (-\infty, +\infty); 27y^4 = -32x^3, x \in (-\infty, 0). \quad \blacktriangleleft$$

Задача 36. Найти все решения уравнения $y(y - 2xy')^3 = (y')^2$ (методом введения параметра).

► Из заданного уравнения видно непосредственно, что функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$ является его решением и что $y \equiv \text{const} \neq 0$ не является решением этого уравнения ($\Rightarrow y' \neq 0$ для $y \neq 0$).

Имеем $(y - 2xy')^3 = \frac{(y')^2}{y}$, для $y \neq 0 \Rightarrow y - 2xy' = \frac{(y')^{2/3}}{y^{1/3}} \Rightarrow$

$x = \frac{y}{2y'} - \frac{1}{2} \frac{1}{(yy')^{1/3}}$. Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow dy = tdx$, $t \neq 0$). Тогда

$$x = \frac{y}{2t} - \frac{1}{2} \frac{1}{(yt)^{1/3}}. \quad (*)$$

У нас $dy = tdx$. Поэтому

$$dy = t \left[\frac{1}{2t} dy - \frac{y}{2t^2} dt + \frac{1}{6} (yt)^{-4/3} (ydt + tdy) \right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ в областях:

$$(D_1) = \begin{cases} 0 < t < +\infty, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases} \quad (D_2) = \begin{cases} -\infty < t < 0, \\ 0 < y < +\infty; \end{cases}$$

$$(D_3) = \begin{cases} -\infty < t < 0, \\ -\infty < y < 0; \end{cases} \quad (D_4) = \begin{cases} 0 < t < +\infty, \\ -\infty < y < 0 \end{cases}$$

$$\frac{3y^{4/3} - t^{2/3}}{6ty^{1/3}} dt + \frac{3y^{4/3} - t^{2/3}}{6y^{4/3}} dy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{в } (D_k), k = \overline{1, 4}, \quad \frac{dt}{t} + \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow y = \frac{C}{t}.$$

Получили, таким образом,

$$\begin{cases} x = \frac{y}{2t} - \frac{1}{2} \frac{1}{(yt)^{1/3}}, \\ y = \frac{C}{t} \end{cases} \Rightarrow y^2 = 2Cx + C^{2/3}.$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение еще решений вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в заданное уравнение дает

$$(ax + b)(ax + b - 2ax)^3 = a^2 \Leftrightarrow (ax + b)(b - ax)^3 = a^2 \Rightarrow a = 0, b = 0.$$

Функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением заданного уравнения.

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. С этой целью рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(y - 2xy')^3 = (y')^2, \\ -6xy(y - 2xy')^2 = 2y' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(y - 2xy')^3 = (y')^2, \\ y(y - 2xy') = -3xy' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(y - 2xy')^3 = (y')^2, \\ y' = -\frac{y}{x}. \end{cases}$$

Исключая из этой системы y' , находим $y = 0$ и $27x^2y^2 = 1$. Непосредственной подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что функция $y = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, и функции, определяемые соотношением $27x^2y^2 = 1$, являются решениями заданного уравнения. Они являются подозрительными на особые решения.

Ответ. Все решения заданного уравнения содержатся в соотношениях:

$$y^2 = 2Cx + C^{2/3}; y = 0, x \in (-\infty, +\infty); 27x^2y^2 = 1. \quad \blacktriangleleft$$

§4. Огибающая и дискриминантная кривая однопараметрического семейства плоских кривых

1°. Некоторые предварительные сведения. Плоские кривые будем задавать либо параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(\alpha), \\ y = \psi(\alpha) \end{cases} \quad (1)$$

(α — параметр), либо уравнением вида

$$F(x, y) = 0. \quad (2)$$

Введем понятия обыкновенной и особой точек кривой.

а) Пусть кривая (L) определяется параметрическими уравнениями (1). Пусть функции $x = \varphi(\alpha)$, $y = \psi(\alpha)$ имеют в точке α_0 непрерывные производные $\varphi'(\alpha)$, $\psi'(\alpha)$ и пусть $\varphi(\alpha_0) = x_0$, $\psi(\alpha_0) = y_0$. (Отметим, что точка $M_0(x_0, y_0) \in (L)$.) Точку $M(x_0, y_0)$ будем называть *обыкновенной* точкой кривой (L) , если

$$(\varphi'(\alpha_0))^2 + (\psi'(\alpha_0))^2 \neq 0 \quad (3)$$

(т. е. если $\varphi'(\alpha_0)$ и $\psi'(\alpha_0)$ не обращаются в нуль одновременно). Если же

$$(\varphi'(\alpha_0))^2 + (\psi'(\alpha_0))^2 = 0, \quad (4)$$

то точку $M_0(x_0, y_0)$ будем называть *особой* точкой (L) .

б) Пусть кривая (L) определяется уравнением (2) и точка $M_0(x_0, y_0) \in (L)$. Пусть функция $F(x, y)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$

непрерывные частные производные $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$. Точку $M_0(x_0, y_0)$ будем называть *обыкновенной* точкой кривой (L) , если в этой точке выполняется соотношение

$$(F'_x(x_0, y_0))^2 + (F'_y(x_0, y_0))^2 \neq 0 \quad (5)$$

(т. е. если $F'_x(x_0, y_0)$ и $F'_y(x_0, y_0)$ не обращаются в нуль одновременно). Если же

$$(F'_x(x_0, y_0))^2 + (F'_y(x_0, y_0))^2 = 0, \quad (6)$$

то точку $M_0(x_0, y_0)$ будем называть *особой* точкой кривой (L) .

Убедимся, что если точка M_0 кривой (L) является обыкновенной, то в некоторой окрестности этой точки кривая (L) представляет собой либо график некоторой дифференцируемой функции $y = f(x)$, либо график некоторой дифференцируемой функции $x = g(y)$.

► Пусть кривая (L) определяется параметрическими уравнениями (1) и, кроме того, выполнено условие (3). Из условия (3) следует, что хотя бы одно из двух чисел $\varphi'(\alpha_0)$, $\psi'(\alpha_0)$ отлично от нуля. Пусть для определенности $\varphi'(\alpha_0) \neq 0$. Но тогда, в силу непрерывности функции $\varphi'(\alpha)$ в точке α_0 , $\varphi'(\alpha) \neq 0$ в некоторой окрестности точки α_0 (см. теорему о стабильности знака). Следовательно, в упомянутой окрестности точки α_0 функция $x = \varphi(\alpha)$ является дифференцируемой и строго монотонной. При этих условиях существует дифференцируемая монотонная обратная функция $\alpha = \omega(x)$. Подставляя эту функцию в выражение $y = \psi(\alpha)$, мы убеждаемся, что кривая (L) в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ представляет собой график дифференцируемой функции $y = f(x) (= \psi(\omega(x)))$.

Справедливость сформулированного утверждения для случая, когда кривая (L) определяется уравнением (2), вытекает из того, что в окрестности обыкновенной точки $M_0(x_0, y_0)$ выполнены условия теоремы об однозначной разрешимости уравнения $F(x, y) = 0$ (либо относительно y , если $F'_y(M_0) \neq 0$, либо отно-

сительно x , если $F'_x(M_0) \neq 0$; см. теорию неявных функций). Поэтому прилегающий к точке M_0 участок кривой (L) представляет собой график дифференцируемой функции $y = f(x)$ или функции $x = g(y)$. ◀

Замечание 1. ▶ В геометрии точку M_0 кривой (L) называют обыкновенной, если в некоторой окрестности этой точки кривая (L) представляет собой график некоторой дифференцируемой функции, и особой, если в любой окрестности этой точки кривая (L) не может быть представлена в виде графика дифференцируемой функции. Мы видели, что точка M_0 кривой (L) , являющаяся обыкновенной согласно нашему определению, будет обыкновенной с геометрической точки зрения.

Можно привести примеры, когда точка M_0 кривой (L) , являющаяся особой по нашему определению, будет обыкновенной с геометрической точки зрения. Таким образом, наше определение обыкновенной точки является более узким, чем геометрическое, но более удобным для приложений. ◀

Введем теперь понятие касания кривых (L_1) и (L_2) в их общей точке M_0 . Будем говорить, что кривые (L_1) и (L_2) касаются в их общей точке M_0 , если обе эти кривые имеют в точке M_0 касательные и эти касательные совпадают.

Пусть кривая (L_1) определяется параметрическими уравнениями (1), а кривая (L_2) — уравнением (2), и $M_0(x_0, y_0)$ — общая точка этих кривых (при этом координаты x_0 и y_0 отвечают значению $\alpha = \alpha_0$ параметра α). Будем считать, что точка M_0 является обыкновенной точкой кривых (L_1) и (L_2) и эти кривые касаются в точке M_0 . Тогда эти кривые представляют собой в окрестности точки M_0 графики дифференцируемых функций. Ради определенности будем считать, что (L_1) и (L_2) являются графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ соответственно. Так как по условию кривые (L_1) и (L_2) касаются в точке $M_0(x_0, y_0)$, то угловые коэффициенты касательных в точке M_0 к графикам функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ равны, т. е.

$$f'_1(x_0) = f'_2(x_0). \quad (7)$$

Используя формулы дифференцирования функций, заданных параметрически, и формулы дифференцирования функций, заданных неявно, получим

$$f'_1(x_0) = \frac{\psi'(\alpha_0)}{\varphi'(\alpha_0)}, \quad f'_2(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}. \quad (8)$$

Формулы (8) позволяют придать равенству (7) следующий вид:

$$\frac{\psi'(\alpha_0)}{\phi'(\alpha_0)} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} \quad (9)$$

или

$$F'_x(x_0, y_0)\phi'(\alpha_0) + F'_y(x_0, y_0)\psi'(\alpha_0) = 0. \quad (10)$$

Соотношение (10) мы будем в дальнейшем называть условием касания в точке M_0 кривых (L_1) и (L_2) , заданных соответственно уравнениями (1) и (2). Опуская аргументы функций и исполь-

зуя обозначения $\phi'(\alpha) = \frac{dx}{d\alpha}$; $\psi'(\alpha) = \frac{dy}{d\alpha}$, мы запишем условие касания в следующей форме:

$$F'_x \frac{dx}{d\alpha} + F'_y \frac{dy}{d\alpha} = 0. \quad (11)$$

Замечание 2. Если в общей точке M_0 кривых (L_1) и (L_2) , заданных соответственно уравнениями (1) и (2), выполнено условие касания (10) и если при этом точка M_0 является обыкновенной точкой кривых (L_1) и (L_2) , то кривые (L_1) и (L_2) касаются в точке M_0 . В самом деле, из соотношений (3) и (5) и из условия (10) вытекает либо соотношение (9), либо условие

$$\frac{\phi'(\alpha_0)}{\psi'(\alpha_0)} = -\frac{F'_y(x_0, y_0)}{F'_x(x_0, y_0)}, \text{ т. е. равенство угловых коэффициентов ка-}$$

сательных в общей точке M_0 кривых (L_1) и (L_2) . Это и означает, что кривые (L_1) и (L_2) касаются в точке M_0 . Заметим, что условие касания (10) выполняется также и в случае, когда точка M_0 является особой точкой по крайней мере одной из кривых (L_1) и (L_2) .

Итак, условие касания (10) выполняется как в случае, когда кривые (L_1) и (L_2) касаются в точке M_0 , так и в случае, когда M_0 является особой точкой по крайней мере одной из этих кривых.

2°. Однопараметрические семейства плоских кривых. Характеристические точки кривых семейства.

Определение. Пусть уравнение

$$F(x, y, \alpha) = 0 \quad (12)$$

для каждого значения α из промежутка (a, b) определяет на плоскости x, y кривую, причем различным значениям α соответ-

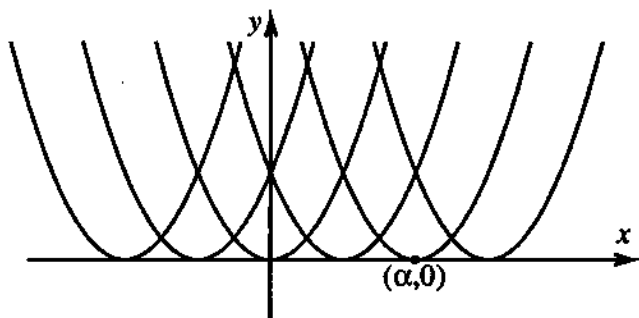


Рис. 2.16. К примеру 1

ствуют различные кривые. Тогда это множество кривых называется *однопараметрическим семейством кривых*, а параметр α называется *параметром* этого семейства.

Рассмотрим примеры однопараметрических семейств плоских кривых.

Пример 1. Уравнение $y - (x - \alpha)^2 = 0$ определяет семейство парабол, получаемых сдвигом по оси Ox параболы $y - x^2 = 0$ (рис. 2.16).

Пример 2. Уравнение $(y - \alpha)^2 - (x - \alpha)^3 = 0$ определяет семейство полукубических парабол, полученных параллельным сдвигом вдоль биссектрисы первого координатного угла полукубической параболы $y^2 = x^3$ (рис. 2.17).

Пусть функция $F(x, y, \alpha)$ является дифференцируемой функцией в области ее задания. В этом случае можно ввести понятие характеристической точки кривой семейства, определяемой соотношением (12). Точка $M(x, y)$ называется *характеристической точкой* кривой семейства (12), отвечающей данному значению α параметра семейства, если координаты этой точки удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0, \\ F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Рассмотрим геометрическую интерпретацию характеристической точки кривой семейства (12). Для простоты ограничимся случаем, когда любые две кривые семейства пересекаются. (Заметим, что существуют такие семейства кривых, любые две кривые которых не пересекаются. Примером такого семейства может служить

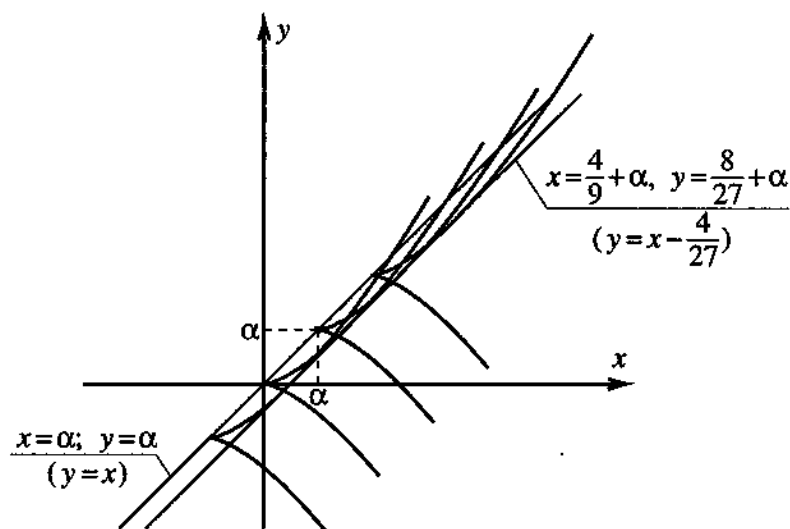


Рис. 2.17. К примеру 2

семейство кубических парабол, определяемых уравнением $y - (x - \alpha)^3 = 0$.)

Пусть (L_α) и $(L_{\alpha+\Delta\alpha})$ — две кривые семейства (12), отвечающие значениям параметра α и $\alpha + \Delta\alpha$ (рис. 2.18). Координаты точки N их пересечения удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0, \\ F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = 0 \end{cases}$$

или равносильной системе

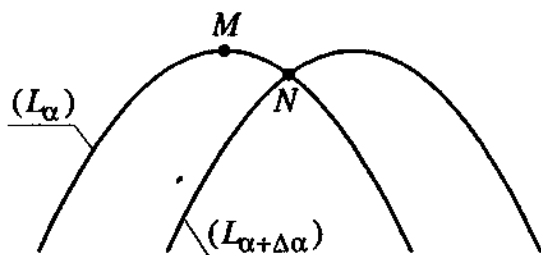


Рис. 2.18

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0, \\ \frac{F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - F(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0. \end{cases}$$

Если $\Delta\alpha \rightarrow 0$, то точка N , расположенная на кривой $F(x, y, \alpha) = 0$, стремится, вообще говоря, к некоторой точке M на этой кривой.

Так как $\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - F(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha} = F'_\alpha(x, y, \alpha)$, то координаты точки M удовлетворяют уравнениям (13), и поэтому точка M является характеристической точкой кривой семейства.

Итак, характеристическая точка данной кривой — это та точка, которая служит пределом при $\Delta\alpha \rightarrow 0$ точек пересечения данной кривой (L_α) и близкой к ней кривой ($L_{\alpha+\Delta\alpha}$).

3°. Огибающая и дискриминантная кривые однопараметрического семейства плоских кривых. Пусть однопараметрическое семейство плоских кривых определяется соотношением (12). Будем считать, что функция $F(x, y, \alpha)$ является дифференцируемой в области ее задания.

Определение 1. *Огибающей* однопараметрического семейства кривых (12) называется кривая (Γ), которая: 1) в каждой своей точке касается только одной кривой семейства (12), 2) в разных точках касается различных кривых этого семейства.

Определение 2. *Дискриминантной кривой* семейства кривых (12) называется геометрическое место характеристических точек кривых этого семейства, т. е. кривая, определяемая системой уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0, \\ F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0. \end{cases}$$

Оказывается, что при некоторых условиях дискриминантная кривая семейства кривых (12) является огибающей этого семейства. Выясним эти условия, для чего докажем предварительно следующую лемму.

Лемма. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ — характеристическая точка семейства $F(x, y, \alpha) = 0$, отвечающая значению параметра α_0 . Пусть функции $F(x, y, \alpha)$, $F'_\alpha(x, y, \alpha)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, α_0) и частные производные этих функций по x и y , т. е. $F'_x(x, y, \alpha)$, $F'_y(x, y, \alpha)$, $F''_{\alpha x}(x, y, \alpha)$, $F''_{\alpha y}(x, y, \alpha)$, непрерывны в самой точке (x_0, y_0, α_0) . Тогда, если в

точке (x_0, y_0, α_0) якобиан $\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{\alpha x} & F''_{\alpha y} \end{vmatrix}$ отличен от нуля, то дискри-

минантная кривая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, в некоторой окрестности этой точки может быть задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(\alpha), \\ y = \psi(\alpha), \end{cases}$ где $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ — дифференцируемые функции в некоторой окрестности точки α_0 .

► Так как точка $M_0(x_0, y_0)$ является характеристической точкой кривой семейства (12), отвечающей значению параметра α_0 , то

$$\begin{cases} F(x_0, y_0, \alpha_0) = 0, \\ F'_\alpha(x_0, y_0, \alpha_0) = 0. \end{cases}$$

А тогда, принимая еще во внимание условия леммы, видим, что у нас выполнены все условия теоремы об однозначной разрешимости системы

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0, \\ F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0 \end{cases} \text{ относительно } x \text{ и } y \text{ (см. теорию неяв-}$$

ных функций). Следовательно, в некоторой окрестности точки α_0 определены две функции

$$x = \varphi(\alpha), y = \psi(\alpha), \quad (14)$$

являющиеся единственным, непрерывным и дифференцируемым

$$\text{решением системы } \begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0, \\ F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0. \end{cases} \text{ Так как кривая } \begin{cases} x = \varphi(\alpha), \\ y = \psi(\alpha) \end{cases} \text{ со-}$$

стоит из характеристических точек семейства (12), то она является дискриминантной кривой этого семейства, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$. ◀

Отметим, что, в силу единственности решения системы,

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0, \\ F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0, \end{cases} \text{ различные точки дискриминантной кривой, ко-}$$

торая определяется параметрическими уравнениями (14) ($x = \varphi(\alpha)$, $y = \psi(\alpha)$), являются характеристическими точками различных кривых семейства $F(x, y, \alpha) = 0$.

Укажем теперь дополнительные условия, при выполнении которых дискриминантная кривая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, представляет собой огибающую в окрестности этой точки.

Теорема. Пусть кроме условий, сформулированных в лемме, выполняются еще следующие два условия:

- 1) в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, α_0) производные $F'_x, F'_y, F''_{\alpha x}, F''_{\alpha y}$ и $F''_{\alpha\alpha}$ непрерывны;
- 2) в точке (x_0, y_0, α_0) выполняются соотношения

$$(F'_x)^2 + (F'_y)^2 \neq 0 \text{ и } F''_{\alpha\alpha} \neq 0.$$

Тогда дискриминантная кривая, проходящая через характеристическую точку $M_0(x_0, y_0)$, является в некоторой окрестности этой точки огибающей семейства кривых $F(x, y, \alpha) = 0$.

► Было показано (см. лемму), что некоторый участок дискриминантной кривой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, может быть представлен параметрическими уравнениями (14) ($x = \varphi(\alpha)$, $y = \psi(\alpha)$), которые представляют собой решение системы

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0, \\ F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0. \end{cases} \quad \text{Подставим это решение в уравнения системы.}$$

Получим тождества $F(\underbrace{\varphi(\alpha)}_{=x}, \underbrace{\psi(\alpha)}_{=y}, \alpha) \equiv 0$ и $F'_\alpha(\underbrace{\varphi(\alpha)}_{=x}, \underbrace{\psi(\alpha)}_{=y}, \alpha) \equiv 0$.

Продифференцируем полученные тождества по α . Будем иметь

$$\begin{cases} F'_x \frac{dx}{d\alpha} + F'_y \frac{dy}{d\alpha} + F'_\alpha \equiv 0, \\ F''_{\alpha x} \frac{dx}{d\alpha} + F''_{\alpha y} \frac{dy}{d\alpha} + F''_{\alpha\alpha} \equiv 0. \end{cases} \quad (15)$$

Так как $F'_\alpha \equiv 0$, то первое соотношение из (15) примет вид

$$F'_x \frac{dx}{d\alpha} + F'_y \frac{dy}{d\alpha} = 0. \quad (*)$$

Видим, что в каждой точке рассматриваемой дискриминантной кривой выполняется условие касания (*) этой кривой и соответствующей кривой семейства. Поэтому, в силу замечания 2 из п. 1°, для завершения доказательства теоремы достаточно установить, что каждая характеристическая точка кривой семейства, расположенная в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, и каждая точка дискриминантной кривой в этой окрестности являются обыкновенными.

У нас по условию в точке (x_0, y_0, α_0) выполняется соотношение $(F'_x)^2 + (F'_y)^2 \neq 0$, которое, в силу непрерывности частных производных F'_x и F'_y , будет выполнено и в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, α_0) . Следовательно, в этой окрестности все характеристические точки кривых семейства являются обыкновенными.

У нас по условию в точке (x_0, y_0, α_0) : $F''_{\alpha\alpha} \neq 0$. Но тогда, в силу непрерывности, $F''_{\alpha\alpha} \neq 0$ и в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, α_0) . А тогда из второго соотношения тождества (15) выте-

кает, что в указанной окрестности производные $\frac{dx}{d\alpha}$ и $\frac{dy}{d\alpha}$ не

обращаются одновременно в нуль. Таким образом, все точки дискриминантной кривой в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ являются обыкновенными. Из леммы, доказанной выше, вытекает также, что различные точки дискриминантной кривой являются характеристическими точками различных кривых семейства. ◀

Замечание 1. Рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы, показывают, что в случае, когда выполнены только условия леммы, в каждой точке дискриминантной кривой выполнено условие касания этой кривой и кривой семейства. Ранее было отмечено (см. замечание 2 пункта 1°), что условие касания выполняется и тогда, когда общая точка двух кривых является особой точкой по крайней мере одной из них. Отсюда вытекает, что дискриминантная кривая может представлять собой геометрическое место особых точек кривых семейства (если в каждой характеристической точке имеет место равенство $(F'_x)^2 + (F'_y)^2 = 0$). Отметим, что и сама дискриминантная кривая может иметь особые

точки (если $\frac{dx}{d\alpha}$ и $\frac{dy}{d\alpha}$ равны нулю одновременно).

Замечание 2. Из доказанной теоремы следует: если все кривые семейства (12) и дискриминантная кривая этого семейства не имеют особых точек, то указанная дискриминантная кривая является огибающей семейства кривых (12).

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти дискриминантную кривую семейства $y - (x - \alpha)^2 = 0$.

► Имеем $F(x, y, \alpha) = y - (x - \alpha)^2$; $F'_\alpha(x, y, \alpha) = 2(x - \alpha)$. Таким образом, система (13) имеет вид

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0, \\ F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - (x - \alpha)^2 = 0, \\ 2(x - \alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \alpha; y = 0.$$

Видим, что характеристические точки имеют координаты $(\alpha, 0)$. Поэтому дискриминантная кривая задается параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \alpha, \\ y = 0 \end{cases} \quad (\text{дискриминантная кривая — ось } Ox).$$

Имеем, далее, $F'_x(x, y, \alpha) = -2(x - \alpha)$, $F'_y(x, y, \alpha) = 1 \Rightarrow$ в точках дискриминантной кривой $(F'_x)^2 + (F'_y)^2 = 0 + 1 = 1 (\neq 0)$. Кроме того, $F''_{\alpha\alpha} = -2 (\neq 0)$.

Вывод. Дискриминантная кривая данного семейства кривых, т. е. ось Ox , является огибающей этого семейства (рис. 2.16). ◀

Пример 2. Найти дискриминантную кривую семейства

$$(y - \alpha)^2 - (x - \alpha)^3 = 0.$$

► Имеем $F(x, y, \alpha) = (y - \alpha)^2 - (x - \alpha)^3$; $F'_\alpha(x, y, \alpha) = -2(y - \alpha) + 3(x - \alpha)^2$. Таким образом, система (13) имеет вид

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0, \\ F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y - \alpha)^2 - (x - \alpha)^3 = 0, \\ -2(y - \alpha) + 3(x - \alpha)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = \alpha, \\ y = \alpha \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} x = \alpha + \frac{4}{9}, \\ y = \alpha + \frac{8}{27}. \end{matrix}$$

Видим, что дискриминантная кривая представляет собой две линии, определяемые параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \alpha, \\ y = \alpha \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = \alpha + \frac{4}{9}, \\ y = \alpha + \frac{8}{27}. \end{cases}$$

(Это — соответственно прямые: $y = x$ и $y = x - \frac{4}{27}$.) Имеем, далее,

в точках прямой $\begin{cases} x = \alpha, \\ y = \alpha \end{cases} (F'_x)^2 + (F'_y)^2 = 0$. Следовательно, эта ветвь

дискриминантной кривой представляет собой геометрическое место особых точек кривых заданного семейства. В точках прямой

$$\begin{cases} x = \alpha + \frac{4}{9}, \\ y = \alpha + \frac{8}{27} \end{cases} (F'_x)^2 + (F'_y)^2 = 2 \cdot \left(\frac{16}{27}\right)^2 (\neq 0). \text{ Кроме того, } F''_{\alpha\alpha} = -\frac{2}{3} (\neq 0).$$

Вывод. Ветвь дискриминантной кривой $y = x - \frac{4}{27}$ является огибающей заданного семейства кривых (рис. 2.17). ◀

§5. Особое решение обыкновенного дифференциального уравнения как огибающая семейства интегральных кривых

Вспомним, что решение $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$, дифференциального уравнения

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

называется особым, если в каждой его точке нарушается свойство единственности, т. е. если через каждую его точку (x_0, y_0) , кроме этого решения, проходит и другое решение уравнения (1), имеющее в точке (x_0, y_0) ту же касательную, что и решение $y = \varphi(x)$, но не совпадающее с ним в любой, даже сколь угодно малой проколотовой окрестности точки (x_0, y_0) .

График особого решения называют *особой интегральной кривой* уравнения (1).

Допустим, что общее решение уравнения (1) найдено в виде

$$\Phi(x, y, C) = 0. \quad (2)$$

Ясно, что (2) определяет однопараметрическое семейство интегральных кривых уравнения (1) (C — параметр).

Справедливо **утверждение**: если семейство кривых $\Phi(x, y, C) = 0$, являющихся интегральными кривыми уравнения (1), имеет огибающую $y = \varphi(x)$, то эта огибающая представляет собой особую интегральную кривую уравнения (1).

► В самом деле, в точках огибающей значения x, y, y' совпадают со значениями x, y, y' для интегральной кривой, касающейся-

ся огибающей в точке (x, y) , и, следовательно, в каждой точке огибающей значения x, y, y' удовлетворяют уравнению $F(x, y, y') = 0$, т. е. огибающая является интегральной кривой уравнения (1).

Далее, в каждой точке огибающей нарушена единственность, так как через точки огибающей по одному направлению проходят по крайней мере две интегральные кривые: сама огибающая и касающаяся ее в рассматриваемой точке интегральная кривая семейства (2). Следовательно, огибающая является особой интегральной кривой.

Из §4 (пункт 3°) мы знаем, что если функция $\Phi(x, y, C)$ непрерывно дифференцируема, то огибающая входит в состав дискриминантной кривой, определяемой системой уравнений

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0. \end{cases}$$

В лемме и теореме предыдущего параграфа указаны условия, при выполнении которых некоторая ветвь дискриминантной кривой будет заведомо огибающей.

Пример 1. Решить уравнение $y = x + 2y' - (y')^2$. Выделить особые решения, если они существуют.

► Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow dy = tdx$). Тогда

$$y = x + 2t - t^2. \quad (*)$$

У нас $dy = tdx$. Поэтому

$$tdx = dx + 2dt - 2tdt \Rightarrow (t-1)dx + 2(t-1)dt = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t-1)(dx + 2dt) = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ и } x + 2t = C.$$

Поэтому решениями исходного уравнения являются функции

$$y = x + 1, x \in (-\infty, +\infty) \text{ и } \begin{cases} x = -2t + C, \\ y = x + 2t - t^2. \end{cases} \quad (**)$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение еще решений вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в заданное уравнение дает

$$ax + b = x + 2a - a^2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l|l} x & a = 1 \\ x^0 & b = 2a - a^2 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 1, b = 1.$$

Функция $y = x + 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением заданного уравнения (это решение уже было получено выше).

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. Для этого рассматриваем систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 2y' - (y')^2, \\ 2 - 2y' = 0. \end{cases}$$

Исключая из этой системы y' , находим: $y = x + 1$. Значит, функция $y = x + 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением заданного уравнения, подозрительным на особое.

Выясним, будет ли решение $y = x + 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, особым решением исходного уравнения. Общее решение заданного уравнения определяется соотношениями (**). Из первого уравнения

системы (**) находим $t = \frac{-x+C}{2}$. Подставив это выражение для t во второе уравнение системы (**), получаем

$$y = x + (C - x) - \frac{(C - x)^2}{4} \Rightarrow y - C + \underbrace{\frac{(C - x)^2}{4}}_{=\Phi(x, y, C)} = 0.$$

Составим систему уравнений для нахождения дискриминантной кривой:

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - C + \frac{(C - x)^2}{4} = 0, \\ -1 + \frac{C - x}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C - 2, \\ y = C - 1 \end{cases}$$

— параметрические уравнения дискриминантной линии.

$\Rightarrow y = x + 1$ — дискриминантная линия. Имеем $\Phi'_x = -\frac{C - x}{2}$;

$\Phi'_y = 1$, $\Rightarrow$ В точках прямой $\begin{cases} x = C - 2, \\ y = C - 1 \end{cases}$ $(\Phi'_x)^2 + (\Phi'_y)^2 = 2 \neq 0$.

Имеем $\Phi''_{CC} = \frac{1}{2} (\neq 0)$.

Вывод. Прямая $y = x + 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является огибающей семейства интегральных кривых заданного уравнения. Значит,

функция $y = x + 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является особым решением исходного уравнения. ◀

Пример 2. Решить уравнение $8(y')^3 - 12(y')^2 = 27(y - x)$. Выделить особые решения, если они существуют.

► Заданное уравнение решим относительно y :

$$y = \frac{8}{27}(y')^3 - \frac{4}{9}(y')^2 + x.$$

Положим $y' = t$ ($\Leftrightarrow dy = tdx$). Тогда

$$y = \frac{8}{27}t^3 - \frac{4}{9}t^2 + x. \quad (*)$$

У нас $dy = tdx$. Поэтому

$$\begin{aligned} tdx &= \frac{8}{9}t^2 dt - \frac{8}{9}t dt + dx \Rightarrow (t-1)dx = \frac{8}{9}t(t-1)dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow (t-1)\left(dx - \frac{8}{9}t dt\right) = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ и } x = \frac{4}{9}t^2 + C. \end{aligned}$$

Поэтому решениями исходного уравнения являются функции

$$y = x - \frac{4}{27}, x \in (-\infty, +\infty), \text{ и } \begin{cases} x = \frac{4}{9}t^2 + C, \\ y = \frac{8}{27}t^3 - \frac{4}{9}t^2 + x. \end{cases} \quad (**)$$

1) Проверим, не имеет ли заданное уравнение еще решения вида $y = ax + b$. Подстановка функции $y = ax + b$ в заданное уравнение дает

$$\begin{aligned} 8a^3 - 12a^2 &= 27(ax + b - x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{array}{l|l} x & 0 = 27(a-1) \\ x^0 & 8a^3 - 12a^2 = 27b \end{array} \right\} &\Rightarrow a = 1; b = -\frac{4}{27}. \end{aligned}$$

Функция $y = x - \frac{4}{27}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением заданного уравнения (это решение уже было получено выше).

2) Выясним, не имеет ли заданное уравнение решений, подозрительных на особое. Для этого рассматриваем систему

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8(y')^3 - 12(y')^2 = 27(y - x), \\ 24(y')^2 - 24y' = 0. \end{cases}$$

Исключая из этой системы y' , находим $y = x$ и $y = x - \frac{4}{27}$. Непосредственной подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что функция $y = x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, не является решением этого уравнения, а функция $y = x - \frac{4}{27}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением, причем функция $y = x - \frac{4}{27}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением, подозрительным на особое. Выясним, будет ли оно особым. Общее решение заданного уравнения определяется системой уравнений (**). Исключая из системы (**) параметр t , получаем

$$(x - C)^{3/2} + C - y = 0 \quad (\Phi(x, y, C) = (x - C)^{3/2} + C - y).$$

Составим систему уравнений для нахождения дискриминантной кривой:

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - C)^{3/2} + C - y = 0, \\ -\frac{3}{2}(x - C)^{1/2} + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C + \frac{4}{9}, \\ y = C + \frac{8}{27} \end{cases}$$

— параметрические уравнения дискриминантной линии $\Rightarrow y = x - \frac{4}{27}$. Имеем $\Phi'_x = \frac{3}{2}(x - C)^{1/2}$; $\Phi'_y = -1 \Rightarrow$ В точках пря-

$$\text{мой} \begin{cases} x = C + \frac{4}{9}, \\ y = C + \frac{8}{27} \end{cases} \quad (\Phi'_x)^2 + (\Phi'_y)^2 = 2 \quad (\neq 0); \quad \Phi''_{CC} = \frac{9}{8} \quad (\neq 0).$$

Вывод. Прямая $y = x - \frac{4}{27}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является огибающей семейства интегральных кривых заданного уравнения. Следовательно, решение $y = x - \frac{4}{27}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, исходного уравнения является особым решением этого уравнения. ◀

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

§1. Основные понятия и определения

1°. Обыкновенным дифференциальным уравнением n -го порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (\tilde{1})$$

Здесь n — фиксированное число ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, n — порядок уравнения), x — вещественная независимая переменная, $y(x)$ — искомая вещественная функция, $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ — известная функция, определенная и непрерывная в некоторой области $(G) \subset \mathbb{R}^{n+2}$.

2°. Дифференциальное уравнение n -го порядка, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1)$$

((1) — *нормальный вид* дифференциального уравнения n -го порядка). Предполагается, что функция $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ определена и непрерывна в некоторой области $(D) \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

3°. **Определение.** Функция $y = \varphi(x)$ называется *решением* уравнения (1) в промежутке $\langle a, b \rangle$, если:

1) для каждого $x \in \langle a, b \rangle$ определены и непрерывны $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, ..., $\varphi^{(n)}(x)$;

2) для каждого $x \in \langle a, b \rangle$ точка $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in (D)$;

3) $\varphi^{(n)}(x) \equiv f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))$, $x \in \langle a, b \rangle$.

График решения $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, называется *интегральной кривой* уравнения (1).

Заметим, что решение уравнения (1) определяется аналогично. Именно, функция $y = \varphi(x)$ называется *решением* уравнения (1) в промежутке $\langle a, b \rangle$, если:

1) для каждого $x \in \langle a, b \rangle$ определены и непрерывны $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, ..., $\varphi^{(n)}(x)$;

2) для каждого $x \in \langle a, b \rangle$ точка $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \in (G)$;

3) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$, $x \in \langle a, b \rangle$.

4°. Решение уравнения (1) (а также и уравнения (1̃)) может быть получено в неявной форме, т. е. в виде соотношения

$$\psi(x, y) = 0, \quad (*)$$

или в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle. \quad (**)$$

Но при этом предполагается, что соотношения (*) и (**) определяют y как функцию от x : $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, которая является решением уравнения (1) (уравнения (1̃)) на промежутке $\langle a, b \rangle$.

Пример 1. Пусть имеется уравнение

$$yy'' = (y')^2 - (y')^3.$$

Покажем, что функция $y = y(x)$, заданная неявно соотношением

$$y - \ln|y| - x + 5 = 0 \quad (y \neq 0),$$

является решением данного уравнения.

Решение. Находим y' и y'' :

$$y' - \frac{y'}{y} - 1 = 0 \Rightarrow y' \cdot \frac{y-1}{y} = 1 \Rightarrow y' = \frac{y}{y-1} \quad (y \neq 1).$$

(Отметим, что $y \equiv 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, является решением данного уравнения.)

$$y'' = \frac{y'(y-1) - yy'}{(y-1)^2} = -\frac{y'}{(y-1)^2} = -\frac{y}{(y-1)^3} \quad (y \neq 1).$$

Подставив найденные выражения для y' и y'' в исходное уравнение, получаем

$$-\frac{y^2}{(y-1)^3} = \frac{y^2}{(y-1)^2} - \frac{y^3}{(y-1)^3} \Rightarrow -\frac{y^2}{(y-1)^3} = -\frac{y^2}{(y-1)^3}.$$

Следовательно, функция $y = y(x)$ является решением данного уравнения.

Пример 2. Пусть имеется уравнение

$$(y'')^2 + 2y'y'' + 3 = 0.$$

Покажем, что функция $y = y(x)$, заданная параметрически системой

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \ln t + \frac{3}{4t^2}, \\ y = \frac{1}{4}t + \frac{3}{4t^3} \end{cases} \quad (t > 0) \quad (*)$$

является решением данного уравнения.

Решение. Находим y' и y'' :

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{9}{4t^4}}{\frac{1}{2t} - \frac{3}{2t^3}} = \frac{t^2 + 3}{2t}; y''_{x^2} = (y'_x)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y''_{x^2} = \frac{\frac{t^2 - 3}{2t^2}}{\frac{1}{2t} - \frac{3}{2t^3}} = \frac{t^2 - 3}{t^2 - 3} \cdot t \Rightarrow y''_{x^2} = t. \end{aligned}$$

Подставив найденные выражения для y'_x и y''_{x^2} в исходное уравнение, получаем

$$t^2 - \frac{2t}{2t}(t^2 + 3) + 3 \Rightarrow t^2 - t^2 - 3 + 3 = 0.$$

Следовательно, функция $y = y(x)$, определяемая системой (*), является решением данного уравнения.

5°. Задача Коши для дифференциального уравнения n -го порядка вида (1): $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ состоит в следующем: среди всех решений этого уравнения найти такое решение

$y = \varphi(x)$, которое удовлетворяет наперед заданным начальным условиям:

$$y|_{x=x_0} = y_0; y'|_{x=x_0} = y'_0; \dots; y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \quad (2)$$

Здесь $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — числа такие, что точка $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in (D)$.

6°. Понятие единственности решения задачи Коши.

Пусть даны уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1)$$

и начальные условия

$$y|_{x=x_0} = y_0; y'|_{x=x_0} = y'_0; \dots; y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \quad (2)$$

Предполагается, что $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, и что точка $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in (D)$.

Пусть $y = \tilde{\varphi}(x)$, $x \in I_{\tilde{\delta}} = (x_0 - \tilde{\delta}, x_0 + \tilde{\delta})$, и $y = \tilde{\tilde{\varphi}}(x)$, $x \in I_{\tilde{\tilde{\delta}}} = (x_0 - \tilde{\tilde{\delta}}, x_0 + \tilde{\tilde{\delta}})$, — любые два решения задачи (1) — (2). Тогда: если существует интервал $I_{\tilde{\delta}} = (x_0 - \tilde{\delta}, x_0 + \tilde{\delta})$ такой, что $\tilde{\varphi}(x) \equiv \tilde{\tilde{\varphi}}(x)$, $x \in I_{\tilde{\delta}}$, то говорят, что задача (1) — (2) имеет *единственное решение*. Точку $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in (D)$ называют в этом случае *точкой единственности* уравнения (1).

Подчеркнем еще раз, что соотношение $\tilde{\varphi}(x) \equiv \tilde{\tilde{\varphi}}(x)$, $x \in I_{\tilde{\delta}}$, должно выполняться для любой пары решений задачи (1) — (2).

Пусть область $(D_*) \subset (D)$ и пусть каждая точка $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in (D_*)$ является точкой единственности уравнения (1). Тогда (D_*) называют *областью единственности* уравнения (1).

Замечание. Для уравнения $(\tilde{1}): F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, не разрешенного относительно производной $y^{(n)}$, задача Коши ставится аналогично задаче Коши для уравнения (1). Однако в

случае уравнения (i) эта постановка задачи Коши нуждается в уточнении. Дело в том, что заданным числам $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ может отвечать не одно, а несколько значений $y^{(n)}$, определяемых из уравнения

$$F(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0. \quad (3)$$

7°. Существование и единственность решения задачи Коши для уравнения, разрешенного относительно старшей производной $y^{(n)}$, гарантирует теорема Коши—Пикара

Пусть имеется уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1)$$

Если функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ непрерывна в области (D) , $(D) \subset R^{n+1}$, и имеет в (D) непрерывные частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}, \text{ то для любой точки } (x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in (D)$$

задача (1) — (2) имеет единственное решение.

Это решение определено в некоторой окрестности $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 и удовлетворяет условиям

$$y|_{x=x_0} = y_0; y'|_{x=x_0} = y'_0; \dots; y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \quad (2)$$

Теорема будет доказана позже. Она будет получена как частный случай теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Замечание (о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения, не разрешенного относительно $y^{(n)}$). Пусть имеется уравнение

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (\bar{1})$$

Рассмотрим уравнение

$$F(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \quad (3)$$

где $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа (см. начальные условия (2)). Пусть $y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_m^{(n)}$ — числа, которые являются различными

ми вещественными корнями уравнения (3). Ради простоты ограничимся рассмотрением случая, когда уравнение (3) имеет конечное число вещественных корней.

Пусть $(\bar{P}_k)$, $k = \overline{1, m}$ — прямоугольный параллелепипед с центром в точке $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}, y_k^{(n)})$. Пусть параллелепипеды $(\bar{P}_k)$ такие, что $(\bar{P}_i) \cap (\bar{P}_j) = \emptyset$, $i, j = \overline{1, m}$, $i \neq j$. Предположим, что в каждом параллелепипеде $(\bar{P}_k)$, $k = \overline{1, m}$, функция $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$, $F'_y(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$, $F'_{y'}(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$, ..., $F'_{y^{(n)}}(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ и что $F'_{y^{(n)}}|_{(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}, y_k^{(n)})} \neq 0$, $k = \overline{1, m}$.

Видим, что в каждом параллелепипеде $(\bar{P}_k)$, $k = \overline{1, m}$, выполнены условия теоремы об однозначной разрешимости уравнения (I) относительно $y^{(n)}$ (см. теорию неявных функций). Следовательно, существует окрестность $\bar{U}_{p_k}(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ точки $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$, $k = \overline{1, m}$, в которой уравнение (I) определяет $y^{(n)}$ как однозначную непрерывную функцию от $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$, а именно:

$$y^{(n)} = f_k(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), k = \overline{1, m},$$

причем функция $f_k(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ имеет в $\bar{U}_{p_k}(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ непрерывные частные производные $\frac{\partial f_k}{\partial x}, \frac{\partial f_k}{\partial y}, \frac{\partial f_k}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial y^{(n-1)}}$. Так как в $\bar{U}_{p_k}(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ функция $f_k(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f_k}{\partial y}, \frac{\partial f_k}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial y^{(n-1)}}$, то по теореме существования и единственности решения задачи Коши уравнения, разрешенного относительно старшей производной $y^{(n)}$, заключаем, что

каждому из значений $y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_m^{(n)}$, определяемых из уравнения (3), соответствует только одно решение уравнения (1).

8°. Общее и частное решения уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1)$$

где $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Пусть $(D_*) \subset (D)$ и $(\tilde{D}_*)$ — область единственности для уравнения (1).

Определение. Функция

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (4)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ — произвольные постоянные, называется *общим решением* уравнения (1) в области (D_*) , если:

1) функция $\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ имеет непрерывные частные производные по x до порядка n включительно;

2) для любой точки $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in (D_*)$ система

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y'_0 = \varphi'(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ \dots\dots\dots \\ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{cases} \quad (5)$$

разрешима единственным образом относительно $C_1, C_2, \dots, C_n$:

$$\begin{cases} C_1^0 = \psi_1(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}), \\ C_2^0 = \psi_2(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}), \\ \dots\dots\dots \\ C_n^0 = \psi_n(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}); \end{cases} \quad (6)$$

3) функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$, $x \in I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, является решением уравнения (1) при любых значениях произвольных постоянных $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ в равенствах (6), когда точка $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in (D_*)$.

Геометрически общее решение уравнения (1) в (D_*) представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости Oxy , зависящее от n параметров $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Отметим, что если известно общее решение (4) уравнения (1) в области (D_*) , то решить задачу Коши (1) — (2) можно следующим образом: сначала дифференцируем по x функцию $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ последовательно $(n-1)$ раз. Затем в соотношение (4) и в те соотношения, которые получаются из (4) последовательным $(n-1)$ -кратным дифференцированием по x , подставляем начальные условия (2): $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y'_0$, ..., $y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$. В результате для определения $C_1, C_2, \dots, C_n$ получаем систему

$$\begin{cases} \varphi(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_0, \\ \varphi'(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y'_0, \\ \dots\dots\dots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Решив эту систему и подставив найденные конкретные значения $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ вместо $C_1, C_2, \dots, C_n$ в (4), получим решение задачи Коши (1) — (2): $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$.

Замечание. Общее решение (4) уравнения (1) в области (D_*) может получаться в виде, заданном неявно соотношением

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0. \quad (7)$$

Пусть функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ — общее решение уравнения (1) в (D_*) . Тогда всякое решение уравнения (1), получающееся из общего при конкретных (допустимых) числовых значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, называется *частным решением* этого уравнения.

(Допустимыми значениями $C_1, C_2, \dots, C_n$ называются такие, которые определяются равенствами (6), когда точка $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in (D_*)$.)

§2. Некоторые типы уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка

1°. Уравнения, не содержащие явно искомой функции и нескольких последовательных производных, т. е. уравнения вида

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1 \leq k < n). \quad (1)$$

Порядок такого уравнения заменой: $y^{(k)}(x) = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция, понижается сразу на k единиц. В самом деле, при такой замене имеем:

$$y^{(k+1)} = z', y^{(k+2)} = z'', \dots, y^{(n)} = z^{(n-k)}.$$

Следовательно, уравнение (1) примет вид:

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0. \quad (2)$$

Видим, что (2) — дифференциальное уравнение порядка $(n-k)$. Если уравнение (2) удастся проинтегрировать, то, возвращаясь к переменной y , получим:

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}) \quad \text{или} \quad \Phi(x, y^{(k)}, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}) = 0.$$

В случае, когда в результате интегрирования уравнения (2) получено $y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$, находим последовательно:

$$\begin{aligned} y^{(k-1)} &= \int \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}) dx + \tilde{C}_{n-k+1}, \\ y^{(k-2)} &= \int \left(\int \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}) dx \right) dx + \tilde{C}_{n-k+1}x + \tilde{C}_{n-k+2}, \\ &\vdots \\ y &= \underbrace{\int \dots \int}_{k} \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}) dx \dots dx + C_{n-k+1}x^{k-1} + \\ &+ C_{n-k+2}x^{k-2} + \dots + C_{n-1}x + C_n. \end{aligned}$$

Если же в результате интегрирования уравнения (2) получено

$$\Phi(x, y^{(k)}, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}) = 0, \quad (3)$$

то часто уравнение (3) допускает параметрическое представление

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}), \\ y^{(k)} = \psi(t, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}), \end{cases}$$

где φ — дифференцируемая функция.

В этом случае имеем

$$\begin{aligned} dy^{(k-1)} &= y^{(k)} dx = \psi(t, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}) \cdot \varphi'(t, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}) dt, \\ \Rightarrow y^{(k-1)} &= \int \psi(t, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}) \cdot \varphi'(t, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}) dt + C_{n-k+1} = \\ &= \psi_1(t, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}, C_{n-k+1}). \end{aligned}$$

Аналогично находим $y^{(k-2)}$ и т. д. Для y получаем выражение вида $y = \psi_k(t, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C_n)$. Поэтому система

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}), \\ y = \psi_k(t, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C_n) \end{cases} \quad (4)$$

является общим решением уравнения (1) в параметрической форме.

Пример. Решить уравнение

$$xy''' + y'' = 0.$$

Решение. В этом примере $F(x, y, y', y'', y''') = xy''' + y''$; $F'_x = y''$; $F'_y = 0$; $F'_{y'} = 0$; $F'_{y''} = 1$; $F'_{y'''} = x$. Видим, далее, что $F'_{y'''} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Следовательно, задача Коши для исходного уравнения с любыми начальными данными вида (x_0, y_0, y'_0, y''_0) ($x_0 \neq 0$) имеет единственное решение. Станем рассматривать наше уравнение лишь для $x \neq 0$. Замечаем, что заданное уравнение не содержит y и y' . Делаем замену $y'' = z(x)$ ($z(x)$ — новая неизвестная функция). Тогда $y''' = z'$, и исходное уравнение принимает вид

$$x \cdot z'_x + z = 0 \Leftrightarrow (x \cdot z)'_x = 0 \Rightarrow x \cdot z = C_1 \Rightarrow z = \frac{C_1}{x}$$

(у нас $x \neq 0$), т. е. $y'' = \frac{C_1}{x}$. Теперь находим последовательно

$$y' = C_1 \ln|x| + \tilde{C}_2;$$

$$\begin{aligned} y &= C_1 \int \ln|x| dx + \tilde{C}_2 x + C_3 \Rightarrow y = C_1 (x \ln|x| - x) + \tilde{C}_2 x + C_3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = C_1 x \ln|x| + (\tilde{C}_2 - C_1)x + C_3 \Rightarrow y = C_1 x \ln|x| + C_2 x + C_3. \end{aligned}$$

2°. Уравнения, не содержащие явно независимой переменной, т. е. уравнения вида

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (5)$$

(В уравнение (5) не входит явно независимая переменная x .)
Порядок такого уравнения можно понизить на единицу.

В самом деле, сделаем замену:

$$y'_x = z(y),$$

где $z(y)$ — новая искомая функция, а y — новая независимая переменная. При такой замене будем иметь

$$\begin{cases} y''_{x^2} = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow y''_{x^2} = z \cdot z'_y = \psi_1(z, z'_y), \\ y'''_{x^3} = \frac{dy''_{x^2}}{dx} = \frac{d(z \cdot z'_y)}{dx} = \frac{d(z \cdot z'_y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = (z''_y z + (z'_y)^2) \cdot z = \psi_2(z, z'_y, z''_y), \\ \dots \dots \dots \\ y^{(n)}_{x^n} = \psi_{n-1}(z, z'_y, z''_y, \dots, z^{(n-1)}_y). \end{cases}$$

Подставляя в (5) вместо $y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3}, \dots, y^{(n)}_{x^n}$ полученные для них выражения, получим

$$\begin{aligned} F(y, z, \psi_1(z, z'_y), \psi_2(z, z'_y, z''_y), \dots, \psi_{n-1}(z, z'_y, \dots, z^{(n-1)}_y)) &= 0, \\ \tilde{F}(y, z, z'_y, z''_y, \dots, z^{(n-1)}_y) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Видим, что (6) — дифференциальное уравнение порядка $(n-1)$.

Замечание. При осуществлении замены $y'_x = z(y)$ возможна потеря решения $y = \text{const}$. Поэтому необходимо непосредственной подстановкой в уравнение (5) проверить наличие или отсутствие такого решения у этого уравнения.

Пример. Решить уравнение

$$(y')^2 + 2yy'' = 0.$$

Решение. Здесь $F(x, y, y', y'') = (y')^2 + 2yy''$; $F'_x = 0$; $F'_y = 2y''$; $F'_{y'} = 2y'$; $F'_{y''} = 2y$. Видим, что функция F непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$. Видим, далее, что $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Следовательно, задача Коши для исходного уравнения с любыми начальными условиями вида (x_0, y_0, y'_0) ($y_0 \neq 0$) имеет единственное решение. Станем рассматривать наше уравнение лишь для $y \neq 0$. Непосредственной подстановкой в уравнение убеждаемся, что $y \equiv \text{const}$ является решением заданного уравнения. Замечаем, что исходное уравнение не содержит явно независимую переменную x . Поэтому делаем замену:

$$y'_x = z(y)$$

($z(y)$ — новая неизвестная функция). Имеем

$$y''_{x^2} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'_y \cdot z.$$

Относительно новой неизвестной функции заданное уравнение примет вид

$$z^2 + 2yzz'_y = 0 \Leftrightarrow z(z + 2yz'_y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1) z = 0, \text{ т. е. } y' = 0 \Rightarrow y = \text{const};$$

$$2) z + 2yz'_y = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} + \frac{dy}{2y} = 0 \text{ (считаем } z \neq 0 \text{ и } y \neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|z| + \frac{1}{2}\ln|y| = \ln|C_1^*| (C_1^* \neq 0) \Rightarrow |z|\sqrt{|y|} = |C_1^*| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y| \cdot \sqrt{|y|} = |C_1^*| \Rightarrow y' \cdot \sqrt{|y|} = C_1^* \Rightarrow \frac{2}{3}y^{3/2} = C_1^*x + C_2^*, \text{ если } y > 0,$$

$$\text{и } -\frac{2}{3}(-y)^{3/2} = C_1^*x + C_2^*, \text{ если } y < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\pm y)^3 = \frac{9}{4}(C_1^*x + C_2^*)^2 \Rightarrow y^3 = \pm \frac{9}{4}(C_1^*)^2 \left(x + \frac{C_2^*}{C_1^*} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^3 = C_1(x + C_2)^2, \text{ где } C_1 = \pm \frac{9}{4}(C_1^*)^2, C_2 = \frac{C_2^*}{C_1^*}.$$

3°. Уравнения, однородные относительно искомой функции и ее производных. Так называются уравнения вида:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (7)$$

в которых функция F является однородной относительно $y, y', \dots, y^{(n)}$, т. е.

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

(m — показатель однородности). Порядок такого уравнения можно понизить на единицу.

В самом деле, положим

$$y' = y \cdot z,$$

где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Имеем при такой замене:

$$v^{(n)} = v \cdot w(z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}).$$

248

Станем рассматривать наше уравнение для $y \neq 0$. (Заметим, что $y = 0$ является решением заданного уравнения. Это легко обнаруживается из самого вида уравнения.)

Замечаем, что исходное уравнение является однородным относительно y, y', y'' (показатель однородности $m = 2$). Поэтому делаем замену

$$y' = yz, \quad (11)$$

где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$. Подставляя полученные выражения для y' и y'' в исходное уравнение, будем иметь:

$$(x^2 + 1) [y^2 z^2 - y^2 (z^2 + z')] = xy^2 z \Rightarrow -(x^2 + 1)y^2 z' = xy^2 z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{сократив на } y^2, \text{ получаем}$$

$$-z'(x^2 + 1) = xz \Rightarrow -\frac{dz}{z} = \frac{x dx}{x^2 + 1}. \quad (12)$$

Могли потерять $z = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow y = \text{const}$. ($y = \text{const}$ является решением исходного уравнения. Это легко обнаруживается из вида уравнения.) Из (12) находим:

$$-\ln|z| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \ln|C_1| \Rightarrow z = \frac{C_1}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{C_1}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = C_1 \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}| + \ln|C_2|, \quad C_2 \neq 0 \Rightarrow y = C_2 \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^{C_1}.$$

4°. Обобщенно-однородные уравнения. Так называются уравнения вида

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (13)$$

в которых функция F является такой, что

$$F(\lambda x, \lambda^k y, \lambda^{k-1} y', \lambda^{k-2} y'', \dots, \lambda^{k-n} y^{(n)}) = \lambda^m F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}).$$

Чтобы узнать, будет ли уравнение обобщенно-однородным, и найти число k , нужно приравнять друг другу показатели степеней, в которых число λ будет входить в каждый член уравнения после замены: x на λx , y на $\lambda^k y$, y' на $\lambda^{k-1} y'$, ..., $y^{(n)}$ на $\lambda^{k-n} y^{(n)}$. В результате получим несколько уравнений для k . Если полученные уравнения окажутся совместными, то данное уравнение является обобщенно-однородным; если же эти уравнения будут

несовместными, то данное дифференциальное уравнение не является обобщенно-однородным.

Порядок обобщенно-однородного уравнения можно понизить на единицу. В самом деле, положим $x = e^t$, $y = ze^{kt}$, если $x > 0$, и $x = -e^t$, $y = ze^{kt}$, если $x < 0$. Здесь t — новая независимая переменная, а $z(t)$ — новая неизвестная функция.

Для определенности рассмотрим случай, когда $x > 0$. Будем иметь в этом случае:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = (z'_t e^{kt} + kze^{kt}) \frac{1}{e^t} = (z'_t + kz) e^{(k-1)t},$$

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \left[(z''_t + kz'_t) e^{(k-1)t} + (k-1) e^{(k-1)t} (z'_t + kz) \right] e^{-t} = \\ = \left[z''_t + (2k-1)z'_t + k(k-1)z \right] e^{(k-2)t},$$

.....

$$y^{(n)}_{x^n} = \psi(z, z'_t, \dots, z^{(n)}_t) e^{(k-n)t}.$$

Подстановка выражений для $x, y, y'_x, y''_{x^2}, \dots, y^{(n)}_{x^n}$ в уравнение (13) дает

$$F(e^t, e^{kt}z, e^{(k-1)t}(z'_t + kz), \dots, e^{(k-n)t}\psi(z, z'_t, \dots, z^{(n)}_t)) = 0. \quad (14)$$

Воспользуемся теперь свойством обобщенной однородности функции F . (Здесь в роли λ выступает e^t .) Получим вместо (14)

$$e^{mt} F(1, z, (z'_t + kz), \dots, \psi(z, z'_t, \dots, z^{(n)}_t)) = 0.$$

Откуда, после сокращения на e^{mt} , будем иметь

$$\tilde{F}(z, z'_t, z''_t, \dots, z^{(n)}_t) = 0. \quad (15)$$

Видим, что уравнение (15) не содержит явно независимую переменную t , а такое уравнение, как мы знаем, допускает понижение порядка на единицу (см. пункт 2°).

Пример. Решить уравнение

$$4x^2 y^3 y'' = x^2 - y^4.$$

Решение. Здесь $F(x, y, y', y'') = 4x^2 y^3 y'' + y^4 - x^2$, $F'_x = 8xy^3 y'' - 2x$, $F'_y = 12x^2 y^2 y'' + 4y^3$, $F''_{yy} = 0$, $F'_{yy'} = 4x^2 y^3$. Видим, что функция F непрерывна и имеет непрерывные частные производные

$F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$. Видим, далее, что $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow xy = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) , такими, что $x_0 y_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Выясним, будет ли заданное уравнение обобщенно-однородным. Имеем:

$$2 + 3k + k - 2 = 2 = 4k \Rightarrow 4k = 2 = 4k \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Вывод: заданное уравнение является обобщенно-однородным и число $k = \frac{1}{2}$.

Станем рассматривать заданное уравнение для $x > 0$. Тогда можно положить: $x = e^t$, $y = ze^{t/2}$. При такой замене будем иметь

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \left(z'_t + \frac{1}{2}z \right) e^{\frac{t}{2}} \cdot e^{-t} \Rightarrow y'_x = \left(z'_t + \frac{1}{2}z \right) e^{-\frac{t}{2}}.$$

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \left(z''_t - \frac{1}{4}z \right) e^{-\frac{3}{2}t}.$$

Подставляем выражения для x, y, y'_x, y''_{x^2} в заданное уравнение. Получаем

$$4e^{2t} z^3 e^{\frac{3}{2}t} \left(z''_t - \frac{1}{4}z \right) e^{-\frac{3}{2}t} = e^{2t} - z^4 e^{2t} \Rightarrow 4z^3 \left(z''_t - \frac{1}{4}z \right) = 1 - z^4.$$

Видим, что полученное уравнение не содержит независимую переменную t . Поэтому делаем замену: $z'_t = u(z)$ ($u(z)$ — новая неизвестная функция). Имеем

$$z''_t = \frac{dz'_t}{dt} = \frac{du(z)}{dt} = \frac{du(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \Rightarrow z''_t = u(z) \cdot u'_z.$$

Относительно функции $u(z)$ получаем уравнение

$$4z^3 \left(uu'_z - \frac{1}{4}z \right) = 1 - z^4 \Leftrightarrow 4z^3 uu'_z = 1 \Leftrightarrow 2udu = \frac{dz}{2z^3}$$

(считаем $y \neq 0$, а следовательно, $z \neq 0$). А тогда

$$\begin{aligned}
 u^2 &= C_1 - \frac{1}{4z^2} \quad (\Rightarrow C_1 > 0) \Leftrightarrow (z'_t)^2 = \frac{4C_1 z^2 - 1}{4z^2} \Rightarrow (2zz'_t)^2 = 4C_1 z^2 - 1 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 2zz'_t = \pm \sqrt{4C_1 z^2 - 1} \Rightarrow \pm \frac{2zz'_t}{\sqrt{4C_1 z^2 - 1}} = dt \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \pm \frac{1}{2C_1} (4C_1 z^2 - 1)^{1/2} = t + \ln C_2 \Rightarrow 4C_1 z^2 - 1 = 4C_1^2 (t + \ln C_2)^2.
 \end{aligned}$$

У нас $t = \ln x$, $z^2 = \frac{y^2}{e^t} = \frac{y^2}{x}$. Следовательно, будем иметь

$$4C_1 \frac{y^2}{x} = 1 + (2C_1 \ln C_2 x)^2 \Rightarrow 4C_1 y^2 = x + (2C_1 \ln C_2 x)^2 x.$$

5°. Уравнения в точных производных. Так называются уравнения вида

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (16)$$

левые части которых являются точными производными от некоторой функции $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, т. е.

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

В этом случае уравнение (16) может быть записано в виде

$$\frac{d\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})}{dx} = 0 \Rightarrow \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C_1. \quad (17)$$

(17) — уравнение $(n-1)$ -го порядка. Следовательно, уравнения в точных производных допускают понижение порядка на единицу.

Пример. Решить уравнение $xy^{(4)} + y'' = 0$.

Решение. Здесь $F(x, y, y', \dots, y^{(4)}) = xy^{(4)} + y''$, $F'_x = y^{(4)}$, $F'_y = 0$, $F'_{y'} = 0$, $F'_{y''} = 0$, $F'_{y'''} = 1$, $F'_{y^{(4)}} = x$. Видим, что функция F непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}, F'_{y'''}, F'_{y^{(4)}}$. Видим, далее, что $F'_{y^{(4)}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Следовательно, задача Коши с любыми начальными данными $(x_0, y_0, y'_0, y''_0, y'''_0)$ ($x_0 \neq 0$) имеет единственное решение. Замечаем, что левая часть заданного уравнения является точной производной от функции $\Phi = xy''$, т. е.

$$xy^{(4)} + y'' = \frac{d}{dx}(xy''').$$

Следовательно, исходное уравнение может быть записано в виде

$$\frac{d}{dx}(xy''') = 0,$$

откуда заключаем, что $xy''' = C_1 \Rightarrow y''' = \frac{C_1}{x}$ (считаем $x \neq 0$). А тогда

$$\begin{aligned} y''' = C_1 \ln|x| + \tilde{C}_2 &\Rightarrow y'' = C_1 \int \ln|x| dx + \tilde{C}_2 x + C_3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y' = C_1 (x \ln|x| - x) + \tilde{C}_2 x + C_3 = \\ &= C_1 x \ln|x| + C_2 x + C_3 \quad (C_2 = \tilde{C}_2 - C_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = C_1 \int x \ln|x| dx + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = C_1 \left(\frac{x^2}{2} \ln|x| - \frac{x^2}{4} \right) + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = C_1^* x^2 \ln|x| + C_2^* x^2 + C_3 x + C_4. \end{aligned}$$

§3. Примеры и задачи к §2

Задача 1. Решить уравнение $x^2 y'' = (y')^2$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = x^2 y'' - (y')^2$; $F'_x = 2xy''$; $F'_y = 0$; $F'_{y'} = -2y'$; $F'_{y''} = x^2$. Видим, что функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($x_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

В заданное уравнение не входит явно y . Поэтому делаем замену $y' = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = z'(x)$. Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение принимает вид:

$$x^2 z' = z^2 \Rightarrow \frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}. \quad (*)$$

Считаем $x \neq 0$; могли потерять: $z = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C(\text{const})$. ($y = C$ — решение исходного уравнения).

Решаем уравнение (*).

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + C_1 \Rightarrow z = \frac{x}{1 + C_1 x}, \text{ т. е. } y' = \frac{x}{1 + C_1 x}.$$

Следует рассмотреть два случая: 1) $C_1 \neq 0$ и 2) $C_1 = 0$.

1) Пусть $C_1 \neq 0$. Тогда

$$y' = \frac{C_1 x}{C_1(C_1 x + 1)} \Rightarrow y' = \frac{1}{C_1} \cdot \frac{(C_1 x + 1) - 1}{(C_1 x + 1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{C_1} x - \frac{1}{C_1^2} \ln|C_1 x + 1| + \tilde{C}_2 \Rightarrow C_1 x - C_1^2 y = \ln|C_1 x + 1| + C_2.$$

2) Пусть $C_1 = 0$. Тогда $y' = x \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + C$.

Задача 2. Решить уравнение $2xy'y'' = (y')^2 - 1$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = 2xy'y'' - (y')^2 + 1$, $F'_x = 2y'y''$, $F'_y = 0$, $F'_{y'} = 2xy'' - 2y'$, $F'_{y''} = 2xy'$. Видим, что функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow xy' = 0$. (Заметим, что функция $y(x)$ такая, что $y' = 0$ заданному уравнению не удовлетворяет.) Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) такими, что $x_0 y'_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

В заданное уравнение не входит явно y . Поэтому делаем замену $y' = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = z'(x)$. Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение принимает вид: $2xz z' = z^2 - 1$. Положим $z^2 - 1 = u(x) \Rightarrow 2z z' = u'$ и, следовательно, будем иметь: $xu' = u \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dx}{x}$. Считаем $x \neq 0$; могли потерять

$$u = 0 \Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \pm 1 \Leftrightarrow y' = \pm 1 \Rightarrow y = \pm x + C$$

($y = \pm x + C$ — решения исходного уравнения).

Из уравнения $\frac{du}{u} = \frac{dx}{x}$ находим $u = C_1 x$ ($C_1 \neq 0$). У нас $u = z^2 - 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
C_1 x &= z^2 - 1 \Leftrightarrow (y')^2 - 1 = C_1 x \Rightarrow \\
\Rightarrow y' &= \pm \sqrt{C_1 x + 1} \Rightarrow dy = \pm \sqrt{C_1 x + 1} dx \Rightarrow \\
y &= \pm \frac{2}{3C_1} (C_1 x + 1)^{3/2} + C_2 \Rightarrow y - C_2 = \pm \frac{2}{3C_1} (C_1 x + 1)^{3/2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow 9C_1^2 (y - C_2)^2 = 4(C_1 x + 1)^3.
\end{aligned}$$

Задача 3. Решить уравнение $y^3 y'' = 1$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = y^3 y'' - 1$, $F'_x = 0$, $F'_y = 3y^2 y''$, $F'_{y'} = 0$, $F'_{y''} = y^3$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y'} = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ($y = 0$ не является решением уравнения). Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($y_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

В заданное уравнение не входит явно независимая переменная x . Поэтому делаем замену: $y'_x = z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$y''_{x^2} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow y''_{x^2} = z'_y z.$$

Относительно функции $z(y)$ исходное уравнение принимает вид

$$y^3 z z'_y = 1 \Rightarrow z dz = \frac{dy}{y^3} \text{ (считаем } y \neq 0 \text{)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{z^2}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y^2} + \frac{C_1}{2} \text{ (ясно, что } C_1 > 0 \text{)} \Rightarrow z^2 = \frac{C_1 y^2 - 1}{y^2} \Rightarrow z = \pm \frac{\sqrt{C_1 y^2 - 1}}{y}.$$

т. е.

$$y' = \pm \frac{\sqrt{C_1 y^2 - 1}}{y} \Rightarrow \frac{y dy}{\pm \sqrt{C_1 y^2 - 1}} = dx. \quad (*)$$

(Могли потерять: $C_1 y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{C_1}}$. Но $y = \text{const}$ не является решением уравнения.) Из уравнения (*) находим:

$$\pm \frac{1}{C_1} \sqrt{C_1 y^2 - 1} = x + \tilde{C}_2 \Rightarrow \pm \sqrt{C_1 y^2 - 1} = C_1 x + C_2 \Rightarrow C_1 y^2 - 1 = (C_1 x + C_2)^2.$$

Задача 4. Решить уравнение $(y')^2 + 2yy'' = 0$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = (y')^2 + 2yy''$, $F'_x = 0$, $F'_y = 2y''$, $F'_{y'} = 2y'$, $F'_{y''} = 2y$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_x = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ($y = 0$ — решение уравнения). Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($y_0 \neq 0$) имеет единственное решение. В заданное уравнение не входит явно независимая переменная x . Поэтому делаем замену: $y'_x = z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y''_{x^2} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'_y \cdot z$. Относительно функции $z(y)$ исходное уравнение принимает вид

$$z^2 + 2yzz'_y = 0. \quad (*)$$

Положим $z^2 = u(y) \Leftrightarrow 2zz'_y = u'_y$ и, следовательно, будем иметь вместо уравнения (*):

$$u + uu'_y = 0 \Leftrightarrow (yu)'_y = 0 \Rightarrow yu = \tilde{C}_1 \Rightarrow u = \frac{\tilde{C}_1}{y}$$

(считаем $y \neq 0$). Следует рассмотреть два случая: 1) $\tilde{C}_1 = 0$ и 2) $\tilde{C}_1 \neq 0$.

1) Пусть $\tilde{C}_1 = 0$. Тогда

$$u = 0 \Leftrightarrow z^2 = 0 \Leftrightarrow y'_x = 0 \Rightarrow y = C(\text{const})$$

— решение исходного уравнения.

2) $\tilde{C}_1 \neq 0$. У нас $u = z^2 = (y'_x)^2$. Следовательно, будем иметь

$$\begin{aligned} (y'_x)^2 = \frac{\tilde{C}_1}{y} &\Rightarrow y'_x = \pm \sqrt{\frac{\tilde{C}_1}{y}} \Rightarrow \pm \sqrt{\frac{y}{\tilde{C}_1}} dy = dx \Rightarrow \pm \frac{2}{3} \left(\frac{y}{\tilde{C}_1} \right)^{3/2} \cdot \tilde{C}_1 = x + C_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \pm \left(\frac{y}{\tilde{C}_1} \right)^{3/2} = \frac{3}{2\tilde{C}_1} (x + C_2) \Rightarrow y^3 = \frac{9}{4} \tilde{C}_1 (x + C_2)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y^3 = C_1 (x + C_2)^2 \quad (C_1 = \frac{9}{4} \tilde{C}_1). \end{aligned}$$

Задача 5. Решить уравнение $y'' = 2yy'$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = y'' - 2yy'$, $F'_x = 0$, $F'_y = -2y'$, $F'_{y'} = -2y$, $F'_{y''} = 1$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} \neq 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) имеет единственное решение. В заданное уравнение не входит явно независимая переменная x . Поэтому делаем замену: $y'_x = z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$y''_{x^2} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow y''_{x^2} = z'_y z.$$

Относительно функции $z(y)$ исходное уравнение принимает вид

$$zz'_y = 2yz \Leftrightarrow z(z'_y - 2y) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$: 1) $z = 0 \Leftrightarrow y'_x = 0 \Rightarrow y = C(\text{const})$ — решение исходного уравнения;

2) $z'_y - 2y = 0 \Leftrightarrow dz = 2ydy \Rightarrow z = y^2 + C_1$. У нас $z = y'_x$. Следовательно, будем иметь

$$y'_x = y^2 + C_1 \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2 + C_1} = dx.$$

Следует рассмотреть три случая: 1) $C_1 > 0$; 2) $C_1 < 0$ и 3) $C_1 = 0$.

1) Пусть $C_1 > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{C_1}} &= x + C_2 \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{C_1}} = \sqrt{C_1} \cdot x + \tilde{C}_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{C_1}} &= \operatorname{tg}(\sqrt{C_1} x + \tilde{C}_2) \Rightarrow y = \tilde{C}_1 \operatorname{tg}(\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2). \end{aligned}$$

2) Пусть $C_1 < 0$: обозначим $-C_1 = \tilde{C}_1^2 > 0$. Тогда

$\frac{dy}{y^2 + C_1} = \frac{dy}{y^2 - \tilde{C}_1^2}$ и, следовательно, будем иметь

$$\frac{1}{2\tilde{C}_1} \ln \left| \frac{y - \tilde{C}_1}{y + \tilde{C}_1} \right| = x + C_2 \Rightarrow \ln \left| \frac{y - \tilde{C}_1}{y + \tilde{C}_1} \right| = 2\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2.$$

3) Пусть $C_1 = 0$. Тогда

$$\frac{dy}{y^2} = dx \Rightarrow x = -\frac{1}{y} + C \Rightarrow \frac{1}{y} = C - x \Rightarrow y(C - x) = 1.$$

Задача 6. Решить уравнение $yy'' + 1 = (y')^2$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = yy'' - (y')^2 + 1$, $F'_x = 0$, $F'_y = y''$, $F'_{y'} = -2y'$, $F'_{y''} = y$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ($y = 0$ не является решением уравнения). Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($y_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

В заданное уравнение не входит явно независимая переменная x . Поэтому делаем замену: $y'_x = z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$y''_{x^2} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow y''_{x^2} = z'_y z.$$

Относительно функции $z(y)$ исходное уравнение принимает вид

$$yzz'_y + 1 = z^2. \quad (*)$$

Положим

$$z^2 = u \Rightarrow 2zz'_y = u' \Rightarrow zz'_y = \frac{u'}{2}.$$

Тогда вместо уравнения (*) будем иметь

$$y \frac{u'_y}{2} = u - 1 \Rightarrow \frac{du}{u-1} = 2 \frac{dy}{y}.$$

Было отмечено, что $y = 0$ не является решением исходного уравнения; могли потерять:

$$u = 1 \Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow (y'_x)^2 = 1 \Rightarrow y'_x = \pm 1 \Rightarrow y = C \pm x$$

— решение исходного уравнения.

Решаем уравнение $\frac{du}{u-1} = 2 \frac{dy}{y}$. Получим

$$\begin{aligned} \ln|u-1| &= 2 \ln|y| + \ln|C_1| \quad (C_1 \neq 0) \Rightarrow u-1 = C_1 y^2 \Leftrightarrow z^2 - 1 = C_1 y^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow z = \pm \sqrt{C_1 y^2 + 1} \Rightarrow y'_x = \pm \sqrt{C_1 y^2 + 1} \Rightarrow \pm \frac{dy}{\sqrt{C_1 y^2 + 1}} = dx. \end{aligned}$$

Следует рассмотреть два случая: 1) $C_1 < 0$; 2) $C_1 > 0$.

1) Пусть $C_1 < 0$. Обозначим $-C_1 = \tilde{C}_1^2 > 0$. В этом случае будем иметь

$$\pm \frac{dy}{\sqrt{1 - \tilde{C}_1^2 y^2}} = dx \Rightarrow \pm \frac{1}{\tilde{C}_1} \arcsin \tilde{C}_1 y = x + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arcsin \tilde{C}_1 y = \pm (\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2) \Rightarrow \tilde{C}_1 y = \pm \sin (\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2).$$

2) Пусть $C_1 > 0$. В этом случае будем иметь

$$\pm \frac{dy}{\sqrt{C_1 y^2 + 1}} = dx \Rightarrow \pm \frac{1}{\sqrt{C_1}} \ln \left| \sqrt{C_1} y + \sqrt{C_1 y^2 + 1} \right| = x + C_2.$$

Задача 7. Решить уравнение $y''(e^x + 1) + y' = 0$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = y''(e^x + 1) + y'$, $F'_x = e^x y''$, $F'_y = 0$, $F'_{y'} = 1$, $F'_{y''} = e^x + 1$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} \neq 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) имеет единственное решение.

Запишем исходное уравнение в виде:

$$\frac{y''}{y'} + \frac{1}{e^x + 1} = 0. \quad (*)$$

(Могли потерять: $y' = 0 \Rightarrow y = C(\text{const})$ — решение.) Из уравнения (*) находим:

$$(\ln |y'|)'_x = -\frac{1}{e^x + 1} \Rightarrow \ln |y'| = -x + \ln(e^x + 1) + \ln |C_1| \quad (C_1 \neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{C_1(e^x + 1)}{e^x} \Rightarrow y' = C_1 + C_1 e^{-x} \Rightarrow y = C_1 x - C_1 e^{-x} + C_2.$$

Задача 8. Решить уравнение $y'' = (y')^2$.

Решение. Имеем $f(x, y, y', y'') = (y')^2$, $f'_y = 0$, $f'_{y'} = 0$, $f'_{y''} = 2y''$.

Видим, что $f(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}, f'_{y''}$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0, y''_0) имеет единственное

решение. Запишем заданное уравнение в виде $\frac{y''}{(y')^2} = 1$ (могли потерять: $y'' = 0 \Rightarrow y' = C_1 \Rightarrow y = C_1x + C_2$ — решение уравнения), или в виде

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{y'}\right)'_x &= 1 \Rightarrow -\frac{1}{y'} = x + C_1 \Rightarrow y' = -\frac{1}{x + C_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow y' &= -\ln|x + C_1| - \ln|C_2| \Rightarrow y' = -\ln|C_2(x + C_1)| \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = -\int \ln|C_2(x + C_1)| dx + C_3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = -\left[x \ln|C_2(x + C_1)| - \int \frac{x dx}{x + C_1}\right] + C_3 = \\ &= -x \ln|C_2(x + C_1)| + x - C_1 \ln|x + C_1| + C_3 = \\ &= C_3 - (x + C_1) \ln|C_2(x + C_1)| + C_1 \ln|C_2| \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = \tilde{C}_3 - (x + C_1) \ln|C_2(x + C_1)|. \end{aligned}$$

Задача 9. Решить уравнение $yy'' = (y')^2 - (y')^3$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = yy'' - (y')^2 + (y')^3$, $F'_x = 0$, $F'_y = y''$, $F'_{y'} = -2y' + 3(y')^2$, $F'_{y''} = y$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($y_0 \neq 0$) имеет единственное решение. В заданное уравнение не входит явно независимая переменная x . Поэтому делаем замену: $y'_x = z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$y''_{x^2} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow y''_{x^2} = z'_y z.$$

Относительно функции $z(y)$ исходное уравнение принимает вид:

$$yzz'_y = z^2 - z^3 \Leftrightarrow z[yz'_y - z(1 - z)] = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$: 1) $z = 0 \Leftrightarrow y'_x = 0 \Rightarrow y = C(\text{const})$ — решение.

2) $yz'_y = z(1 - z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dz}{z(1-z)} = \frac{dy}{y}. \quad (*)$$

Могли потерять:

1) $y = 0$ — решение (содержится в решении $y = C$);

2) $z = 1 \Leftrightarrow y'_x = 1 \Rightarrow y = x + C$ — решение.

Уравнение (*) запишем в виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} \right) dz &= \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|z| - \ln|z-1| = \ln|y| + \ln|C_1| (C_1 \neq 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{z}{z-1} &= C_1 y \Rightarrow \frac{y'}{y'-1} = C_1 y \Rightarrow y' = \frac{C_1 y}{C_1 y - 1} \Rightarrow \frac{(C_1 y - 1) dy}{C_1 y} = dx \Rightarrow \\ \Rightarrow dy \cdot \left(1 - \frac{1}{C_1 y} \right) &= dx \Rightarrow y - \frac{1}{C_1} \ln|y| = x + C_2 \Rightarrow y + \bar{C}_1 \ln|y| = x + C_2. \end{aligned}$$

Задача 10. Решить уравнение $y'' = 2(y' - 1) \operatorname{ctg} x$.

Решение. $f(x, y, y', y'') = 2(y' - 1) \operatorname{ctg} x$, $f_y = 0$, $f_{y'} = 0$, $f_{y''} = -2 \operatorname{ctg} x$.

Функция $f(x, y, y', y'')$ непрерывна в областях

$$(G_k) = \begin{cases} k\pi < x < (k+1)\pi, \\ -\infty < y < \infty, \\ -\infty < y' < \infty, \\ -\infty < y'' < \infty, \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

и имеет там непрерывные частные производные: $f'_y, f'_{y'}, f''_{y''}$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0, y''_0) ($x_0 \neq k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно y и y' . Поэтому делаем замену: $y'' = z(x) \Rightarrow y'' = z'$.

Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение принимает вид:

$$z' = 2(z - 1) \operatorname{ctg} x \Rightarrow \frac{dz}{z-1} = 2 \operatorname{ctg} x dx. \quad (*)$$

Могли потерять:

$$z = 1 \Leftrightarrow y'' = 1 \Rightarrow y' = x + C_1 \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

— решение заданного уравнения.

Из уравнения (*) находим

$$\begin{aligned} \ln|z-1| &= 2 \ln|\sin x| + \ln|C_1| \quad (C_1 \neq 0) \Rightarrow z-1 = C_1 \sin^2 x \Rightarrow \\ &\Rightarrow z = C_1 \sin^2 x + 1 \Rightarrow y'' = C_1 \sin^2 x + 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y' = C_1 \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right) + x + C_2 \Rightarrow y = C_1 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{8} \cos 2x \right) + \\ &+ \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \Rightarrow y = \frac{C_1}{4} \left(x^2 + \frac{1}{2} \cos 2x \right) + \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3. \end{aligned}$$

Положим $\tilde{C}_1 = \frac{C_1}{4}$. Будем иметь

$$\begin{aligned} y &= \tilde{C}_1 x^2 + \frac{x^2}{2} + \tilde{C}_1 \cdot \frac{\cos 2x}{2} + C_2 x + C_3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2y = \tilde{C}_1 \cos 2x + (2\tilde{C}_1 + 1)x^2 + \tilde{C}_2 x + \tilde{C}_3. \end{aligned}$$

Задача 11. Решить уравнение $2yy'' = y^2 + (y')^2$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = 2yy'' - y^2 - (y')^2$, $F'_x = 0$, $F'_y = 2y'' - 2y$, $F'_{y'} = -2y'$, $F'_{y''} = 2y$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ($y = 0$ — решение уравнения). Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($y_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно независимую переменную x . Поэтому делаем замену: $y'_x = z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. А тогда

$$y''_{x^2} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow y''_{x^2} = z'_y z.$$

Относительно функции $z(y)$ уравнение принимает вид:

$$2yzz'_y = y^2 + z^2. \quad (*)$$

Положим $z^2(y) = u(y) \Rightarrow 2zz'_y = u'_y$, и, следовательно, уравнение (*) относительно функции $u(y)$ будет таким:

$$yu'_y = u + y^2 \Rightarrow u'_y - \frac{u}{y} - y = 0$$

(могли потерять решение $y = 0$). Получили линейное уравнение относительно функции $u(y)$. Для линейного уравнения интегрирующий множитель находится по формуле

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{dy}{y}} = \frac{1}{y}.$$

После умножения обеих частей уравнения $u'_y - \left(\frac{u}{y} + y\right) = 0$ на

$\mu(y) = \frac{1}{y}$ получаем уравнение в полных дифференциалах:

$$\frac{1}{y} du - \left(\frac{u}{y^2} + 1\right) dy = 0 \Rightarrow u = y(y + C_1).$$

У нас

$$\begin{aligned} u = z^2 &\Rightarrow z^2 = y(y + C_1) \Leftrightarrow (y'_x)^2 = y(y + C_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow y'_x = \pm \sqrt{y^2 + C_1 y} \Rightarrow \pm \frac{dy}{\sqrt{y^2 + C_1 y}} = dx. \end{aligned}$$

Следует рассмотреть два случая: 1) $C_1 = 0$ и 2) $C_1 \neq 0$.

1) Пусть $C_1 = 0$. Тогда имеем:

$$\frac{dy}{y} = \pm dx \Rightarrow \ln|y| = \pm x + \ln|C| \Rightarrow y = Ce^{\pm x}.$$

2) Пусть $C_1 \neq 0$. Тогда имеем:

$$\pm \int \frac{dy}{\sqrt{\left(y + \frac{C_1}{2}\right)^2 - \frac{C_1^2}{4}}} = x + C_2 \Rightarrow \pm \ln \left| y + \frac{C_1}{2} + \sqrt{y^2 + C_1 y} \right| = x + C_2.$$

Задача 12. Решить уравнение $(y'')^3 + xy'' = 2y'$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = (y'')^3 + xy'' - 2y'$, $F'_x = y''$, $F'_y = 0$, $F'_{y'} = -2$, $F'_{y''} = 3(y'')^2 + x$. Функция $F(x, y, y', y'')$ — непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow 3(y'')^2 + x = 0$ (функция $y(x)$, для которой $3(y'')^2 + x = 0$, не является решением заданного уравнения). Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) такими, что $x_0 + 3(y''_0)^2 \neq 0$, имеет единственное решение.

Исходное уравнение не содержит явно y . Поэтому делаем замену: $y' = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. А тогда $y''_x = z'_x$, и, следовательно, исходное уравнение относительно функции $z(x)$ будет таким:

$$(z'_x)^3 + xz'_x = 2z \Rightarrow z = \frac{1}{2}xz'_x + \frac{1}{2}(z')^3.$$

Положим $z' = t$ (t — параметр). Тогда $z = \frac{1}{2}xt + \frac{1}{2}t^3$; $dz = tdx$. Следовательно,

$$\begin{aligned} tdx &= \frac{1}{2}(xdt + tdx) + \frac{3}{2}t^2dt \Rightarrow \frac{1}{2}tdx = \frac{1}{2}xdt + \frac{3}{2}t^2dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow x'_t - \frac{x}{t} = 3t. \end{aligned} \quad (*)$$

Могли потерять: $t = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$ — решение исходного уравнения.

Решение уравнения (*): $x = 3t^2 + C_1t$. У нас

$$z = y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \Rightarrow y'_t = z \frac{dx}{dt}.$$

Но $z = \frac{1}{2}xt + \frac{1}{2}t^3$; $x = 3t^2 + C_1t$. Следовательно,

$$y'_t = \left[\frac{1}{2}t(3t^2 + C_1t) + \frac{1}{2}t^3 \right] (6t + C_1) \Rightarrow y'_t = 12t^4 + 5C_1t^3 + \frac{C_1^2}{2}t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{12}{5}t^5 + \frac{5}{4}C_1t^4 + \frac{C_1^2}{6}t^3 + C_2.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения в параметрической форме будет таким:

$$\begin{cases} x = 3t^2 + C_1t, \\ y = \frac{12}{5}t^5 + \frac{5}{4}C_1t^4 + \frac{C_1^2}{6}t^3 + C_2. \end{cases}$$

Задача 13. Решить уравнение: $(y'')^2 + y' = xy''$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = (y'')^2 + y' - xy''$, $F'_x = -y''$, $F'_y = 0$, $F'_{y'} = 1$, $F'_{y''} = 2y'' - x$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F''_{y''} = 0 \Leftrightarrow 2y'' - x = 0$. (Функция $y(x)$, для которой $2y'' - x = 0$, является решением за-

данного уравнения. Это — функция $y(x) = \frac{x^3}{12} + C$.) Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) такими, что $2y''_0 - x_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Исходное уравнение не содержит явно y . Поэтому делаем замену $y'_x = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. А тогда $y''_{xx} = z'_x$, и, следовательно, исходное уравнение относительно функции $z(x)$ будет таким:

$$(z')^2 - xz' + z = 0 \Rightarrow z' = \frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} - z} \Rightarrow z' - \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} - z}.$$

Положим:

$$\frac{x^2}{4} - z = u \Rightarrow u' = \frac{x}{2} - z'.$$

Будем иметь:

$$-u'' = \pm \sqrt{u} \Rightarrow \frac{du}{\pm \sqrt{u}} = dx.$$

Могли потерять:

$$u = 0 \Leftrightarrow z = \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow y' = \frac{x^2}{4} \Rightarrow y = \frac{x^3}{12} + C$$

— решение исходного уравнения. Из уравнения $\frac{du}{\pm\sqrt{u}} = dx$ находим:

$$\begin{aligned} \mp 2\sqrt{u} &= x + C_1 \Rightarrow 4u = (x + C_1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4z = (x + C_1)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4z = x^2 + 2xC_1 + C_1^2 \Rightarrow z = -\frac{C_1x}{2} - \frac{C_1^2}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y' = -\frac{C_1x}{2} - \frac{C_1^2}{4} \Rightarrow y = -\frac{C_1}{4}x^2 - \frac{C_1^2}{4}x + C_2. \end{aligned}$$

Задача 14. Решить уравнение $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$.

Решение. $f(x, y, y') = -(y')^2 + 2e^{-y} \Rightarrow f'_{y'} = -2e^{-y}, f'_y = -2y'$.
Функция $f(x, y, y')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $f'_{y'}, f'_y$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно независимую переменную x . Поэтому делаем замену: $y'_x = z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. А тогда

$$y''_{x^2} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow y''_{x^2} = z'_y z.$$

Относительно функции $z(y)$ исходное уравнение примет вид $zz'_y + z^2 = 2e^{-y}$. Положим $z^2(y) = u(y) \Rightarrow 2zz'_y = u'_y$. Будем иметь:
 $u'_y + 2u = 4e^{-y}$ (это — линейное уравнение) $\Rightarrow u = C_1 e^{-2y} + 4e^{-y}$.

У нас $u = z^2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} z^2 &= C_1 e^{-2y} + 4e^{-y} \Rightarrow z = \pm\sqrt{C_1 e^{-2y} + 4e^{-y}} \Leftrightarrow y' = \pm\sqrt{C_1 e^{-2y} + 4e^{-y}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dy}{\pm\sqrt{C_1 e^{-2y} + 4e^{-y}}} = dx \Rightarrow \frac{e^y dy}{\pm\sqrt{C_1 + 4e^y}} = dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \pm \frac{1}{2} \sqrt{C_1 + 4e^y} = x + C_2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(C_1 + 4e^y) = (x + C_2)^2 \Rightarrow \tilde{C}_1 + e^y = (x + C_2)^2.$$

Задача 15. Решить уравнение $xy'' = y' - xy''$.

Решение. $F(x, y, y', y'', y''') = xy''' + xy'' - y'$, $F'_x = y'' + y''$, $F'_y = 0$, $F'_{y'} = 0$, $F'_{y''} = x - 1$, $F'_{y'''} = x$. Функция $F(x, y, y', y'', y''')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}, F'_{y'''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0, y''_0) ($x_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно y и y' . Поэтому делаем замену: $y'' = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. А тогда $y''' = z'$, и, следовательно, исходное уравнение принимает вид

$$xz' = z(1 - x) \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{1 - x}{x} dx. \quad (*)$$

Считаем $x \neq 0$; могли потерять:

$$z = 0 \Leftrightarrow y'' = 0 \Rightarrow y = C_1x + C_2$$

— решение. Из уравнения (*) находим:

$$\ln|z| = \ln|x| - x + \ln|C_1| \quad (C_1 \neq 0) \Rightarrow z = C_1xe^{-x}.$$

У нас $z = y''$. Следовательно,

$$y'' = C_1xe^{-x} \Rightarrow y' = C_1(-xe^{-x} - e^{-x}) + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C_1(xe^{-x} + e^{-x} + e^{-x}) + C_2x + C_3 \Rightarrow y = C_1e^{-x}(x + 2) + C_2x + C_3.$$

Задача 16. Решить уравнение $(y'')^2 = (y')^2 + 1$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = (y'')^2 - (y')^2 - 1$, $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, $F'_{y'} = -2y'$, $F'_{y''} = 2y''$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 2y'' \neq 0$ (это видно из заданного уравнения). Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($y''_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно y . Поэтому делаем замену: $y' = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. А тогда $y'' = z'$, и, следовательно, заданное уравнение принимает вид

$$\begin{aligned}
 (z')^2 &= z^2 + 1 \Rightarrow z' = \pm \sqrt{z^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{dz}{\pm \sqrt{z^2 + 1}} = dx \Rightarrow \\
 \Rightarrow \pm \ln \left| z + \sqrt{z^2 + 1} \right| &= x + \ln |C_1|, C_1 \neq 0 \Rightarrow z + \sqrt{z^2 + 1} = C_1 e^x \Rightarrow \\
 \Rightarrow \sqrt{z^2 + 1} &= C_1 e^x - z \Rightarrow z^2 + 1 = C_1^2 e^{2x} - 2C_1 e^x z + z^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow z &= \frac{C_1}{2} e^x - \frac{1}{2C_1} e^{-x} \Rightarrow y' = \frac{C_1}{2} e^x - \frac{1}{2C_1} e^{-x} \Rightarrow \\
 \Rightarrow y &= \frac{C_1}{2} e^x + \frac{1}{2C_1} e^{-x} + C_2.
 \end{aligned}$$

Задача 17. Решить уравнение $y'' = e^y$.

Решение. $f(x, y, y') = e^y \Rightarrow f'_y = e^y, f'_{y'} = 0$. Функция $f(x, y, y')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $f'_y, f'_{y'}$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) имеет единственное решение.

В заданное уравнение не входит явно независимая переменная x . Поэтому делаем замену: $y'_x = z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. А тогда

$$y''_{x^2} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow y''_{x^2} = z'_y z.$$

Относительно функции $z(y)$ исходное уравнение запишется в виде:

$$\begin{aligned}
 z'_y z &= e^y \Leftrightarrow (z^2)'_y = 2e^y \Rightarrow z^2 = 2e^y + C_1 \Rightarrow \\
 \Rightarrow z &= \pm \sqrt{2e^y + C_1} \Rightarrow y' = \pm \sqrt{2e^y + C_1} \Rightarrow \frac{dy}{\pm \sqrt{2e^y + C_1}} = dx.
 \end{aligned}$$

Следует рассмотреть случаи: 1) $C_1 = 0$; 2) $C_1 < 0$; 3) $C_1 > 0$.

1) Пусть $C_1 = 0$. Имеем в этом случае

$$\begin{aligned}
 \pm e^{-y/2} dy &= \sqrt{2} dx \Rightarrow \mp 2e^{-y/2} = \sqrt{2}x + \sqrt{2}C \Rightarrow \\
 \Rightarrow 4e^{-y} &= 2(x + C)^2 \Rightarrow e^y (x + C)^2 = 2.
 \end{aligned}$$

2) Пусть $C_1 < 0$. Обозначим $C_1 = -\tilde{C}_1^2$ ($\tilde{C}_1^2 > 0$). Имеем в этом случае

$$\frac{dy}{\pm\sqrt{2e^y - \tilde{C}_1^2}} = dx \Leftrightarrow \frac{dy}{\pm\sqrt{2}e^{y/2}\sqrt{1 - \frac{\tilde{C}_1^2 e^{-y}}{2}}} = dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pm \frac{2}{\tilde{C}_1} \cdot \frac{d\left(-\frac{\tilde{C}_1 e^{-y/2}}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{C}_1 e^{-y/2}}{\sqrt{2}}\right)^2}} = dx \Rightarrow \pm \frac{2}{\tilde{C}_1} \arcsin\left(\frac{\tilde{C}_1 e^{-y/2}}{\sqrt{2}}\right) = x + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pm \frac{\tilde{C}_1 e^{-y/2}}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\tilde{C}_1}{2} (x + C_2) \Rightarrow \tilde{C}_1^2 e^{-y} = 2 \sin^2 \left(\frac{\tilde{C}_1}{2} (x + C_2) \right).$$

Положим $\frac{\tilde{C}_1}{2} = C_1^*$; $\frac{\tilde{C}_1}{2} \cdot C_2 = C_2^*$. Будем иметь

$$4(C_1^*)^2 e^{-y} = 2 \sin^2(C_1^* x + C_2^*) \Rightarrow 2(C_1^*)^2 = e^y \sin^2(C_1^* x + C_2^*).$$

3) Пусть $C_1 > 0$. Обозначим $C_1 = \tilde{C}_1^2$. Имеем в этом случае

$$\frac{dy}{\pm\sqrt{2e^y + \tilde{C}_1^2}} = dx \Leftrightarrow \frac{dy}{\pm\sqrt{2}e^{y/2}\sqrt{1 + \left(\frac{\tilde{C}_1 e^{-y/2}}{\sqrt{2}}\right)^2}} = dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pm \frac{2}{\tilde{C}_1} \cdot \frac{d\left(\frac{\tilde{C}_1 e^{-y/2}}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tilde{C}_1 e^{-y/2}}{\sqrt{2}}\right)^2}} = dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pm \frac{2}{\tilde{C}_1} \ln \left| \frac{\tilde{C}_1 e^{-y/2}}{\sqrt{2}} + \sqrt{1 + \left(\frac{\tilde{C}_1 e^{-y/2}}{\sqrt{2}}\right)^2} \right| = x + C_2,$$

или

$$\pm \frac{2}{\tilde{C}_1} \operatorname{Arsh} \left(\frac{\tilde{C}_1 e^{-y/2}}{\sqrt{2}} \right) = x + C_2 \Rightarrow \pm \operatorname{Arsh} \left(\frac{\tilde{C}_1 e^{-y/2}}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\tilde{C}_1}{2} (x + C_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\tilde{C}_1}{\sqrt{2}} e^{-y/2} = \operatorname{sh} \left(\frac{\tilde{C}_1}{2} (x + C_2) \right).$$

Обозначим $\frac{\tilde{C}_1}{2} = C_1^*$, $\frac{\tilde{C}_1}{2} C_2 = C_2^*$. Будем иметь

$$2(C_1^*)^2 e^{-y} = \operatorname{sh}^2(C_1^* x + C_2^*) \Rightarrow e^y \operatorname{sh}^2(C_1^* x + C_2^*) = 2(C_1^*)^2.$$

Задача 18. Решить уравнение $y'' - xy'' + y'' = 0$.

Решение. $F(x, y, y', y'', y''') = y'' - xy'' + y''$, $F'_x = -y''$, $F'_y = 0$, $F'_{y'} = 0$, $F'_{y''} = 1$, $F'_{y'''} = 1 - x$. Функция $F(x, y, y', y'', y''')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}, F'_{y'''}$; $F'_{y'''} = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0, y''_0) ($x_0 \neq 1$) имеет единственное решение. Заданное уравнение не содержит явно y и y' . Поэтому делаем замену: $y'' = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y''' = z'$, и, следовательно, исходное уравнение принимает вид:

$$z = xz' - (z')^3. \quad (*)$$

Станем искать решение уравнения (*) в параметрической форме. С этой целью полагаем $z' = t$ (t — параметр). Тогда $z = xt - t^3$. Так как $z' = t \Leftrightarrow dz = tdx$, то получаем

$$xdt + tdx - 3t^2 dt = tdx \Rightarrow (x - 3t^2)dt = 0 \Rightarrow 3t^2 = x \Rightarrow t = \pm \left(\frac{x}{3} \right)^{1/2}.$$

Следовательно, $z = \pm \frac{x^{3/2}}{\sqrt{3}} \mp \frac{x^{3/2}}{3\sqrt{3}}$. У нас $z = y''$. Поэтому

$$y'' = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} x^{3/2} \Rightarrow y' = \pm \frac{2 \cdot 2}{3\sqrt{3} \cdot 5} x^{5/2} + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \pm \frac{8}{315} x^3 \sqrt{3x} + C_1 x + C_2.$$

Выясним, не потеряны ли решения вида $z = ax + b$. Подстановка в уравнение (*) дает: $ax + b = xa - a^3$. Видим, что если $b = -a^3$, то $z = ax - a^3$ — решение уравнения (*). Обозначим $a = C_1$ (произвольная постоянная). Тогда

$$y'' = C_1 x - C_1^3 \Rightarrow y' = C_1 \frac{x^2}{2} - C_1^3 x + C_2 \Rightarrow y = C_1 \frac{x^3}{6} - C_1^3 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Выясним, не имеет ли уравнение (*) решений, определяемых системой

$$\begin{cases} f(x, z, z') = 0, \\ f'_x(x, z, z') = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = xz' - (z')^3, \\ 0 = x - 3(z')^2 \end{cases} \Rightarrow z' = \pm \left(\frac{x}{3} \right)^{1/2}.$$

Такое решение имеется, и оно было получено выше:

$$y = \pm \frac{8}{315} x^3 \sqrt{3x} + C_1 x + C_2.$$

Задача 19. Решить уравнение $2y'(y'' + 2) = x(y'')^2$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = 2y'(y'' + 2) - x(y'')^2$, $F'_x = -(y'')^2$, $F'_y = 0$, $F'_{y'} = 2(y'' + 2)$, $F'_{y''} = 2y' - 2xy''$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y'} = 0 \Leftrightarrow 2(y' - xy'') = 0$ (функция $y(x)$, определяемая этим соотношением, не является решением исходного уравнения). Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) такими, что $y'_0 - x_0 y''_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно y . Поэтому делаем замену $y' = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned} 2z(z' + 2) = x(z')^2 &\Rightarrow (z')^2 - 2\frac{z}{x}z' - 4\frac{z}{x} = 0 \quad (\text{считаем } x \neq 0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow z' = \frac{z}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{z}{x}\right)^2 + 4\frac{z}{x}}. \end{aligned}$$

Положим

$$\frac{z}{x} = u(x) \Rightarrow z = xu \Rightarrow z' = u + xu'.$$

Будем иметь

$$u + xu' = u \pm \sqrt{u^2 + 4u} \Rightarrow xdu = \pm \sqrt{u^2 + 4u} dx \Rightarrow \frac{du}{\pm \sqrt{u^2 + 4u}} = \frac{dx}{x}. \quad (*)$$

Могли потерять: 1) $u = 0$ и 2) $u = -4$.

1) Пусть $u = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$ — решение.

2) Пусть $u = -4 \Rightarrow z = -4x \Rightarrow y' = -4x \Rightarrow y = -2x^2 + C$ — решение.

Из уравнения (*) находим

$$\begin{aligned} \pm \frac{du}{\sqrt{(u+2)^2 - 4}} &= \frac{dx}{x} \Rightarrow \pm \ln \left| u + 2 + \sqrt{u^2 + 4u} \right| = \\ &= \ln |x| + \ln |C_1| \quad (C_1 \neq 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow u + 2 + \sqrt{u^2 + 4u} &= C_1 x \Rightarrow \sqrt{u^2 + 4u} = (C_1 x - u - 2) \Rightarrow \\ \Rightarrow u^2 + 4u &= C_1^2 x^2 + u^2 + 4 - 2C_1 x u - 4C_1 x + 4u \Rightarrow \\ \Rightarrow 2C_1 x u &= C_1^2 x^2 - 4C_1 x + 4 \Rightarrow 2C_1 z = (C_1 x - 2)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow y' &= \frac{(C_1 x - 2)^2}{2C_1} \Rightarrow y = \frac{(C_1 x - 2)^3}{6C_1^2} + C_2. \end{aligned}$$

Задача 20. Решить уравнение $y^4 - y^3 y'' = 1$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = y^4 - y^3 y'' - 1$, $F'_x = 0$, $F'_y = 4y^3 - 3y^2 y''$, $F'_{y'} = 0$, $F'_{y''} = -y^3$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y'} = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ($y = 0$ не является решением заданного уравнения). Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($y_0 \neq 0$) имеет единственное решение. Заданное уравнение не содержит явно независимую переменную x . Поэтому делаем замену: $y'_x = z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$y''_{x^2} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow y''_{x^2} = z'_y z.$$

Относительно функции $z(y)$ исходное уравнение будет таким:

$$y^3 z z'_y = y^4 - 1 \Rightarrow z dz = \frac{y^4 - 1}{y^3} dy$$

($y = 0$ не является решением исходного уравнения), откуда

$$\begin{aligned}\frac{z^2}{2} &= \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y^2} + \frac{C_1}{2} \Rightarrow z^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} + C_1 \Leftrightarrow (y')^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} + C_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (y')^2 = \frac{y^4 + C_1 y^2 + 1}{y^2} \Rightarrow y' = \pm \frac{\sqrt{y^4 + C_1 y^2 + 1}}{y} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \pm \frac{y dy}{\sqrt{y^4 + C_1 y^2 + 1}} = dx\end{aligned}$$

$$(\text{замена: } y^2 = t \Rightarrow y dy = \frac{dt}{2})$$

$$\begin{aligned}&\pm \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{\left(t + \frac{C_1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{C_1^2}{4}}} = x + \frac{C_2}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln \left| t + \frac{C_1}{2} \pm \sqrt{t^2 + C_1 t + 1} \right| = 2x + C_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln \left| y^2 + \frac{C_1}{2} + \sqrt{y^4 + C_1 y^2 + 1} \right| = 2x + C_2.\end{aligned}$$

Задача 21. Решить уравнение $(y')^2 = (3y - 2y')y''$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = (y')^2 + (2y' - 3y)y''$, $F'_x = 0$, $F'_y = -3y''$, $F'_{y'} = 2y' + 2y''$, $F'_{y''} = 2y' - 3y$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y'} = 0 \Leftrightarrow 2y' - 3y = 0$ ($y = 0$ и $y = e^{\frac{3}{2}x} + 1$, определяемые уравнением $2y' - 3y = 0$, являются решениями исходного уравнения). Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) , такими, что $2y'_0 - 3y_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно независимую переменную x . Поэтому делаем замену: $y'_x = z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$y_{x^2}'' = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow y_{x^2}'' = z_y' z,$$

и, следовательно, исходное уравнение принимает вид:

$$z^2 = (3y - 2z)zz_y' \Rightarrow z = (3y - 2z)z_y'. \quad (*)$$

Могли потерять $z = 0 \Leftrightarrow y_x' = 0 \Rightarrow y = C(\text{const})$ — решение исходного уравнения.

Запишем уравнение (*) в виде

$$zy_z' = 3y - 2z \Rightarrow y_z' - \frac{3}{z}y + 2 = 0$$

— линейное уравнение относительно функции $y(z)$. Решая это уравнение, находим: $y = z + C_1 z^3$. У нас $z = y_x'$. Следовательно, получаем $y = y' + C_1 (y')^3$. Это уравнение решаем методом введения параметра, а именно, полагаем $y' = t$. Тогда $y = t + C_1 t^3$. Так как $y' = t \Leftrightarrow t dx = dy$, то получаем

$$t dx = dt + 3C_1 t^2 dt \Rightarrow dx = \left(3C_1 t + \frac{1}{t} \right) dt.$$

(Могли потерять: $t = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Но это решение было получено раньше.) А тогда $x = \frac{3}{2}C_1 t^2 + \ln|t| + \ln|C_2|$ ($C_2 \neq 0$). Таким образом, найдено общее решение исходного уравнения в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = 3\tilde{C}_1 t^2 + \ln|C_2 t|, \\ y = t + 2\tilde{C}_1 t^3, \end{cases} \quad \tilde{C}_1 = \frac{C_1}{2}.$$

Задача 22. Решить уравнение $y''(2y' + x) = 1$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = y''(2y' + x) - 1$, $F_x' = y''$, $F_y' = 0$, $F_{y'}' = 2y''$, $F_{y''}' = 2y' + x$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные F_x' , F_y' , $F_{y'}'$, $F_{y''}'$; $F_{y''}' = 0 \Leftrightarrow 2y' + x = 0$ (функция $y(x)$, определяемая уравнением $2y' + x = 0$, не являет-

ся решением исходного уравнения). Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) , такими, что $2y'_0 + x_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно y . Поэтому делаем замену: $y' = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = z'$, и, следовательно, исходное уравнение принимает вид

$$z'_x(2z + x) = 1 \Rightarrow x'_z - x = 2z$$

(это — линейное уравнение относительно функции $x(z)$). Решая его, находим: $x = C_1 e^z - 2(z + 1) \Rightarrow x = C_1 e^{y'} - 2(y' + 1)$. Это уравнение станем решать методом введения параметра, а именно, полагаем: $y' = t$. Тогда $x = C_1 e^t - 2(t + 1)$. Так как $y' = t$, то $dy = t dx$, и, следовательно, получаем

$$dy = t(C_1 e^t - 2) dt \Rightarrow y = C_1(t - 1)e^t - t^2 + C_2.$$

Общее решение исходного уравнения получено в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = C_1 e^t - 2t - 2, \\ y = C_1(t - 1)e^t - t^2 + C_2. \end{cases}$$

Задача 23. Решить уравнение $(y'')^2 - 2y'y'' + 1 = 0$.

Решение. $F(x, y, y', y'', y''') = (y'')^2 - 2y'y'' - 1 = 0$, $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, $F'_{y'} = -2y''$, $F'_{y''} = 2y'$, $F'_{y'''} = -2y'$. Функция $F(x, y, y', y'', y''')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}, F'_{y'''}$; $F'_{y'''} = 0 \Leftrightarrow y' = 0$ (функция, определяемая уравнением $y' = 0$, не является решением исходного уравнения). Задача Коши заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0, y''_0) ($y'_0 \neq 0$) имеет единственное решение. Заданное уравнение не содержит явно y . Поэтому делаем замену: $y' = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = z'$, $y''' = z''$, и, следовательно, заданное уравнение принимает вид:

$$(z')^2 - 2zz'' + 1 = 0. \quad (*)$$

Полученное уравнение (*) не содержит явно независимую переменную x . Поэтому делаем замену: $z'_x = u(z)$, где $u(z)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$z''_{x^2} = \frac{du(z)}{dz} = \frac{du(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = u'_z u,$$

и, следовательно, вместо уравнения (*) будем иметь

$$u^2 - 2zuu'_z + 1 = 0. \quad (**)$$

Положим $u^2 = v \Rightarrow 2uu'_z = v'_z$. Получим вместо уравнения (**):

$$v + 1 = z v'_z \Rightarrow \frac{dv}{v+1} = \frac{dz}{z}. \quad (***)$$

(Могли потерять: 1) $z = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C(\text{const})$ — не является решением исходного уравнения; 2) $v = -1$ — невозможно, ибо $v = u^2 \geq 0$.) Из уравнения (***) находим:

$$v + 1 = C_1 z, \text{ где } C_1 \neq 0 \Rightarrow u^2 + 1 = C_1 z \Leftrightarrow (z'_x)^2 + 1 = C_1 z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'_{x^2} = \pm \sqrt{C_1 z - 1} \Rightarrow \pm \frac{2}{C_1} (C_1 z - 1)^{1/2} \stackrel{?}{=} x + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{C_1^2} (C_1 z - 1) = (x + C_2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{C_1} + \frac{C_1}{4} (x + C_2)^2 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{C_1} + \frac{C_1}{4} (x + C_2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{C_1} x + \frac{C_1}{12} (x + C_2)^3 + \tilde{C}_3 \Rightarrow 12(C_1 y - x) = C_1^2 (x + C_2)^3 + C_3.$$

Задача 24. Решить уравнение $(1 - x^2)y'' + xy' = 2$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = (1 - x^2)y'' + xy' - 2$, $F'_x = -2xy'' + y'$, $F'_y = 0$, $F'_{y'} = x$, $F'_{y''} = 1 - x^2$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($x_0 \neq \pm 1$) имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно y . Поэтому делаем замену: $y' = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = z'$, и, следовательно, заданное уравнение принимает вид

$$(1-x^2)z' + xz = 2 \Rightarrow z' + \frac{x}{1-x^2}z = \frac{2}{1-x^2} \quad (*)$$

(считаем $x \neq \pm 1$). Уравнение (*) — линейное. Полагаем $z = uv$. Тогда будем иметь

$$u'v + uv' + \frac{x}{1-x^2}uv = \frac{2}{1-x^2} \Rightarrow u'v + u\left(v' + \frac{x}{1-x^2}v\right) = \frac{2}{1-x^2};$$

$$v' + \frac{x}{1-x^2}v = 0; v' = v \frac{x}{x^2-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{x^2-1}, \text{ если } |x| > 1, \text{ и } v = \sqrt{1-x^2}, \text{ если } |x| < 1.$$

$$1) u'\sqrt{x^2-1} = -\frac{2}{x^2-1} \Rightarrow u' = -\frac{2}{(x^2-1)^{3/2}} \Rightarrow u = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} + C_1 (|x| > 1);$$

$$2) u'\sqrt{1-x^2} = \frac{2}{1-x^2} \Rightarrow u' = \frac{2}{(1-x^2)^{3/2}} \Rightarrow u = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} + C_1 (|x| < 1).$$

Следовательно, $z = 2x + C_1\sqrt{x^2-1}$, если $|x| > 1$, и $z = 2x + C_1\sqrt{1-x^2}$, если $|x| < 1$.

Таким образом, имеем $y' = 2x + C_1\sqrt{x^2-1}$, если $|x| > 1$, и $y' = 2x + C_1\sqrt{1-x^2}$, если $|x| < 1 \Rightarrow$

$$y = x^2 + C_2 + \tilde{C}_1 \left(x\sqrt{x^2-1} - \ln|x + \sqrt{x^2-1}| \right), \text{ где } \tilde{C}_1 = \frac{C_1}{2}, |x| > 1;$$

$$y = x^2 + C_2 + \tilde{C}_1 \left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right), \text{ где } \tilde{C}_1 = \frac{C_1}{2}, |x| < 1.$$

Задача 25. Решить уравнение $yy'' - 2yy'\ln y = (y')^2$ ($y > 0$).

Решение. $F(x, y, y', y'') = yy'' - 2yy'\ln y - (y')^2$, $F'_x = 0$,
 $F'_y = y'' - 2y'\ln y - 2y'$, $F'_{y'} = -2y\ln y - 2y'$, $F'_{y''} = y$. Функция

$F(x, y, y', y'')$ непрерывна во всем пространстве (x, y, y', y'') , где $y > 0$, и имеет там непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F''_{yy}, F''_{yy'}$; $F''_{yy'} = y > 0 (\neq 0)$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($y_0 > 0$) имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно независимую переменную x . Поэтому делаем замену: $y'_x = z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y''_{x^2} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'_y z$; и, следовательно, исходное уравнение принимает вид:

$$yzz'_y - 2yz \ln y = z^2 \Rightarrow z'_y - \frac{z}{y} = 2 \ln y. \quad (*)$$

Могли потерять: $z = 0 \Leftrightarrow y'_x = 0 \Rightarrow y = C$ ($C > 0$) — решение исходного уравнения.

Замечаем, что уравнение $(*)$ — линейное относительно функции $z(y)$. $z = y \ln^2 y + C_1 y$ — решение уравнения $(*)$. У нас $z = y'_x$. Следовательно, будем иметь

$$y' = y \ln^2 y + C_1 y \Rightarrow \frac{dy}{y(\ln^2 y + C_1)} = dx \Leftrightarrow \int \frac{d \ln y}{\ln^2 y + C_1} = x + C_2.$$

Следует рассмотреть случаи: 1) $C_1 > 0$; 2) $C_1 = 0$; 3) $C_1 < 0$.

1) Пусть $C_1 > 0$. Обозначим $C_1 = \tilde{C}_1^2 (> 0)$. В этом случае будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{C}_1} \operatorname{arctg} \frac{\ln y}{\tilde{C}_1} &= x + C_2 \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{\ln y}{\tilde{C}_1} = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2 \quad (\tilde{C}_2 = C_2 \tilde{C}_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln y = \tilde{C}_1 \operatorname{tg}(\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2). \end{aligned}$$

2) Пусть $C_1 = 0$. В этом случае имеем

$$\int \frac{d \ln y}{\ln^2 y} = x + C_2 \Rightarrow -\frac{1}{\ln y} = x + C_2 \Rightarrow (x + C_2) \ln y = -1.$$

3) Пусть $C_1 < 0$. Обозначим $-C_1 = \tilde{C}_1^2 (> 0)$. Будем иметь в этом случае

$$\int \frac{d \ln y}{\ln^2 y - \tilde{C}_1^2} = x + C_2 \Rightarrow \frac{1}{2\tilde{C}_1} \ln \left| \frac{\ln y + \tilde{C}_1}{\ln y - \tilde{C}_1} \right| = x + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \left| \frac{\ln y + \tilde{C}_1}{\ln y - \tilde{C}_1} \right| = 2\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2, \text{ где } \tilde{C}_2 = 2\tilde{C}_1 C_2.$$

Задача 26. Решить уравнение $(y' + 2y)y'' = (y')^2$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = (y' + 2y)y'' - (y')^2$, $F'_x = 0$, $F'_y = 2y''$, $F'_{y'} = y'' - 2y'$, $F'_{y''} = y' + 2y$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow y' + 2y = 0$. (Функции $y = 0$ и $y = Ce^{-2x}$, определяемые уравнением $y' + 2y = 0$, являются решениями исходного уравнения.) Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) , такими, что $y'_0 + 2y_0 \neq 0$, имеет единственное решение. Заданное уравнение не содержит явно независимую переменную x . Поэтому делаем замену: $y'_x = z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$y''_{x^2} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow y''_{x^2} = z'_y z.$$

Относительно функции $z(y)$ исходное уравнение принимает вид:

$$(z + 2y)zz'_y = z^2 \Rightarrow (z + 2y)z'_y = z. \quad (*)$$

Могли потерять: $z = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C(\text{const})$ — решение исходного уравнения. Перепишем уравнение $(*)$ в виде

$$y'_z - \frac{2}{z}y = 1. \quad (**)$$

Уравнение $(**)$ — линейное относительно функции $y(z)$; $y = C_1 z^2 - z$ — решение уравнения $(**)$. У нас $z = y'_x$. Следовательно,

$$y = C_1 (y'_x)^2 - y'_x, \quad (***)$$

Следует рассмотреть случаи: 1) $C_1 = 0$ и 2) $C_1 \neq 0$.

1) Пусть $C_1 = 0$. В этом случае имеем $y = -y'_x \Rightarrow y = Ce^{-x}$ — решение исходного уравнения.

2) Пусть $C_1 \neq 0$. Станем искать решение уравнения (***) методом введения параметра, а именно положим $y' = t$. Тогда $y = C_1 t^2 - t$. Так как $y' = t$, то $dy = t dx$. Следовательно, будем иметь

$$(2C_1 t - 1) dt = t dx \Rightarrow dx = \left(2C_1 - \frac{1}{t} \right) dt \Rightarrow x = 2C_1 t - \ln |t| + C_2.$$

Могли потерять: $t = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$. Это решение было получено выше.

Таким образом, общее решение исходного уравнения в параметрической форме будет таким:

$$\begin{cases} x = 2C_1 - \ln |t| + C_2, \\ y = C_1 t^2 - t, \end{cases} \quad t \neq 0.$$

Задача 27. Решить уравнение $xy'' = y' + x \sin \frac{y'}{x}$ ($x \neq 0$).

Решение. $F(x, y, y', y'') = xy'' - y' - x \sin \frac{y'}{x}$,

$$F'_x = y'' - \sin \frac{y'}{x} - x \cos \frac{y'}{x} \cdot \left(-\frac{y'}{x^2} \right) = y'' - \sin \frac{y'}{x} + \frac{y'}{x} \cos \frac{y'}{x},$$

$$F'_y = 0, F'_{y'} = -1 - \cos \frac{y'}{x}, F'_{y''} = x.$$

Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна в $\mathbb{R}^4$ всюду, где $x \neq 0$, и имеет там непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} \neq 0$, ибо у нас $x \neq 0$. Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($x_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно y . Поэтому делаем замену: $y' = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = z'$, и, следовательно, исходное уравнение принимает вид

$$xz' = z + x \sin \frac{z}{x} \Leftrightarrow z' = \frac{z}{x} + \sin \frac{z}{x}. \quad (*)$$

Уравнение (*) — однородное. Полагаем $\frac{z}{x} = u(x) \Rightarrow z = xu \Rightarrow z' = u + xu'$. Относительно функции $u(x)$ получаем уравнение

$$xu' = \sin u \Rightarrow \frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x}. \quad (**)$$

Могли потерять:

$$u = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \Rightarrow z = k\pi x \Leftrightarrow y' = k\pi x \Rightarrow \\ \Rightarrow y = \frac{k\pi}{2} x^2 + C, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

— решения исходного уравнения.

Из уравнения (**) находим

$$\ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| = \ln |x| + \ln |C_1|, C_1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{u}{2} = C_1 x \Rightarrow \frac{u}{2} = \operatorname{arctg} (C_1 x) \Rightarrow \\ \Rightarrow z = 2x \operatorname{arctg} (C_1 x) \Rightarrow y' = 2x \operatorname{arctg} (C_1 x) \Rightarrow \\ \Rightarrow y = x^2 \operatorname{arctg} (C_1 x) - \frac{x}{C_1} + \frac{1}{C_1^2} \operatorname{arctg} (C_1 x) + C_2 \Rightarrow$$

$$C_1^2 y = (C_1^2 x^2 + 1) \operatorname{arctg} (C_1 x) - C_1 x + \tilde{C}_2, \text{ где } \tilde{C}_2 = C_2 C_1^2.$$

Задача 28. Решить уравнение $y''(y')^2 = (y'')^3$.

Решение. $F(x, y, y', y'', y''') = y''(y')^2 - (y'')^3, \quad F'_x = 0, \quad F'_y = 0, \\ F'_{y'} = 2y'y'', \quad F'_{y''} = -3(y'')^2, \quad F'_{y'''} = (y')^2; \quad F'_{y'''} = 0 \Leftrightarrow y' = 0$ (функция $y = C$, определяемая уравнением $y' = 0$, является решением исходного уравнения). Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0, y''_0) ($y'_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно y . Поэтому делаем замену: $y' = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = z'$, $y''' = z''$, и, следовательно, исходное уравнение принимает вид

$$z''z^2 = (z')^3. \quad (*)$$

Видим, что уравнение (*) не содержит явно независимую переменную x . Поэтому делаем замену: $z'_x = u(z)$, где $u(z)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$z''_{x^2} = \frac{du(z)}{dz} = \frac{du(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \Rightarrow z''_{x^2} = u'_z u.$$

Относительно функции $u(z)$ получаем, следовательно, уравнение

$$uz^2u'_z = u^3 \Rightarrow z^2u'_z = u^2. \quad (**)$$

Могли потерять:

$$u = 0 \Leftrightarrow z'_x = 0 \Leftrightarrow y_{x^2} = 0 \Rightarrow y = C_1x + C_2$$

— решение исходного уравнения.

Из уравнения (**)

$$\frac{du}{u^2} = \frac{dz}{z^2}. \quad (***)$$

Могли потерять $z = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$ — решение исходного уравнения.

Из уравнения (***) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} &= \frac{1}{z} + \frac{1}{C_1} \quad (C_1 \neq 0) \Rightarrow u = \frac{C_1 z}{z + C_1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z'_x = \frac{C_1 z}{z + C_1} \Rightarrow \frac{z + C_1}{C_1 z} dz = dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{C_1} z + \ln|z| = x + C_2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{C_1} y' + \ln|y'| - C_2. \quad (****) \end{aligned}$$

Станем искать решение уравнения (****) методом введения параметра, а именно, положим $y' = t$ ($t \neq 0$, t — параметр). Тогда

$x = \frac{1}{C_1} t + \ln|t| - C_2$. Так как $y' = t$, то $dy = t dx$. Следовательно, будем иметь

$$dy = t \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{t} \right) dt \Rightarrow dy = \left(\frac{1}{C_1} t + 1 \right) dt \Rightarrow y = \frac{t^2}{2C_1} + t + C_3.$$

Обозначим $\frac{1}{2C_1} = \tilde{C}_1$. Тогда общее решение исходного уравнения в параметрической форме будет таким:

$$\begin{cases} x = \ln|t| + 2\tilde{C}_1 t - C_2, \\ y = \tilde{C}_1 t^2 + t + C_3. \end{cases}$$

Задача 29. Решить уравнение $yy'' + y = (y')^2$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = yy'' + y - (y')^2$, $F'_x = 0$, $F'_y = y'' + 1$, $F'_{y'} = -2y'$, $F'_{y''} = y$. Функция $F(x, y, y', y'')$ — непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ($y = 0$ является решением исходного уравнения). Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($y_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно независимую переменную x . Поэтому делаем замену: $y'_x = z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y''_{x^2} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'_y z$, и, следовательно, исходное уравнение примет вид

$$yzz'_y + y = z^2. \quad (*)$$

Положим $z^2 = u(y) \Rightarrow zz'_y = \frac{u'_y}{2}$. А тогда уравнение (*) запишется в виде

$$yu'_y + 2y - 2u = 0 \Rightarrow u'_y - \frac{2}{y}u = -2. \quad (**)$$

Могли потерять $y = 0$ (выше было замечено, что $y = 0$ — решение исходного уравнения). Замечаем, что уравнение (**) — линейное относительно функции $u(y)$. Решением уравнения (**) является функция $u = 2y + C_1 y^2$. У нас $u = z^2 \Rightarrow u = (y'_x)^2$. Следовательно, имеем уравнение

$$(y')^2 = 2y + C_1 y^2 \Rightarrow y' = \pm \sqrt{2y + C_1 y^2} \Rightarrow \frac{dy}{\pm \sqrt{2y + C_1 y^2}} = dx.$$

Следует рассмотреть случаи: 1) $C_1 = 0$; 2) $C_1 > 0$; 3) $C_1 < 0$.

1) Пусть $C_1 = 0$. В этом случае имеем

$$\frac{dy}{\pm \sqrt{2y}} = dx \Rightarrow \pm \sqrt{2y} = x + C_1 \Rightarrow 2y = (x + C_1)^2.$$

2) Пусть $C_1 > 0$. Обозначим $C_1 = \tilde{C}_1^2 (> 0)$. Будем иметь в этом случае

$$\begin{aligned} \pm \frac{dy}{\sqrt{2y + \tilde{C}_1^2 y^2}} = dx &\Leftrightarrow \pm \frac{1}{\tilde{C}_1} \cdot \frac{dy}{\sqrt{\left(y^2 + \frac{2}{\tilde{C}_1^2} y + \frac{1}{\tilde{C}_1^4}\right) - \frac{1}{\tilde{C}_1^4}}} = dx \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \pm \frac{1}{\tilde{C}_1} \cdot \frac{dy}{\sqrt{\left(y + \frac{1}{\tilde{C}_1^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\tilde{C}_1^2}\right)^2}} = dx \Rightarrow \pm \frac{1}{\tilde{C}_1} \operatorname{Arch}(\tilde{C}_1^2 y + 1) = x + C_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{Arch}(\tilde{C}_1^2 y + 1) = \pm(\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2) \Rightarrow \tilde{C}_1^2 y + 1 = \operatorname{ch}(\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2). \end{aligned}$$

3) Пусть $C_1 < 0$. Обозначим $-C_1 = \tilde{C}_1^2 (> 0)$. Будем иметь в этом случае

$$\begin{aligned} \pm \frac{dy}{\sqrt{2y - \tilde{C}_1^2 y^2}} = dx &\Leftrightarrow \pm \frac{1}{\tilde{C}_1} \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{1}{\tilde{C}_1^2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{\tilde{C}_1^2}\right)^2}} = x + C_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \pm \arcsin(\tilde{C}_1^2 y - 1) = (\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2) \Rightarrow \tilde{C}_1^2 y - 1 = \pm \sin(\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2). \end{aligned}$$

Задача 30. Решить уравнение $xy'' = y' + x((y')^2 + x^2)$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = xy'' - y' - x(y')^2 - x^3$, $F'_x = y'' - (y')^2 - 3x^2$, $F'_y = 0$, $F'_{y'} = -1 - 2xy'$, $F'_{y''} = x$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($x_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Заданное уравнение не содержит явно y . Поэтому делаем замену: $y' = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение принимает вид

$$xz' = z + x(z^2 + x^2) \Rightarrow \frac{xz' - z}{x^2} = x \left[\left(\frac{z}{x} \right)^2 + 1 \right] \quad (\text{считаем } x \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z}{x}\right)' = x \left[\left(\frac{z}{x}\right)^2 + 1 \right].$$

Положим $\frac{z}{x} = u(x)$. Будем иметь

$$u' = x(u^2 + 1) \Leftrightarrow \frac{du}{u^2 + 1} = x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} u = \frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow u = \operatorname{tg} \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = x \operatorname{tg} \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) \Rightarrow y' = x \operatorname{tg} \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dy = \operatorname{tg} \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) d \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) \Rightarrow y = -\ln \left| \cos \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) \right| + C_2.$$

Задача 31. Решить уравнение $xy^{IV} = 1$.

Решение. Для $x \neq 0$ имеем

$$y^{IV} = \frac{1}{x}; \quad (*)$$

$f(x, y, y', y'', y''') = \frac{1}{x}$ непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}, f'_{y''}, f'_{y'''}$

в любой точке (x, y, y', y'', y''') ($x \neq 0$). Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными $(x_0, y_0, y'_0, y''_0, y'''_0)$ ($x_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Из уравнения (*) для $x \neq 0$ находим

$$y'''' = \ln|x| + C_1 \Rightarrow y''' = (x \ln|x| - x) + C_1 x + C_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'' = x \ln|x| + (C_1 - 1)x + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{x^2}{2} \ln|x| - \frac{x^2}{4} + (C_1 - 1) \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{x^2}{2} \ln|x| + \left(C_1 - \frac{3}{2} \right) \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^3}{6} \ln|x| - \frac{x^3}{18} + \frac{1}{6} \left(C_1 - \frac{3}{2} \right) x^3 + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^3}{6} \ln|x| + \tilde{C}_1 x^3 + \tilde{C}_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Задача 32. Решить уравнение $xy'' = \sin x$.

Решение. Для $x \neq 0$ имеем

$$y'' = \frac{\sin x}{x}. \quad (*)$$

Функция $f(x, y, y') = \frac{\sin x}{x}$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $f'_y, f'_{y'}$ в любой точке (x, y, y') ($x \neq 0$). Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($x_0 \neq 0$) имеет единственное решение. Из уравнения (*) для $x \neq 0$ находим

$$y' = \int_{x_0}^x \frac{\sin t}{t} dt + C_1 \Rightarrow y = \int_{x_0}^x \left(\int_{x_0}^t \frac{\sin t}{t} dt \right) dx + C_1 x + C_2.$$

Интеграл в правой части преобразуем с помощью формулы интегрирования по частям. Полагаем

$$u = \int_{x_0}^x \frac{\sin t}{t} dt \Rightarrow du = \left(\int_{x_0}^x \frac{\sin t}{t} dt \right)' dx = \frac{\sin x}{x} dx;$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x.$$

А тогда

$$\int_{x_0}^x \left(\int_{x_0}^t \frac{\sin t}{t} dt \right) dx = x \int_{x_0}^x \frac{\sin t}{t} dt - \int_{x_0}^x \sin x dx.$$

Таким образом, получаем

$$y = x \int_{x_0}^x \frac{\sin t}{t} dt + \cos x + C_1 x + \tilde{C}_2 \quad (\tilde{C}_2 = C_2 - \cos x_0).$$

Задача 33. Решить уравнение $y'' = 2xy'$.

Решение. Имеем: $f(x, y, y', y'') = 2xy'$, $f'_y = 0$, $f'_{y'} = 0$, $f'_{y''} = 2x$.

Функция $f(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}, f'_{y''}$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0, y''_0) имеет единственное решение. Запишем исходное уравнение в виде

$$\frac{y''}{y'} = 2x. \quad (*)$$

Могли потерять: $y'' = 0 \Rightarrow y' = C_1 \Rightarrow y = C_1x + C_2$ — решение исходного уравнения.

Для $y'' \neq 0$ уравнение (*) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} (\ln|y'|)'_x = 2x &\Rightarrow \ln|y'| = x^2 + \ln|C_1| \quad (C_1 \neq 0) \Rightarrow y' = C_1 e^{x^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow y' = C_1 \int_0^x e^{t^2} dt + C_2 &\Rightarrow y = C_1 \int_0^x \left(\int_0^t e^{t'^2} dt' \right) dx + C_2x + C_3. \end{aligned}$$

Интеграл в правой части преобразуем с помощью формулы интегрирования по частям. Полагаем

$$\begin{cases} u = \int_0^x e^{t^2} dt \Rightarrow du = e^{x^2} dx; \\ dv = dx \Rightarrow v = x. \end{cases}$$

А тогда

$$\begin{aligned} y &= C_1 \left[x \int_0^x e^{t^2} dt - \int_0^x x e^{x^2} dx \right] + C_2x + C_3 \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= C_1 \left[x \int_0^x e^{t^2} dt - \frac{1}{2} (e^{x^2} - 1) \right] + C_2x + C_3 \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= C_1 \left[x \int_0^x e^{t^2} dt - \frac{1}{2} e^{x^2} \right] + C_2x + \tilde{C}_3. \end{aligned}$$

Задача 34. Решить уравнение $xy^{IV} + y'' = e^x$.

Решение. Для $x \neq 0$ имеем

$$y^{IV} = \frac{e^x - y''}{x}. \quad (*)$$

Функция $f(x, y, y', y'', y''') = \frac{e^x - y''}{x}$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $f'_y, f'_{y'}, f'_{y''}, f'_{y'''}$ в любой точке (x, y, y', y'', y''') ($x \neq 0$). Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными $(x_0, y_0, y'_0, y''_0, y'''_0)$ ($x_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Замечаем, что исходное уравнение может быть представлено в виде

$$(xy''')'_x = e^x \Rightarrow xy''' = e^x + C_1 \Rightarrow \text{для } x \neq 0: y''' = \frac{e^x}{x} + \frac{C_1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'' = \int \frac{e^t}{t} dt + C_1 \ln|x| + C_2 \quad (x_0 = 1, \text{ например}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \int \underbrace{\left(\int \frac{e^t}{t} dt \right)}_{=u} \frac{dx}{dv} + C_1 (x \ln|x| - x) + C_2 x + C_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = x \int \frac{e^t}{t} dt - \int_1^x x \frac{e^x}{x} dx + C_1 (x \ln|x| - x) + C_2 x + C_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = x \int \frac{e^t}{t} dt - (e^x - 1) + C_1 (x \ln|x| - x) + C_2 x + C_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \int \left(x \int \frac{e^t}{t} dt \right) dx - e^x + C_1 \left(\frac{x^2}{2} \ln|x| - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \right) + C_2 \frac{x^2}{2} + \tilde{C}_3 x + C_4.$$

Так как

$$\int \underbrace{\left(\int \frac{e^t}{t} dt \right)}_{=u} x dx = \frac{x^2}{2} \int \frac{e^t}{t} dt - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{e^x}{x} dx = \frac{x^2}{2} \int \frac{e^t}{t} dt - \frac{1}{2} (xe^x - e^x),$$

то получаем окончательно:

$$y = \frac{x^2}{2} \int_1^x \frac{e^t}{t} dt - \frac{1}{2} x e^x - \frac{1}{2} e^x +$$

$$+ C_1 \frac{x^2}{2} \left(\ln|x| - \frac{3}{2} \right) + C_2 \frac{x^2}{2} + \bar{C}_3 x + C_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^2}{2} \int_1^x \frac{e^t}{t} dt - \frac{1}{2} x e^x - \frac{1}{2} e^x + \bar{C}_1 x^2 \ln|x| + \bar{C}_2 x^2 + \bar{C}_3 x + C_4.$$

Задача 35. Решить уравнение $yy'' + 3y'y' = 0$.

Решение. Из заданного уравнения видно непосредственно, что $y = 0$ — решение. Пусть $y \neq 0$. Тогда исходное уравнение может быть записано в виде

$$y'' = -\frac{3y'y'}{y}. \quad (*)$$

Функция $f(x, y, y', y'')$ в каждой точке (x, y, y', y'') ($y \neq 0$) непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}, f'_{y''}$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0, y''_0) ($y_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Перепишем заданное уравнение в виде

$$(yy'' + y'y') + 2y'y' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y'y')'_x + [(y')^2]'_x = 0 \Rightarrow y'y' + (y')^2 = C_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (yy')'_x = C_1 \Rightarrow yy' = C_1 x + \frac{C_2}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} (y^2)' = C_1 x + \frac{C_2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{C_1}{2} x^2 + \frac{C_2}{2} x + \frac{C_3}{2} \Rightarrow y^2 = C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Задача 36. Решить уравнение $y'y'' = 2(y'')^2$.

Решение. Из заданного уравнения видно непосредственно, что $y = C$ ($\Rightarrow y' = 0$) — решение. Пусть $y' \neq 0$. Тогда исходное уравнение может быть записано в виде

$$y'' = \frac{2(y'')^2}{y'}. \quad (*)$$

Функция $f(x, y, y', y'') = \frac{2(y'')^2}{y'}$ в каждой точке (x, y, y', y'') ($y' \neq 0$)

непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}, f'_{y''}$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0, y''_0) ($y'_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Перепишем заданное уравнение в виде

$$\begin{aligned}\frac{y''}{y'} &= 2 \frac{y''}{y'} \Leftrightarrow (\ln|y''|)'_x = 2(\ln|y'|)'_x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln|y''| = 2\ln|y'| + \ln|C_1| \quad (C_1 \neq 0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow y'' = C_1(y')^2.\end{aligned}\quad (**)$$

Могли потерять: $y'' = 0 \Rightarrow y = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2$ — решение исходного уравнения.

Запишем уравнение (**) в виде

$$\begin{aligned}\frac{y''}{(y')^2} &= C_1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{y'}\right)'_x = C_1 \Rightarrow -\frac{1}{y'} = C_1 x + C_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y' = \frac{1}{\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2} \Rightarrow y = \frac{1}{\tilde{C}_1} \cdot \ln|\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2| + C_3.\end{aligned}$$

Задача 37. Решить уравнение $yy'' = y'(y' + 1)$.

Решение. Из заданного уравнения видно непосредственно, что $y = 0$ — решение. Пусть $y \neq 0$. Тогда исходное уравнение может быть записано в виде

$$y'' = \frac{y'(y' + 1)}{y}.\quad (*)$$

Функция $f(x, y, y') = \frac{y'(y' + 1)}{y}$ в каждой точке (x, y, y') ($y \neq 0$)

непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($y_0 \neq 0$) имеет единственное решение. Запишем заданное уравнение в виде

$$yy'' - (y')^2 = y' \Rightarrow \text{Так как } y \neq 0: \frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = \frac{y'}{y^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y'}{y} \right)' = - \left(\frac{1}{y} \right)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = - \frac{1}{y} + C_1 \Rightarrow \frac{y' + 1}{y} = C_1 \Rightarrow y' = C_1 y - 1.$$

Следует рассмотреть случаи: 1) $C_1 = 0$, 2) $C_1 \neq 0$.

1) Пусть $C_1 = 0$. Тогда $y' = -1 \Rightarrow y = -x + C$ — решение.

2) Пусть $C_1 \neq 0$. Тогда будем иметь

$$\frac{dy}{C_1 y - 1} = dx \Rightarrow \frac{1}{C_1} \ln |C_1 y - 1| = x + \ln |C_2| \quad (C_2 \neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |C_1 y - 1| = |\tilde{C}_2| e^{C_1 x} \Rightarrow C_1 y - 1 = \tilde{C}_2 e^{C_1 x}.$$

Задача 38. Решить уравнение $5(y'')^2 - 3y''(y''') = 0$.

Решение. Функция $F(x, y, y', y'', y''', y''')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}, F'_{y'''}, F'_{y'''}; F'_{y'''} = 0 \Leftrightarrow y'' = 0$ (функция $y = C_1 x + C_2$ — решение исходного уравнения). Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными условиями $(x_0, y_0, y'_0, y''_0, y'''_0)$ ($y''_0 \neq 0$) имеет единственное решение. Перепишем заданное уравнение в виде

$$5 \frac{y'''}{y''} - 3 \frac{y''''}{y''} = 0 \Rightarrow 5 [\ln |y''|]' - 3 [\ln |y''|]' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \ln |y''| - 3 \ln |y''| + \ln |C_1| = 0 \quad (C_1 \neq 0) \Rightarrow$$

$$C_1 (y'')^5 = (y''')^3. \quad (*)$$

Могли потерять: $y'' = 0 \Rightarrow y = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$ — решение исходного уравнения.

Запишем уравнение (*) в виде

$$\frac{y'''}{(y'')^{5/3}} = C_1 \Leftrightarrow \left[-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(y'')^{2/3}} \right]' = C_1 \Rightarrow -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(y'')^{2/3}} = C_1 x + C_2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1}{(y')^{2/3}} = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2 \Rightarrow \frac{1}{(y')^2} = (\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2)^3 \Rightarrow \\
&\Rightarrow (y')^2 = \frac{1}{(\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2)^3} \Rightarrow y' = \pm \frac{1}{(\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2)^{3/2}} \Rightarrow \\
&\Rightarrow y' = \pm \frac{-2}{\tilde{C}_1 (\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2)^{5/2}} + C_3 \Rightarrow y = \mp \frac{4}{\tilde{C}_1^2} \sqrt{\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2} + C_3 x + C_4 \Rightarrow \\
&\Rightarrow y = \pm \sqrt{C_1^* x + C_2^*} + C_3 x + C_4.
\end{aligned}$$

Задача 39. Решить уравнение $yy'' + (y')^2 = 1$.

Решение. Из заданного уравнения находим: $y' = \frac{1 - (y')^2}{y}$ ($y = 0$ не является решением заданного уравнения). Функция $f(x, y, y') = \frac{1 - (y')^2}{y}$ в каждой точке (x, y, y') ($y \neq 0$) непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($y_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Запишем исходное уравнение в виде

$$\begin{aligned}
(yy')'_x &= 1 \Rightarrow yy' = x + C_1 \Leftrightarrow \left(\frac{y^2}{2} \right)'_x = x + C_1 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \Rightarrow y^2 = x^2 + \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2.
\end{aligned}$$

Задача 40. Решить уравнение $y'' = xy' + y + 1$.

Решение. Функция $f(x, y, y')$ в каждой точке (x, y, y') непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) имеет единственное решение.

Запишем исходное уравнение в виде

$$(y' - xy)'_x = 1 \Rightarrow y' - xy = x + C_1 \Leftrightarrow y' - x(y+1) = C_1. \quad (*)$$

Положим $y+1 = z(x)$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Относительно функции $z(x)$ уравнение (*) примет вид

$$z' - xz = C_1$$

(это — линейное уравнение относительно функции z). Решая его, находим: $z = e^{x^2/2} \left[C_1 \int e^{-x^2/2} dx + C_2 \right]$. У нас $z = y+1$. Поэтому

$$y = e^{x^2/2} \left[C_1 \int e^{-x^2/2} dx + C_2 \right] - 1.$$

Задача 41. Решить уравнение $xy'' = 2yy' - y'$.

Решение. Для $x \neq 0$ имеем: $y'' = \frac{2yy' - y'}{x}$. Функция $f(x, y, y') = \frac{2yy' - y'}{x}$ в каждой точке (x, y, y') ($x \neq 0$) непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($x_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Перепишем заданное уравнение в виде

$$xy'' + y' = 2yy' \Leftrightarrow (xy')'_x = (y^2)'_x \Rightarrow xy' = y^2 + C_1 \Rightarrow \frac{dy}{y^2 + C_1} = \frac{dx}{x}.$$

(у нас $x \neq 0$). Следует рассмотреть случаи: 1) $C_1 = 0$; 2) $C_1 > 0$; 3) $C_1 < 0$.

1) Пусть $C_1 = 0$. Тогда будем иметь

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{y} = \ln|x| + \ln|C_2| \quad (C_2 \neq 0) \Rightarrow y \ln(C_2 x) = -1.$$

2) Пусть $C_1 > 0$. Обозначим $C_1 = \tilde{C}_1^2 (> 0)$. Будем иметь в этом случае

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y^2 + \tilde{C}_1^2} &= \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{\tilde{C}_1} \operatorname{arctg} \frac{y}{\tilde{C}_1} = \ln|x| + \ln|C_2| \quad (C_2 \neq 0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{y}{\tilde{C}_1} = \tilde{C}_1 \ln(C_2 x) \Rightarrow y = \tilde{C}_1 \operatorname{tg} [\tilde{C}_1 \ln(C_2 x)]. \end{aligned}$$

3) Пусть $C_1 < 0$. Обозначим $-C_1 = \tilde{C}_1^2 (> 0)$. Будем иметь в этом случае

$$\begin{aligned}\frac{dy}{y^2 - \tilde{C}_1^2} = \frac{dx}{x} &\Rightarrow \frac{1}{2\tilde{C}_1} \ln \left| \frac{\tilde{C}_1 - y}{\tilde{C}_1 + y} \right| = \ln|x| + \ln|C_2| (C_2 \neq 0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left| \frac{\tilde{C}_1 - y}{\tilde{C}_1 + y} \right| = \tilde{C}_2 |x|^{2\tilde{C}_1}.\end{aligned}$$

Задача 42. Решить уравнение $xy'' - y' = x^2 y y'$.

Решение. Для $x \neq 0$ имеем $y'' = \frac{x^2 y y' + y'}{x}$ ($= f(x, y, y')$). Функция $f(x, y, y')$ в каждой точке (x, y, y') ($x \neq 0$) непрерывна и имеет непрерывные $f_y', f_{y'}'$. Следовательно, задача Коши для исходного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y_0') ($x_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Запишем заданное уравнение для $x \neq 0$ в виде:

$$\begin{aligned}\frac{xy'' - y'}{x^2} = yy' &\Leftrightarrow \left(\frac{y'}{x} \right)' = \left(\frac{y^2}{2} \right)' \Rightarrow \frac{y'}{x} = \frac{y^2}{2} + C_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y' = x \frac{y^2 + 2C_1}{2} \Rightarrow \frac{dy}{y^2 + 2C_1} = \frac{x dx}{2}.\end{aligned}$$

Могли потерять: $y = C$ — решение ($C = \pm \sqrt{-2C_1}$; $C_1 \leq 0$).

Следует рассмотреть случаи: 1) $C_1 = 0$; 2) $C_1 > 0$; 3) $C_1 < 0$.

1) Пусть $C_1 = 0$. В этом случае имеем

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{x dx}{2} \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{4} + \frac{C_2}{4} \Rightarrow y(x^2 + C_2) = -4.$$

2) Пусть $C_1 > 0$. Обозначим $2C_1 = \tilde{C}_1^2 (> 0)$. В этом случае будем иметь

$$\frac{dy}{y^2 + \tilde{C}_1^2} = \frac{x dx}{2} \Rightarrow \frac{1}{\tilde{C}_1} \operatorname{arctg} \frac{y}{\tilde{C}_1} = \frac{x^2}{4} + \frac{C_2}{4} \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{y}{\tilde{C}_1} = \frac{\tilde{C}_1 x^2 + \tilde{C}_2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{y}{4C_1^*} = C_1^* x^2 + C_2^*$$

(положили $\frac{\tilde{C}_1}{4} = C_1^*$, $\frac{\tilde{C}_2}{4} = C_2^*$). Тогда

$$\frac{y}{4C_1^*} = \operatorname{tg}(C_1^* x^2 + C_2^*) \Rightarrow y = 4C_1^* \operatorname{tg}(C_1^* x^2 + C_2^*).$$

3) Пусть $C_1 < 0$. Обозначим: $-2C_1 = \tilde{C}_1^2 (> 0)$. Будем иметь в этом случае

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y^2 - \tilde{C}_1^2} = \frac{x dx}{2} &\Rightarrow \frac{1}{2\tilde{C}_1} \ln \left| \frac{\tilde{C}_1 - y}{\tilde{C}_1 + y} \right| = \frac{x^2}{4} + \frac{C_2}{4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \ln \left| \frac{y - \tilde{C}_1}{y + \tilde{C}_1} \right| = \tilde{C}_1 x^2 + \tilde{C}_2 (\tilde{C}_2 = C_2 \tilde{C}_1). \end{aligned}$$

Задача 43. Решить уравнение $xyu'' - x(y')^2 = yu'$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = xyu'' - x(y')^2 - yu'$, $F'_x = yu'' - (y')^2$, $F'_y = xy'' - y'$, $F'_{y'} = -2xy' - y$, $F'_{y''} = xy$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow xy = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) , такими, что $x_0 y_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение — однородное относительно y, y', y'' . Поэтому делаем замену: $y' = yz$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z').$$

Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение принимает вид

$$xy^2(z^2 + z') - xy^2z^2 = y^2z \Rightarrow xy^2z' = y^2z \Rightarrow xz' = z. \quad (*)$$

Могли потерять $y = 0$ — решение исходного уравнения.

Из уравнения $(*)$ получаем

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \quad (**)$$

(считаем $x \neq 0$; могли потерять: $z = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$ — решение исходного уравнения).

Из (**) находим

$$\begin{aligned}\ln|z| &= \ln|x| + \ln|C_1| \quad (C_1 \neq 0) \Rightarrow z = C_1 x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = C_1 x \Leftrightarrow (\ln|y|)'_x = C_1 x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln|y| = \frac{C_1}{2} x^2 + \ln|C_2| \Rightarrow y = C_2 e^{\tilde{C}_1 x^2} \quad (C_2 \neq 0; \tilde{C}_1 = \frac{C_1}{2}).\end{aligned}$$

Задача 44. Решить уравнение $yy'' = (y')^2 + 15y^2\sqrt{x} \quad (x \geq 0)$.

Решение. Из заданного уравнения для $y \neq 0$ находим:

$$y'' = \frac{(y')^2 + 15y^2\sqrt{x}}{y} \quad (y = 0 \text{ — решение уравнения}). \text{ Функция}$$

$$f(x, y, y') = \frac{(y')^2 + 15y^2\sqrt{x}}{y} \text{ в каждой точке } (x, y, y') \quad (y \neq 0) \text{ непре-}$$

рывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}$. Следовательно, задача Коши для исходного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($y_0 \neq 0, x_0 > 0$) имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение — однородное относительно y, y', y'' . Поэтому сделаем замену: $y' = yz$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение принимает вид:

$$y^2(z^2 + z') = y^2 z^2 + 15y^2\sqrt{x} \Rightarrow y^2 z' = 15y^2\sqrt{x} \Rightarrow z' = 15\sqrt{x}. \quad (*)$$

Могли потерять $y = 0$ — решение исходного уравнения.

Из уравнения (*) находим

$$z = 15 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + C_1 \Rightarrow z = 10x^{3/2} + C_1 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 10x^{3/2} + C_1$$

(считаем $y \neq 0$) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \ln|y| &= 4x^{5/2} + C_1 x - \ln|C_2| \quad (C_2 \neq 0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln|C_2 y| = 4x^2\sqrt{x} + C_1 x \quad (C_2 \neq 0).\end{aligned}$$

Задача 45. Решить уравнение $(x^2 + 1)((y')^2 - yy'') = xy y'$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = (x^2 + 1)((y')^2 - yy'') - xy y'$, $F'_x = 2x((y')^2 - yy'')$, $F'_y = -(x^2 + 1)y'' - xy'$, $F'_{y'} = 2(x^2 + 1)y' - xy$, $F'_{y''} = -(x^2 + 1)y$.

Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ($y = 0$ — решение исходного уравнения). Задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($y_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение — однородное относительно y, y', y'' . Поэтому делаем замену: $y' = yz$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$. Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение примет вид

$$(x^2 + 1)(y^2 z^2 - y^2 z^2 - y^2 z') = xy^2 z \Rightarrow -(x^2 + 1)z' = xz. \quad (*)$$

Могли потерять: $y = 0$ — решение исходного уравнения.

Из уравнения (*) получаем

$$-\frac{dz}{z} = \frac{x dx}{x^2 + 1}. \quad (**)$$

Могли потерять: $z = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$ — решение исходного уравнения.

Из уравнения (**) находим

$$\begin{aligned} -\ln|z| &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \ln|C_1| \quad (C_1 \neq 0) \Rightarrow z = \frac{C_1}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{y'}{y} &= \frac{C_1}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow \ln|y| = C_1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln|C_2| \quad (C_2 \neq 0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = C_2 \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^{C_1}. \end{aligned}$$

Задача 46. Решить уравнение $xyy'' + x(y')^2 = 2yy'$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = xyy'' + x(y')^2 - 2yy'$, $F'_x = yy'' + (y')^2$, $F'_y = xy'' - 2y'$, $F'_{y'} = 2xy' - 2y$, $F'_{y''} = xy$. Функция $F(x, y, y', y'')$ не-

прерывна и имеет непрерывные $F'_x, F''_{xy}, F'_y, F''_{yx}$; $F'_{yy} = 0 \Leftrightarrow xy = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) , такими, что $x_0 y_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение — однородное относительно y, y', y'' . Поэтому делаем замену: $y' = uz$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = u'z + uz' = u(z^2 + z')$. Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение примет вид

$$xu^2(z^2 + z') + xu^2z^2 = 2u^2z \Rightarrow 2xz^2 + xz' = 2z. \quad (*)$$

Могли потерять $y = 0$ — решение исходного уравнения.

Из уравнения (*) получаем: $-\frac{z'}{z^2} + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{z} = 2$. (Считаем $x \neq 0$.)

Могли потерять: $z = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$ — решение исходного

уравнения.) Полагаем $\frac{1}{z} = u(x) \Rightarrow -\frac{z'}{z^2} = u'$. Относительно функции $u(x)$ будем иметь уравнение

$$u' + \frac{2}{x}u = 2. \quad (**)$$

Это — линейное уравнение. Решая уравнение (**), находим

$$u = \frac{2}{3}x + \frac{C_1}{x^2} \Leftrightarrow z = \frac{3x^2}{2x^3 + 3C_1} \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{3x^2}{2x^3 + 3C_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\ln|y|)'_x = \left(\frac{1}{2} \ln|2x^3 + 3C_1| \right)'_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2} \ln|2x^3 + 3C_1| + \frac{1}{2} \ln|C_2| \quad (C_2 \neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = C_2(2x^3 + 3C_1) \Rightarrow y^2 = \tilde{C}_1 x^3 + \tilde{C}_2 \quad (\tilde{C}_1 = 2C_2, \tilde{C}_2 = 3C_1 C_2).$$

Задача 47. Решить уравнение $x^2 y u'' = (y - xy')^2$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = x^2 y u'' - (y - xy')^2$, $F'_x = 2xy u'' + 2(y - xy')y'$, $F'_y = x^2 y'' - 2(y - xy')$, $F'_{y'} = 2(y - xy')x$, $F'_{y''} = x^2 y$. Функ-

ция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow xy = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) , такими, что $x_0 y_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение — однородное относительно y, y', y'' . Поэтому делаем замену: $y' = yz$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$. Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned} x^2 y^2 (z^2 + z') &= (y - xyz)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 (z^2 + z') &= (1 - xz)^2 \Rightarrow x^2 z' = 1 - 2xz \Rightarrow \\ z' + \frac{2}{x} z &= \frac{1}{x^2}. \end{aligned} \quad (*)$$

(Считаем $x \neq 0$. Могли потерять $y = 0$ — решение исходного уравнения.)

Уравнение (*) — линейное относительно функции $z(x)$. Интегрируя уравнение (*), находим

$$\begin{aligned} z = \frac{x + C_1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2} \Rightarrow \ln|y| &= \ln|x| - \frac{C_1}{x} + \ln|C_2| \quad (C_2 \neq 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= C_2 x e^{\frac{C_1}{x}}. \end{aligned}$$

Задача 48. Решить уравнение $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{(y')^2}{y}$.

Решение. Имеем $y'' = \frac{(y')^2}{y} - \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}$. Функция $f(x, y, y') = \frac{(y')^2}{y} - \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}$ в каждой точке (x, y, y') , такой, что $xy \neq 0$, непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) , такими, что $x_0 y_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение однородное относительно (y, y', y'') . Поэтому делаем замену: $y' = yz$, где $z(x)$ — новая

неизвестная функция. Тогда $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$. Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение принимает вид

$$y(z^2 + z') + \frac{yz}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{y^2 z^2}{y} \Leftrightarrow z' + \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x^2} \quad (*)$$

(у нас $y \neq 0$). Уравнение (*) — линейное относительно функции $z(x)$. Решая его, находим

$$z = \frac{1}{x}(C_1 - \ln|x|) \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x}(C_1 - \ln|x|) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = C_1 \ln|x| - \frac{1}{2} \ln^2|x| + \ln|C_2|, \quad C_2 \neq 0 \Rightarrow y = C_2 |x|^{C_1 - \frac{1}{2} \ln|x|}.$$

Задача 49. Решить уравнение $y(xy'' + y') = x(y')^2(1-x)$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = y(xy'' + y') - x(y')^2(1-x)$,

$$F'_x = yy'' + (2x-1)(y')^2, \quad F'_y = xy'', \quad F'_{y'} = y + 2(x^2 - x)y', \quad F'_{y''} = xy.$$

Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow xy = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) , такими, что $x_0 y_0 \neq 0$; имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение — однородное относительно y, y', y'' . Поэтому делаем замену: $y' = yz$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$. Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение принимает вид:

$$y[xy(z^2 + z') + yz] = x(1-x)y^2 z^2 \Rightarrow xz' + z = -x^2 z^2. \quad (*)$$

Могли потерять $y = 0$ — решение исходного уравнения.

Уравнение (*) перепишем в виде

$$-\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z} = x. \quad (**)$$

(У нас $x \neq 0$; могли потерять: $z = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$ — решение исходного уравнения.) В уравнении (**) делаем замену: $\frac{1}{z} = u(x)$,

где $u(x)$ — новая неизвестная функция. Имеем $-\frac{z'}{z^2} = u'(x)$. Следовательно, будем иметь: $u' - \frac{1}{x}u = x$. Это — линейное уравнение относительно функции $u(x)$. Решая его, находим

$$u = x(x + C_1) \Leftrightarrow \frac{1}{z} = x(x + C_1) \Leftrightarrow z = \frac{1}{x(x + C_1)} \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x(x + C_1)}.$$

Следует рассмотреть случаи: 1) $C_1 = 0$, 2) $C_1 \neq 0$.

1) Пусть $C_1 = 0$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow (\ln|y|)'_x = \left(-\frac{1}{x}\right)'_x \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln|y| &= -\frac{1}{x} + \ln|C_2| \quad (C_2 \neq 0) \Rightarrow y = C_2 e^{\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

2) Пусть $C_1 \neq 0$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x + C_1} \right) \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{C_1} (\ln|x| - \ln|x + C_1|) + \ln|C_2|, \quad C_2 \neq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= C_2 \left(\frac{x}{x + C_1} \right)^{1/C_1}. \end{aligned}$$

Задача 50. Решить уравнение $x^2 y y'' + (y')^2 = 0$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = x^2 y y'' + (y')^2$, $F'_x = 2xy y''$, $F'_y = x^2 y''$, $F'_{y'} = 2y'$, $F'_{y''} = x^2 y$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow xy = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) такими, что $x_0 y_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение — однородное относительно y, y', y'' . Поэтому делаем замену: $y' = yz$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$. Относительно функции $z(x)$ заданное уравнение примет вид

$$x^2 y^2 (z^2 + z') + y^2 z^2 = 0 \Rightarrow (x^2 + 1)z^2 + x^2 z' = 0. \quad (*)$$

Могли потерять: $y = 0$ — решение исходного уравнения.

Из уравнения (*) получаем

$$\frac{dz}{z^2} + \frac{x^2 + 1}{x^2} dx = 0. \quad (**)$$

(У нас $x \neq 0$; могли потерять: $z = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$ — решение исходного уравнения.) Интегрируя уравнение (**), находим

$$-\frac{1}{z} + x - \frac{1}{x} = -2C_1 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{x^2 + 2C_1 x - 1}{x} \Rightarrow z = \frac{x}{x^2 + 2C_1 x - 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{x}{(x + C_1)^2 - (1 + C_1^2)} \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(x + C_1) - 2C_1}{(x + C_1)^2 - (1 + C_1^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \ln|y| = \ln|x^2 + 2C_1 x - 1| -$$

$$- \frac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2}} \ln \left| \frac{x + C_1 - \sqrt{1 + C_1^2}}{x + C_1 + \sqrt{1 + C_1^2}} \right| + \ln|C_2|, \quad C_2 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = C_2 |x^2 + 2C_1 x - 1| \cdot \left| \frac{x + C_1 + \sqrt{1 + C_1^2}}{x + C_1 - \sqrt{1 + C_1^2}} \right|^{\frac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2}}}.$$

Задача 51. Решить уравнение $x^2 ((y')^2 - 2yy'') = y^2$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = x^2 (y')^2 - 2x^2 yy'' - y^2$,

$$F'_x = 2x(y')^2 - 4xyy'', F'_y = -2x^2 y'' - 2y, F'_{y'} = 2x^2 y', F'_{y''} = -2x^2 y.$$

Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y'} = 0 \Leftrightarrow xy = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) , такими, что $x_0 y_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение — однородное относительно y, y', y'' . Поэтому делаем замену: $y' = yz$, где $z(x)$ — новая

неизвестная функция. Тогда $y' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$. Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение принимает вид

$$x^2 [y^2 z^2 - 2y^2(z^2 + z')] = y^2 \Rightarrow -x^2(z^2 + 2z') = 1. \quad (*)$$

Могли потерять: $y = 0$ — решение исходного уравнения.

Перепишем уравнение (*) в виде

$$z^2 + 2z' = -\frac{1}{x^2} \quad (**)$$

(считаем $x \neq 0$). Уравнение (**) — обобщенно-однородное с показателем $k = -1$. (В самом деле, имеем: $2k = k - 1 = -2 \Rightarrow k = -1$.) Замена:

$$\frac{z}{x^k} = u(x) \Rightarrow zx = u \Rightarrow z = \frac{u}{x} \Rightarrow z' = \frac{xu' - u}{x^2}.$$

Относительно функции $u(x)$ уравнение (**) примет вид

$$u^2 + 2xu' - 2u + 1 = 0 \Leftrightarrow (u - 1)^2 + 2xu' = 0 \Rightarrow \frac{du}{(u - 1)^2} + \frac{dx}{2x} = 0. \quad (***)$$

Могли потерять:

$$u = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow y = Cx$$

— решение исходного уравнения. Из уравнения (***) находим

$$-\frac{1}{u-1} + \frac{1}{2} \ln|x| = -\frac{1}{2} \ln|C_1| \quad (C_1 \neq 0) \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(C_1 x) = \frac{1}{2x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{x} \cdot \frac{2 + \ln C_1 x}{\ln C_1 x} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2 + \ln C_1 x}{x \ln C_1 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \int \frac{(2 + \ln C_1 x) d \ln C_1 x}{\ln C_1 x} \Rightarrow \ln|y| = 2 \ln|\ln C_1 x| +$$

$$+ \ln C_1 x + \ln|C_2|, \quad C_2 \neq 0 \Rightarrow y = C_2 (C_1 x) (\ln C_1 x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \tilde{C}_2 x (\ln C_1 x)^2 \quad (\tilde{C}_2 = C_2 C_1).$$

Задача 52. Решить уравнение $xyy'' = y'(y + y')$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = xyy'' - y'(y + y')$, $F'_x = yy''$, $F'_y = xy'' - y'$, $F'_{y'} = -y - 2y'$, $F'_{y''} = xy$. Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F''_{y''} = 0 \Leftrightarrow xy = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) , такими, что $x_0 y_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение — однородное относительно y, y', y'' . Поэтому делаем замену: $y' = yz$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$. Относительно функции $z(x)$ исходное уравнение принимает вид

$$xy^2(z^2 + z') = yz(y + yz) \Rightarrow xz' - z = z^2(1 - x).$$

Могли потерять: $y = 0$ — решение исходного уравнения. Считаем $x \neq 0$. Поэтому полученное уравнение может быть записано в виде:

$$z' - \frac{1}{x}z = \frac{1-x}{x}z^2 \Rightarrow \frac{z'}{z^2} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1-x}{x}. \quad (*)$$

Могли потерять: $z = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$ — решение исходного уравнения. Замена: $\frac{1}{z} = u(x) \Rightarrow -\frac{z'}{z^2} = u'$. Относительно функции $u(x)$ уравнение (*) примет вид

$$u' + \frac{1}{x}u = \frac{x-1}{x}. \quad (**)$$

Уравнение (**) — линейное относительно функции $u(x)$. Решая его, находим

$$\begin{aligned} u &= \frac{x^2 - 2x + 2C_1}{2x} \Rightarrow z = \frac{2x}{x^2 - 2x + \tilde{C}_1}, \tilde{C}_1 = 2C_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{y'}{y} &= \frac{2x}{(x-1)^2 + (\tilde{C}_1 - 1)} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2x-2}{x^2 - 2x + \tilde{C}_1} + \frac{2}{(x-1)^2 + (\tilde{C}_1 - 1)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln|y| = \ln|x^2 - 2x + \tilde{C}_1| + 2 \int \frac{dx}{(x-1)^2 + (\tilde{C}_1 - 1)} + C_2. \end{aligned}$$

Следует рассмотреть три случая: 1) $\tilde{C}_1 = 1$, 2) $\tilde{C}_1 > 1$, 3) $\tilde{C}_1 < 1$.

1) Пусть $\tilde{C}_1 = 1$. В этом случае будем иметь

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)^2 + (\tilde{C}_1 - 1)} = \int \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1}.$$

2) Пусть $\tilde{C}_1 > 1$. Тогда $I = \frac{1}{\sqrt{\tilde{C}_1 - 1}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{\tilde{C}_1 - 1}}$.

3) Пусть $\tilde{C}_1 < 1$. Тогда

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)^2 - (1 - \tilde{C}_1)} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \tilde{C}_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{1 - \tilde{C}_1} - (x-1)}{\sqrt{1 - \tilde{C}_1} + (x-1)} \right|.$$

Задача 53. Решить уравнение $4x^2y^3y'' = x^2 - y^4$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = 4x^2y^3y'' - x^2 + y^4$,

$$F'_x = 8xy^3y'' - 2x, F'_y = 12x^2y^2y'' + 4y^3, F'_{y'} = 0, F'_{y''} = 4x^2y^3.$$

Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}; F''_{y''} = 0 \Leftrightarrow xy = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) , такими, что $x_0y_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Отметим, что заданное уравнение обобщенно-однородное относительно x, y, y', y'' с показателем $k = \frac{1}{2}$. В самом деле, имеем:

$$2 + 3k + k - 2 = 2 = 4k \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Поэтому делаем замену: $x = e^t$, $y = ze^{t/2}$ (считаем $x > 0$). Тогда

$$x'_t = e^t, y'_t = z'_t e^{t/2} + \frac{1}{2} z e^{t/2} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = y'_t e^{-t} \Rightarrow y'_x = \left(z'_t + \frac{1}{2} z \right) e^{-t/2}.$$

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_t \frac{1}{x'_t} = \left[\left(z''_t + \frac{1}{2} z'_t \right) e^{-t/2} - \frac{1}{2} \left(z'_t + \frac{1}{2} z \right) e^{-t/2} \right] e^{-t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'_{x^2} = \left(z''_t - \frac{1}{4} z \right) e^{\frac{3}{2}t}.$$

Относительно функции $z(t)$ исходное уравнение принимает вид

$$4e^{2t} \cdot z^3 \cdot e^{\frac{3}{2}t} \cdot e^{-\frac{3}{2}t} \left(z''_t - \frac{1}{4} z \right) = e^{2t} - z^4 e^{2t} \Rightarrow 4z^3 \left(z''_t - \frac{1}{4} z \right) = 1 - z^4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4z^3 z''_t = 1. \quad (*)$$

Для $x < 0$ замена $x = -e^t$, $y = ze^{t/2}$ приводит к тому же самому уравнению (*).

Замечаем, что в уравнение (*) не входит явно независимая переменная t . Поэтому делаем замену:

$$z'_t = u(z) \Rightarrow z''_t = \frac{du(z)}{dt} = \frac{du(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \Rightarrow z''_t = u'_z u.$$

Относительно функции $u(z)$ уравнение (*) принимает вид:

$$4z^3 u u'_z = 1 \Rightarrow u du = \frac{1}{4} \frac{dz}{z^3}. \quad (**)$$

Могли потерять $z = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ($y = 0$ не является решением исходного уравнения). Из уравнения (**) находим:

$$\frac{u^2}{2} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{C_1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4z^2} = C_1 - u^2 (C_1 > 0) \Rightarrow u^2 = C_1 - \frac{1}{4z^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (z')^2 = \frac{4C_1 z^2 - 1}{4z^2} \Rightarrow z' = \pm \frac{\sqrt{4C_1 z^2 - 1}}{2z} \Leftrightarrow 2zz' = \pm \sqrt{4C_1 z^2 - 1}.$$

Замена:

$$4C_1 z^2 - 1 = v(t) \Rightarrow 8C_1 z z' = v'_t \Rightarrow 2z z' = \frac{v'_t}{4C_1}.$$

А тогда относительно функции $v(t)$ получаем уравнение

$$\frac{v'_t}{4C_1} = \pm \sqrt{v} \Rightarrow \pm \frac{dv}{2\sqrt{v}} = 2C_1 dt \Rightarrow \pm \sqrt{v} = 2C_1 t + 2 \ln C_2, \quad C_2 > 0 \Rightarrow$$

$$v = (2C_1 t + 2 \ln C_2)^2 \Leftrightarrow 4C_1 z^2 - 1 = (2C_1 t + 2 \ln C_2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4C_1 y^2 e^{-t} - 1 = (2C_1 t + 2 \ln C_2)^2 \Leftrightarrow 4C_1 \frac{y^2}{x} = (2C_1 \ln|x| + 2 \ln C_2)^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4C_1 y^2 = x + 4x \left[C_1 \left(\ln|x| + \ln C_2^{1/C_1} \right) \right]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4C_1 y^2 = x + 4x \left(C_1 \ln \bar{C}_2 |x| \right)^2, \quad \bar{C}_2 = C_2^{1/C_1}.$$

Задача 54. Решить уравнение $x^3 y'' = (y - xy')(y - xy' - x)$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = x^3 y'' - (y - xy')(y - xy' - x)$,

$$F'_x = 3x^2 y'' + y'(y - xy' - x) + (y' + 1)(y - xy'),$$

$$F'_y = (xy' + x - y) - (y - xy').$$

$$F'_{y'} = x(y - xy' - x) + x(y - xy'), \quad F'_{y''} = x^3.$$

Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($x_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Отметим, что заданное уравнение — обобщенно-однородное относительно x, y, y', y'' с показателем $k = 1$. В самом деле, имеем:

$$k = k = 1 \text{ и } 3 + k - 2 = k + 1 \Rightarrow k = 1.$$

Поэтому делаем замену: $x = e^t$, $y = ze^t$, где $z(t)$ — новая неизвестная функция (считаем $x > 0$). Тогда

$$x'_t = e^t, \quad y'_t = (z'_t + z)e^t \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = z'_t + z; \quad y''_{x^2} = (y'_x)'_t \frac{1}{x'_t} = (z''_t + z'_t)e^{-t}.$$

Относительно функции $z(t)$ исходное уравнение принимает вид

$$e^{3t} e^{-t} (z''_t + z'_t) = [ze^t - e^t(z'_t + z)] \cdot [ze^t - e^t(z'_t + z) - e^t] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z''_t + z'_t = z'_t(z'_t + 1) \Leftrightarrow z''_t = (z'_t)^2 \Rightarrow \frac{z''_t}{z'_t} = z'_t. \quad (*)$$

Могли потерять $z'_t = 0 \Rightarrow z = C \Leftrightarrow y = Cx$ — решение исходного уравнения. Перепишем уравнение (*) в виде

$$(\ln|z'_t|)'_t = z'_t \Rightarrow \ln|z'_t| = z + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0 \Rightarrow z'_t = C_1 e^z \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow e^{-z} dz &= C_1 dt \Rightarrow -e^{-z} = C_1 t + C_1 \ln C_2, \quad C_2 > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{-z} &= \tilde{C}_1(t + \ln C_2) \Rightarrow -z = \ln [\tilde{C}_1(t + \ln C_2)] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\frac{y}{x} &= \ln [\tilde{C}_1(\ln x + \ln C_2)] \Leftrightarrow y = -x \ln (\tilde{C}_1 \ln C_2 x). \end{aligned}$$

Для $x < 0$ замена: $x = -e^t$, $y = ze^t$ приводит к уравнению: $z_t'' = -(z_t')^2$. Интегрирование этого уравнения приводит к соотношению $y = -x \ln (C_1 \ln C_2 x)$, где $C_2 < 0$.

Задача 55. Решить уравнение $\frac{y^2}{x^2} + (y')^2 = 3xy' + \frac{2yy'}{x}$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = \frac{y^2}{x^2} + (y')^2 - 3xy' - \frac{2yy'}{x}$,

$$F'_x = -\frac{2y^2}{x^3} - 3y'' + \frac{2yy'}{x^2}, \quad F'_y = \frac{2y}{x^2} - \frac{2y'}{x}, \quad F'_{y'} = 2y' - \frac{2y}{x}, \quad F'_{y''} = -3x.$$

Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$ в каждой точке (x, y, y', y'') , $x \neq 0$. $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) ($x_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Заметим, что заданное уравнение — обобщенно-однородное относительно x, y, y', y'' с показателем $k = 1$. В самом деле, имеем:

$$2k - 2 = 2k - 2 = k - 2 + 1 = k + k - 1 - 1 \Rightarrow k = 1.$$

Поэтому делаем замену: $x = e^t$, $y = ze^t$, где $z(t)$ — новая неизвестная функция (считаем $x > 0$). Тогда

$$x'_t = e^t, \quad y'_t = (z'_t + z) e^t, \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = z'_t + z; \quad y''_x = (y'_x)'_t \frac{1}{x'_t} = (z''_t + z'_t) e^{-t}.$$

Относительно функции $z(t)$ исходное уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{z^2 e^{2t}}{e^{2t}} + (z'_t + z)^2 &= 3e^t e^{-t} (z''_t + z'_t) + 2 \frac{e^t z(z'_t + z)}{e^t} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3z''_t + 3z'_t - (z'_t)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (*)$$

Для $x < 0$ замена $x = -e^t$, $y = ze^t$ приводит к уравнению $3z_t^2 + 3z_t' + (z_t')^2 = 0$.

Замечаем, что в уравнение (*) явно не входит z . Поэтому делаем замену: $z_t' = u(t)$, где $u(t)$ — новая неизвестная функция. Тогда $z_t^2 = u_t'$, и, следовательно, уравнение (*) принимает вид

$$3u_t' = u^2 - 3u \Rightarrow \frac{3du}{u(u-3)} = dt. \quad (**)$$

Могли потерять:

1) $u = 0 \Leftrightarrow z_t' = 0 \Rightarrow z = C \Leftrightarrow \frac{y}{x} = C \Rightarrow y = Cx$ — решение исходного уравнения;

2) $u = 3 \Leftrightarrow z_t' = 3 \Rightarrow z = 3t + C \Rightarrow \frac{y}{x} = 3 \ln x + C$ (у нас $x > 0$) — решение исходного уравнения.

Уравнение (**) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{u-3} - \frac{1}{u} \right) du &= dt \Rightarrow \ln|u-3| - \ln|u| = t + \ln|C_1|, C_1 \neq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{u-3}{u} &= C_1 e^t \Rightarrow u = \frac{3}{1-C_1 e^t} \Leftrightarrow z_t' = \frac{3}{1-C_1 e^t} \Rightarrow dz = \frac{3dt}{1-C_1 e^t} \Rightarrow \\ \Rightarrow z &= 3 \int \frac{dt}{1-C_1 e^t} \Rightarrow z = 3 \ln \left| \frac{C_1 e^t}{C_1 e^t - 1} \right| + C_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{y}{x} &= C_2 - 3 \ln \left| \frac{C_1 x - 1}{C_1 x} \right| \Rightarrow \frac{y}{x} = C_2 - 3 \ln \left| 1 - \frac{1}{C_1 x} \right|. \end{aligned}$$

Задача 56. Решить уравнение $y'' = \left(2xy - \frac{5}{x} \right) y' + 4y^2 - \frac{4y}{x^2}$.

Решение. $f(x, y, y') = 2xyy' - \frac{5y'}{x} + 4y^2 - \frac{4y}{x^2}$, $f_y' = 2xy' + 8y - \frac{4}{x^2}$, $f_{y'}' = 2xy - \frac{5}{x}$. Функция $f(x, y, y')$ непрерывна и имеет непрерывные $f_y', f_{y'}'$ в каждой точке (x, y, y') ($x \neq 0$). Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y_0') ($x_0 \neq 0$) имеет единственное решение.

Отметим, что заданное уравнение — обобщенно-однородное с показателем $k = -2$. В самом деле, имеем:

$$k - 2 = k + 1 + k - 1 = k - 1 - 1 = 2k = k - 2 \Rightarrow k = -2.$$

Поэтому делаем замену: $x = e^t$, $y = ze^{-2t}$ (это для $x > 0$). Тогда

$$x'_t = e^t, y'_t = e^{-2t}(z'_t - 2z), y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = (z'_t - 2z)e^{-3t};$$

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_t \frac{1}{x'_t} = (z''_t - 5z'_t + 6z)e^{-4t}.$$

Относительно функции $z(t)$ исходное уравнение принимает вид

$$(z''_t - 5z'_t + 6z)e^{-4t} = (2e^t ze^{-2t} - 5e^{-t})(z'_t - 2z)e^{-3t} + 4z^2 e^{-4t} - 4ze^{-4t} \Rightarrow$$

$$z''_t = 2zz'_t. \quad (*)$$

Для $x < 0$ замена $x = -e^t$, $y = ze^{-2t}$ приводит к тому же самому уравнению (*).

Замечаем, что уравнение (*) не содержит явно независимую переменную t . Поэтому делаем замену:

$$z'_t = u(z) \Rightarrow z''_t = \frac{du(z)}{dt} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \Rightarrow z''_t = u'(z) \cdot u(z).$$

Относительно функции $u(z)$ уравнение (*) принимает вид

$$uu'_z = 2uz \Rightarrow u'_z = 2z.$$

Могли потерять $u = 0 \Leftrightarrow z'_t = 0 \Rightarrow z = \dot{C} \Leftrightarrow yx^2 = C$ — решение исходного уравнения.

Из уравнения $u'_z = 2z$ находим

$$du = 2zdz \Rightarrow u = z^2 + C_1 \Leftrightarrow z'_t = z^2 + C_1 \Rightarrow \frac{dz}{z^2 + C_1} = dt.$$

Следует рассмотреть три случая: 1) $C_1 = 0$; 2) $C_1 > 0$; 3) $C_1 < 0$.

1) Пусть $C_1 = 0$. В этом случае имеем

$$\frac{dz}{z^2} = dt \Rightarrow -\frac{1}{z} = t + \ln|C_2|, C_2 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(t + \ln|C_2|) = -1 \Rightarrow x^2 y (\ln|C_2 x|) = -1.$$

2) Пусть $C_1 > 0$. Обозначим $C_1 = \tilde{C}_1^2 (> 0)$. Будем иметь в этом случае

$$\begin{aligned}\frac{dz}{z^2 + \tilde{C}_1^2} = dt &\Rightarrow \frac{1}{\tilde{C}_1} \operatorname{arctg} \frac{z}{\tilde{C}_1} = t + \ln|C_2|, \quad C_2 \neq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{z}{\tilde{C}_1} = \tilde{C}_1 (t + \ln|C_2|) &\Rightarrow \frac{z}{\tilde{C}_1} = \operatorname{tg} [\tilde{C}_1 (t + \ln|C_2|)] \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 y = \tilde{C}_1 \operatorname{tg} (\tilde{C}_1 \ln|C_2 x|).\end{aligned}$$

3) Пусть $C_1 < 0$. Обозначим $C_1 = -\tilde{C}_1^2 (< 0)$. Будем иметь в этом случае

$$\begin{aligned}\frac{dz}{z^2 - \tilde{C}_1^2} = dt &\Rightarrow \frac{1}{2\tilde{C}_1} \ln \left| \frac{z - \tilde{C}_1}{z + \tilde{C}_1} \right| = t + \ln|C_2|, \quad C_2 \neq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left| \frac{z - \tilde{C}_1}{z + \tilde{C}_1} \right| = |C_2 x|^{2\tilde{C}_1} &\Rightarrow x^2 y - \tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 |x|^{2\tilde{C}_1} (x^2 y + \tilde{C}_1).\end{aligned}$$

Задача 57. Решить уравнение $x^2 (2yy'' - (y')^2) = 1 - 2xyy'$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = 2x^2 yy'' - x^2 (y')^2 + 2xyy' - 1$,

$$F'_x = 4xyy'' - 2x(y')^2 + 2yy', \quad F'_y = 2x^2 y'' + 2xy',$$

$$F'_{y'} = -2x^2 y' + 2xy, \quad F'_{y''} = 2x^2 y.$$

Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y'} = 0 \Leftrightarrow xy = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) , такими, что $x_0 y_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Отметим, что заданное уравнение — обобщенно-однородное с показателем $k = 0$. В самом деле, имеем:

$$2 + k + k - 2 = 2 + 2k - 2 = 0 = 1 + k + k - 1 \Rightarrow k = 0.$$

Поэтому делаем замену: $x = e^{t'}$, $y = ze^{0t'} = z$ (это для $x > 0$). Тогда

$$x'_t = e^t, \quad y'_t = z'_t, \quad y''_x = \frac{y'_t}{x'_t} = y'_t e^{-t}; \quad y''_{x^2} = (y''_{t^2} e^{-t} - y'_t e^{-t}) \frac{1}{x'_t} = (y''_{t^2} - y'_t) e^{-2t}.$$

При такой замене исходное уравнение принимает вид

$$e^{2t} [2y(y_t'' - y_t')e^{-2t} - (y_t')^2 e^{-2t}] = 1 - 2e^t y y_t' e^{-t} \Rightarrow 2y y_t'' - (y_t')^2 = 1. (*)$$

Замечание. Для $x < 0$ следует сделать замену: $x = -e^t$, $y = ze^{0t} = z$. Легко проверить, что и при такой замене мы придём к тому же самому уравнению (*) относительно функции $y(t)$.

Замечаем, что в уравнение (*) не входит явно независимая переменная t . Поэтому делаем замену: $y_t' = u(y)$, где $u(y)$ — новая

неизвестная функция. Тогда $y_t'' = \frac{du(y)}{dt} = \frac{du(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} \Rightarrow y_t'' = u_y' u$.

Относительно функции $u(y)$ уравнение (*) принимает вид

$$2y u u_y' - u^2 = 1 \Rightarrow 2y u u_y' = 1 + u^2 \Rightarrow \frac{2u du}{1 + u^2} = \frac{dy}{y}$$

($y = 0$ не является решением исходного уравнения. Это видно из самого уравнения). А тогда получаем

$$\ln(1 + u^2) = \ln|y| + \ln|C_1|, C_1 \neq 0 \Rightarrow 1 + u^2 = C_1 y \Rightarrow u^2 = C_1 y - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y_t')^2 = C_1 y - 1 \Rightarrow y_t' = \pm \sqrt{C_1 y - 1} \Rightarrow \frac{dy}{\pm \sqrt{C_1 y - 1}} = dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pm 2}{C_1} \sqrt{C_1 y - 1} = t + \ln|C_2|, C_2 \neq 0 \Rightarrow \pm 2\sqrt{C_1 y - 1} = C_1 \ln|C_2 x| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(C_1 y - 1) = C_1^2 (\ln|C_2 x|)^2.$$

Задача 58. Решить уравнение $x^2(y y'' - (y')^2) + x y y' = (2x y' - 3y)\sqrt{x^3}$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = x^2 y y'' - x^2 (y')^2 + x y y' + 3y\sqrt{x^3} - 2x y' \sqrt{x^3}$,

$$F_x' = 2x y y'' - 2x (y')^2 + y y' + \frac{9}{2} y \sqrt{x} - 5\sqrt{x^3} y',$$

$$F_y' = x^2 y'' + x y' + 3\sqrt{x^3}, F_{y'}' = -2x^2 y' + x y - 2x\sqrt{x^3}, F_{y''}' = x^2 y.$$

Функция $F(x, y, y', y'')$ определена, непрерывна и имеет непрерывные $F_x', F_y', F_{y'}', F_{y''}'$ в каждой точке (x, y, y', y'') ($x \geq 0$);

$F'_y = 0 \Leftrightarrow xy = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) , такими, что $x_0 y_0 \neq 0$ ($x_0 > 0$), имеет единственное решение.

Отметим, что заданное уравнение — обобщенно-однородное с показателем $k = \frac{3}{2}$. В самом деле, имеем:

$$2 + k + k - 2 = 2 + 2k - 2 = 1 + k + k - 1 = \frac{5}{2} + k - 1 = k + \frac{3}{2} \Rightarrow k = \frac{3}{2}.$$

Поэтому делаем замену: $x = e^t$, $y = ze^{\frac{3}{2}t}$ (заданное уравнение определено для $x > 0$). Тогда

$$x'_t = e^t, y'_t = \left(z'_t + \frac{3}{2}z\right)e^{\frac{3}{2}t}, y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \Rightarrow y'_x = \left(z'_t + \frac{3}{2}z\right)e^{\frac{t}{2}}.$$

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_t \frac{1}{x'_t} = \left(z''_t + 2z'_t + \frac{3}{4}z\right)e^{\frac{t}{2}}.$$

Относительно функции $z(t)$ заданное уравнение принимает вид

$$zz''_t - (z'_t)^2 - 2z'_t = 0 \Rightarrow \frac{zz''_t - (z'_t)^2}{z^2} = 2 \frac{z'_t}{z^2}. \quad (*)$$

Могли потерять: $z = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ($y = 0$ — решение исходного уравнения). Уравнение (*) может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{z'_t}{z}\right)'_t &= -2\left(\frac{1}{z}\right)'_t \Rightarrow \frac{z'_t}{z} = -2 \cdot \frac{1}{z} + C_1 \Rightarrow z'_t = C_1 z - 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dz}{C_1 z - 2} = dt. \end{aligned} \quad (**)$$

Могли потерять:

$$C_1 z - 2 = 0 \ (C_1 \neq 0) \Leftrightarrow C_1 \frac{y}{x^{3/2}} = 2 \Rightarrow C_1 y = 2x^{3/2} \Rightarrow y = \tilde{C}x^{3/2} \ (\tilde{C} = \frac{2}{C_1})$$

— решение исходного уравнения.

Если $C_1 = 0$, то уравнение (**) принимает вид

$$\begin{aligned} dz = -2dt \Rightarrow z = -2t - 2\ln|C_2| \quad (C_2 \neq 0) &\Leftrightarrow \frac{y}{x^{3/2}} = -2\ln C_2 x \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = -2x^{3/2} \ln C_2 x \quad (C_2 > 0). \end{aligned}$$

Если $C_1 \neq 0$, то уравнение (**) дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_1} \ln|C_1 z - 2| &= t + \ln|C_2| \quad (C_2 \neq 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln|C_1 z - 2| &= C_1 (\ln x + \ln|C_2|) \Rightarrow |C_1 z - 2| = (|C_2| x)^{C_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow C_1 \frac{y}{x^{3/2}} &= |C_2|^{C_1} x^{C_1} + 2 \Rightarrow C_1 y = x^{3/2} (\tilde{C}_2 x^{C_1} + 2), \end{aligned}$$

где $\tilde{C}_2 = |C_2|^{C_1}$.

Задача 59. Решить уравнение $x^4 \left((y')^2 - 2yy'' \right) = 4x^3 yy' + 1$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = x^4 \left((y')^2 - 2yy'' \right) - 4x^3 yy' - 1$,

$$F'_x = 4x^3 \left((y')^2 - 2yy'' \right) - 12x^2 yy', \quad F'_{y'} = -2x^4 y'' - 4x^3 y',$$

$$F'_{y''} = 2x^4 y' - 4x^3 y, \quad F'_{y'''} = -2x^4 y.$$

Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $F'_x, F'_{y'}, F'_{y''}, F'_{y'''}; F'_{y'''} = 0 \Leftrightarrow xy = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) , такими, что $x_0 y_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Отметим, что заданное уравнение — обобщенно-однородное с показателем $k = -1$. В самом деле, имеем:

$$4 + 2k - 2 = 4 + k + k - 2 = 3 + k + k - 1 = 0 \Rightarrow k = -1.$$

Поэтому делаем замену: $x = e^t$, $y = ze^{-t}$ (это для $x > 0$). Тогда

$$x'_t = e^t, \quad y'_t = (z'_t - z)e^{-t} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = (z'_t - z)e^{-2t};$$

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_t \frac{1}{x'_t} \Rightarrow y''_{x^2} = (z''_t - 3z'_t + 2z)e^{-3t}.$$

Относительно функции $z(t)$ заданное уравнение принимает вид

$$2zz''_t - (z'_t)^2 = z^2 - 1. \quad (*)$$

Для $x < 0$ следует сделать замену: $x = -e^t$, $y = ze^{-t}$. Легко проверить, что и при такой замене мы приходим к тому же самому уравнению (*) относительно функции $z(t)$.

В уравнении (*) отсутствует независимая переменная t . Поэтому делаем замену: $z'_t = u(z)$, где $u(z)$ — новая неизвестная функция. А тогда

$$z''_t = \frac{du(z)}{dz} = \frac{du(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \Rightarrow z''_t = u'_z u.$$

Относительно функции $u(z)$ будем иметь уравнение

$$2zuu'_z - u^2 = z^2 - 1. \quad (**)$$

В уравнении (**) делаем замену: $u^2 = v(z)$. Получим

$$zv'_z - v = z^2 - 1 \Rightarrow v' - \frac{v}{z} = z - \frac{1}{z}. \quad (***)$$

Могли потерять $z = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ($y = 0$ не является решением исходного уравнения). Уравнение (***) — линейное относительно функции $v(z)$. Решая его, находим

$$\begin{aligned} v(z) = z^2 + C_1 z + 1 &\Leftrightarrow u^2 = z^2 + C_1 z + 1 \Leftrightarrow (z'_t)^2 = z^2 + C_1 z + 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow z'_t = \pm \sqrt{z^2 + C_1 z + 1} \Rightarrow \pm \frac{dz}{\sqrt{z^2 + C_1 z + 1}} = \\ &= dt \Leftrightarrow \frac{\pm d\left(z + \frac{C_1}{2}\right)}{\sqrt{\left(z + \frac{C_1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{C_1^2}{4}\right)}} = dt. \end{aligned}$$

Могли потерять:

$\sqrt{z^2 + C_1 z + 1} = 0 \Leftrightarrow$ при $C_1 = \pm 2$: $\sqrt{(z \pm 1)^2} = 0 \Rightarrow z = \pm 1 \Leftrightarrow xy = \pm 1$ — решения исходного уравнения.

Если $C_1 \neq \pm 2$, то

$$\begin{aligned} \ln \left| \left(z + \frac{C_1}{2} \right) \pm \sqrt{z^2 + C_1 z + 1} \right| &= t + \ln |C_2|, \quad C_2 \neq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln \left| \left(xy + \frac{C_1}{2} \right) \pm \sqrt{x^2 y^2 + C_1 xy + 1} \right| &= \ln |C_2 x| \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(xy + \frac{C_1}{2} \right) \pm \sqrt{x^2 y^2 + C_1 xy + 1} &= C_2 x \Rightarrow \\ \Rightarrow \pm \sqrt{x^2 y^2 + C_1 xy + 1} &= C_2 x - xy - \frac{C_1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 y^2 + C_1 xy + 1 &= C_2^2 x^2 + x^2 y^2 + \frac{C_1^2}{4} - 2C_2 x^2 y - C_1 C_2 x + C_1 xy \Rightarrow \\ \Rightarrow 2C_2 x^2 y &= \left(C_2^2 x^2 - C_1 C_2 x + \frac{C_1^2}{4} \right) - 1 \Rightarrow 2C_2 x^2 y = (C_2 x - \tilde{C}_1)^2 - 1, \end{aligned}$$

где $\tilde{C}_1 = \frac{C_1}{2}$.

Задача 60. Решить уравнение $yy' + xy'' - x(y')^2 = x^3$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = yy' + xy'' - x(y')^2 - x^3$,

$$F'_x = yy'' - (y')^2 - 3x^2, F'_y = y' + xy'', F'_{y'} = y - 2xy', F'_{y''} = xy.$$

Функция $F(x, y, y', y'')$ — непрерывна и имеет непрерывные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y''} = 0 \Leftrightarrow xy = 0$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) , такими, что $x_0 y_0 \neq 0$, имеет единственное решение.

Отметим, что заданное уравнение — обобщенно-однородное с показателем $k = 2$. В самом деле, имеем:

$$k + k - 1 = 1 + k + k - 2 = 1 + 2k - 2 = 3 \Rightarrow k = 2.$$

Поэтому делаем замену: $x = e^t$, $y = ze^{2t}$ ($\Rightarrow z = \frac{y}{x^2}$) (это для $x > 0$).

Тогда

$$x'_t = e^t, y'_t = (z'_t + 2z)e^{2t}, y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = (z'_t + 2z)e^t;$$

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_t \frac{1}{x'_t} \Rightarrow y''_{x^2} = z''_t + 3z'_t + 2z.$$

Относительно функции $z(t)$ заданное уравнение принимает вид

$$ze^{2t}(z'_t + 2z)e^t + e^t ze^{2t}(z''_t + 3z'_t + 2z) - e^t(z'_t + 2z)^2 e^{2t} = e^{3t} \Rightarrow$$

$$zz''_t - (z'_t)^2 = 1. \quad (*)$$

Заметим, что для $x < 0$ замена: $x = -e^t$, $y = ze^{2t}$ приводит к тому же самому уравнению (*). Видим, что уравнение (*) не содержит явно независимую переменную t . Поэтому делаем замену: $z'_t = u(z)$, где $u(z)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$z''_t = \frac{du(z)}{dt} = \frac{du(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \Rightarrow z''_t = u'(z)u(z).$$

Относительно функции $u(z)$ уравнение (*) примет вид

$$zuu'_z - u^2 = 1 \Rightarrow zuu'_z = u^2 + 1 \Rightarrow \frac{u du}{u^2 + 1} = \frac{dz}{z}. \quad (**)$$

Могли потерять $z = 0 \Leftrightarrow y = 0$ (функция $y = 0$ не является решением исходного уравнения). Из уравнения (**) находим

$$\frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) = \ln|z| + \frac{1}{2} \ln|C_1|, C_1 \neq 0 \Rightarrow u^2 + 1 = C_1 z^2 (\Rightarrow C_1 > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z'_t)^2 = C_1 z^2 - 1 \Rightarrow z'_t = \pm \sqrt{C_1 z^2 - 1} \Rightarrow \pm \frac{dz}{\sqrt{C_1 z^2 - 1}} = dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{C_1}} \ln \left| \sqrt{C_1} z \pm \sqrt{C_1 z^2 - 1} \right| = t + \ln|C_2|, C_2 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \left| \sqrt{C_1} \frac{y}{x^2} \pm \sqrt{C_1 \frac{y^2}{x^4} - 1} \right| = (\ln|x| + \ln|C_2|) \sqrt{C_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{C_1} \frac{y}{x^2} \pm \sqrt{C_1 \frac{y^2}{x^4} - 1} = (|x||C_2|)^{\sqrt{C_1}} \Rightarrow$$

$$(\text{обозначим } \sqrt{C_1} = \tilde{C}_1, |C_2|^{\sqrt{C_1}} = \tilde{C}_2)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \pm \sqrt{\tilde{C}_1^2 \frac{y^2}{x^4} - 1} = \tilde{C}_2 |x|^{\tilde{C}_1} - \tilde{C}_1 \frac{y}{x^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \tilde{C}_1^2 \frac{y^2}{x^4} - 1 = \tilde{C}_2^2 |x|^{2\tilde{C}_1} - 2\tilde{C}_1\tilde{C}_2 y |x|^{\tilde{C}_1-2} + \tilde{C}_1^2 \frac{y^2}{x^4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2\tilde{C}_1\tilde{C}_2 y = \tilde{C}_2^2 |x|^{\tilde{C}_1+2} + |x|^{2-\tilde{C}_1}. \end{aligned}$$

Задача 61. Найти решение уравнения $yy'' = 2x(y')^2$, удовлетворяющее начальным условиям: $y|_{x=2} = 2$, $y'|_{x=2} = \frac{1}{2}$.

Решение. Непосредственно из уравнения видно, что $y = C$ (в частности, $y = 0$) является решением заданного уравнения. Но это решение не удовлетворяет заданным начальным условиям. Для $y \neq 0$ имеем

$$y'' = 2 \frac{x(y')^2}{y} \Rightarrow f(x, y, y') = 2 \frac{x(y')^2}{y}, \quad f'_y = -2 \frac{x(y')^2}{y^2}, \quad f'_{y'} = \frac{4xy'}{y}.$$

Видим, что $f(x, y, y')$ непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}$ в каждой точке (x, y, y') , $y \neq 0$. Следовательно, задача Коши с заданными начальными данными $\left(2, 2, \frac{1}{2}\right)$ имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение — однородное относительно y, y', y'' . Поэтому делаем замену: $y' = yz$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = y'z + yz' \Rightarrow y'' = y(z^2 + z')$, и, следовательно, исходное уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned} y^2(z^2 + z') &= 2xy^2z^2 \Rightarrow z^2 + z' = 2xz^2 \quad (\text{считаем } y \neq 0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow dz = z^2(2x - 1)dx \Rightarrow \frac{dz}{z^2} = (2x - 1)dx. \end{aligned}$$

Могли потерять $z = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$ — решение, но оно не удовлетворяет заданным начальным условиям. Интегрируя полученное уравнение, находим $-\frac{1}{z} = x^2 - x + C_1$. У нас

$$z = \frac{y'}{y} \Rightarrow z|_{x=2} = \frac{1}{4}. \text{ Следовательно, имеем}$$

$$-4 = 4 - 2 + C_1 \Rightarrow C_1 = -6.$$

Таким образом, получили

$$z = -\frac{1}{x^2 - x - 6} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{(x+2)(x-3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-3} \right) dx \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x+2}{x-3} \right| + C_2.$$

У нас $y|_{x=2} = 2$. Поэтому для определения C_2 получаем

$$\ln 2 = \frac{1}{5} \ln 4 + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{3}{5} \ln 2.$$

Ответ: $\ln|y| = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x+2}{x-3} \right| + \frac{3}{5} \ln 2 \Rightarrow$ в окрестности точки $(2, 2)$:

$$8(x+2) = (3-x)y^5.$$

Замечание (важное для практики). При решении задачи Коши для уравнений порядков выше первого методом понижения порядка произвольные постоянные целесообразно находить после каждого интегрирования.

Задача 62. Найти решение уравнения $2y'' - 3(y')^2 = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y|_{x=0} = -3$, $y'|_{x=0} = 1$, $y''|_{x=0} = -1$.

Решение. Имеем

$$y'' = \frac{3}{2} (y')^2 \Rightarrow f(x, y, y', y'') = \frac{3}{2} (y')^2; \quad f_y' = 0, \quad f_{y'}' = 3y', \quad f_{y''} = 0.$$

Видим, что $f(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $f_y', f_{y'}', f_{y''}$. Следовательно, задача Коши с любыми начальными данными, в частности, с начальными условиями $(0, -3, 1, -1)$, имеет единственное решение.

Замечаем, что в заданное уравнение не входит явно y . Поэтому делаем замену: $y' = z$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'' = z'$, $y''' = z''$, и, следовательно, заданное уравнение принимает вид

$$2z'' - 3z^2 = 0. \quad (*)$$

В уравнение (*) не входит явно независимая переменная x . Поэтому

мы делаем замену: $z'_x = u(z)$. А тогда $z''_{x^2} = \frac{du(z)}{dz} = \frac{du(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = u'_z u$.

Относительно функции $u(z)$ уравнение (*) принимает вид

$$2uu'_z = 3z^2 \Rightarrow 2u du = 3z^2 dz \Rightarrow u^2 = z^3 + C_1. \quad (**)$$

У нас $u = z'_x = y''_{x^2}$. Для нахождения C_1 используем начальные условия:

$y''|_{x=0} = u|_{x=0} = -1$, $y'|_{x=0} = z|_{x=0} = 1$. Получаем $1 = 1 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$.

Следовательно, вместо (**) будем иметь

$$u^2 = z^3 \Leftrightarrow (z'_x)^2 = z^3 \Rightarrow z'_x = \pm z^{3/2}.$$

Здесь из двух знаков “ $\pm$ ” следует взять знак “ $-$ ”, ибо при $x = 0$ должно быть $z'_x|_{x=0} = -1$, $z|_{x=0} = 1$. Значит, будем иметь

$$-\frac{dz}{z^{3/2}} = dx.$$

Могли потерять $z = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$ ($y = C$ — решение уравнения, но оно не удовлетворяет заданным начальным условиям).

Интегрируем уравнение $-\frac{dz}{z^{3/2}} = dx$. Находим

$$\frac{2}{\sqrt{z}} = x + C_2. \quad (***)$$

Для нахождения C_2 используем начальное условие: $z|_{x=0} = y'|_{x=0} = 1$.

Получаем $C_2 = 2$. А тогда вместо уравнения (***) будем иметь

$$z = \frac{4}{(x+2)^2} \Leftrightarrow y' = \frac{4}{(x+2)^2} \Rightarrow y = -\frac{4}{x+2} + C_3.$$

Для нахождения C_3 используем начальное условие: $y|_{x=0} = -3$.

Получаем $-3 = -2 + C_3 \Rightarrow C_3 = -1$. Следовательно, искомое решение будет таким:

$$y = \frac{-4}{x+2} - 1 \Rightarrow y(x+2) = -x - 6.$$

Задача 63. Найти решение уравнения $x^2 y'' - 3xy' = 6 \frac{y^2}{x^2} - 4y$, удовлетворяющее начальным условиям: $y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=1} = 4$.

Решение. Уравнение задано для $x \neq 0$. Имеем для $x \neq 0$:

$$y'' = \frac{3y'}{x} + 6 \frac{y^2}{x^3} - 4 \frac{y}{x} \Rightarrow f(x, y, y') = 3 \frac{y'}{x} + 6 \frac{y^2}{x^3} - 4 \frac{y}{x},$$

$$f'_y = \frac{12y}{x^3} - \frac{4}{x}, \quad f'_{y'} = \frac{3}{x}.$$

Видим, что $f(x, y, y')$ непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f'_{y'}$ в каждой точке (x, y, y') ($x \neq 0$). Следовательно, задача Коши с заданными начальными условиями $(1, 1, 4)$ имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение является обобщенно-однородным с показателем $k = 2$. В самом деле, имеем:

$$2 + k - 2 = 1 + k - 1 = 2k - 2 = k \Rightarrow k = 2.$$

Поэтому делаем замену: $x = e^t$, $y = ze^{2t}$ (считаем $x > 0$). Тогда

$$x'_t = e^t, \quad y'_t = (z' + 2z)e^{2t} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = (z' + 2z)e^t;$$

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \frac{1}{x'_t} \Rightarrow y''_{x^2} = z''_t + 3z'_t + 2z.$$

Относительно функции $z(t)$ заданное уравнение принимает вид

$$z''_t + 3z'_t + 2z - 3z'_t - 6z = 6z^2 - 4z \Rightarrow z''_t = 6z^2. \quad (*)$$

В уравнении $(*)$ отсутствует независимая переменная t . Поэтому делаем замену: $z'_t = u(z)$, где $u(z)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$z''_t = \frac{du(z)}{dt} = \frac{du(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = u'(z) \cdot u(z).$$

Относительно функции $u(z)$ уравнение $(*)$ принимает вид

$$\begin{aligned} uu'_z = 6z^2 &\Rightarrow udu = 6z^2 dz \Rightarrow \frac{u^2}{2} = 2z^3 + C_1 \Rightarrow u^2 = 4z^3 + 2C_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (z'_t)^2 = 4z^3 + 2C_1. \end{aligned} \quad (**)$$

Для определения C_1 используем начальные условия. Отметим, что значению $x = 1$ соответствует $t = 0$,

$$y|_{t=0} = z|_{t=0} \Rightarrow z|_{t=0} = y|_{x=1} = 1; y'_x|_{x=1} = z'_t|_{t=0} + 2 = 4 \Rightarrow z'_t|_{t=0} = 2.$$

Относительно C_1 имеем, следовательно, уравнение: $4 = 4 + 2C_1 \Rightarrow C_1 = 0$. Тогда вместо уравнения (**) получаем

$$(z'_t)^2 = 4z^3 \Rightarrow z'_t = 2z^{3/2}.$$

Здесь из двух знаков “ $\pm$ ” следует взять знак “ $+$ ”, ибо при $t = 0$ должно быть: $z|_{t=0} = 1$, $z'_t|_{t=0} = 2$. Значит, будем иметь

$$\frac{dz}{2z^{3/2}} = dt. \quad (***)$$

Могли потерять $z = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ($y = 0$ — решение уравнения, но оно не удовлетворяет начальным условиям). Интегрируя уравнение

(***), находим: $-\frac{1}{\sqrt{z}} = t + C_2 \Rightarrow$ при $t = 0$: $-1 = C_2$. Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{z}} = 1 - t \Rightarrow \frac{1}{z} = (1 - t)^2 \Leftrightarrow x^2 = y(1 - \ln x)^2.$$

Задача 64. Найти решение уравнения $y'' = 3yy'$, удовлетворяющее условиям: $y|_{x=0} = -2$, $y'|_{x=0} = 0$, $y''|_{x=0} = \frac{9}{2}$.

Решение. Имеем

$$f(x, y, y', y'') = 3yy' \Rightarrow f'_y = 3y', f''_{y'} = 3y.$$

Видим, что $f(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $f'_y, f''_{y'}$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0, y''_0) , в частности, с начальными

условиями $\left(0, -2, 0, \frac{9}{2}\right)$, имеет единственное решение. Замечаем,

что заданное уравнение может быть записано в виде

$$(y'')'_x = \frac{3}{2}(y^2)'_x \Rightarrow y'' = \frac{3}{2}y^2 + C_1.$$

Постоянную C_1 находим из начальных условий:

$$\frac{9}{2} = \frac{3}{2} \cdot 4 + C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{3}{2}.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$y'' = \frac{3}{2}y^2 - \frac{3}{2}. \quad (*)$$

В уравнение (*) не входит явно независимая переменная x . Поэтому делаем замену: $y' = z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$y''_{x^2} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow y''_{x^2} = z'_y z.$$

Относительно функции $z(y)$ уравнение (*) принимает вид

$$\begin{aligned} 2zz'_y = 3(y^2 - 1) &\Leftrightarrow 2zdz = 3(y^2 - 1)dy \Rightarrow z^2 = y^3 - 3y + C_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (y')^2 = y^3 - 3y + C_2. \end{aligned}$$

Постоянную C_2 находим из начальных условий:

$$0 = -8 + 6 + C_2 \Rightarrow C_2 = 2.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} (y')^2 = y^3 - 3y + 2 &\Rightarrow (y')^2 = (y-1)^2(y+2) \Rightarrow \\ \Rightarrow y' = \pm(y-1)\sqrt{y+2} &\Rightarrow \pm \int \frac{dy}{(y-1)\sqrt{y+2}} = x + C_3. \end{aligned}$$

Будем считать здесь, что $-2 \leq y < 1$, ибо речь идет о решении $y = y(x)$, удовлетворяющем условию $y(0) = -2$, т. е. о решении в окрестности точки $(0, -2)$. Так как

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{(y-1)\sqrt{y+2}} &= \left[\frac{y+2 = t^2}{dy = 2tdt} \right] = \int \frac{2dt}{t^2 - 3} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} - t}{\sqrt{3} + t} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{3} - \sqrt{y+2}}{\sqrt{3} + \sqrt{y+2}} \end{aligned}$$

(для $-2 \leq y < 1$: $1 \geq \frac{\sqrt{3} - \sqrt{y+2}}{\sqrt{3} + \sqrt{y+2}} > 0$), то

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{3} - \sqrt{y+2}}{\sqrt{3} + \sqrt{y+2}} = \pm(x + C_3).$$

Постоянную C_3 находим из начального условия $y|_{x=0} = -2$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 = 0 \pm C_3 \Rightarrow C_3 = 0.$$

Следовательно, получаем

$$\ln \frac{\sqrt{3} - \sqrt{y+2}}{\sqrt{3} + \sqrt{y+2}} = \pm\sqrt{3}x \Rightarrow$$

(здесь знак “+” для $x < 0$ и знак “-” для $x > 0$)

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3} - \sqrt{y+2}}{\sqrt{3} + \sqrt{y+2}} = e^{\pm\sqrt{3}x}.$$

А тогда

$$\sqrt{3} - \sqrt{y+2} = \sqrt{3}e^{\pm\sqrt{3}x} + \sqrt{y+2}e^{\pm\sqrt{3}x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}(1 - e^{\pm\sqrt{3}x}) = \sqrt{y+2}(1 + e^{\pm\sqrt{3}x}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3}e^{\pm\frac{x\sqrt{3}}{2}}(e^{\pm\frac{x\sqrt{3}}{2}} - e^{\mp\frac{x\sqrt{3}}{2}}) = \sqrt{y+2}e^{\pm\frac{x\sqrt{3}}{2}}(e^{\pm\frac{x\sqrt{3}}{2}} + e^{\mp\frac{x\sqrt{3}}{2}}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} \text{для } x < 0: & -\sqrt{3} \cdot 2 \operatorname{sh} \frac{x\sqrt{3}}{2} = \sqrt{y+2} \cdot 2 \operatorname{ch} \frac{x\sqrt{3}}{2}, \\ \text{для } x > 0: & \sqrt{3} \cdot 2 \operatorname{sh} \frac{x\sqrt{3}}{2} = \sqrt{y+2} \cdot 2 \operatorname{ch} \frac{x\sqrt{3}}{2} \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{y+2} = \mp\sqrt{3} \operatorname{th} \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y+2 = 3 \operatorname{th}^2 \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = 3 \operatorname{th}^2 \frac{x\sqrt{3}}{2} - 2.$$

Задача 65. Найти решение уравнения $y'' \cos y + (y')^2 \sin y = y'$

удовлетворяющее начальным условиям: $y|_{x=-1} = \frac{\pi}{6}$, $y'|_{x=-1} = 2$.

Решение. $F(x, y, y', y'') = y'' \cos y + (y')^2 \sin y - y'$;

$$F'_x = 0, F'_y = -\sin y \cdot y'' + (y')^2 \cos y, F'_{y'} = 2y' \sin y - 1, F'_{y''} = \cos y.$$

Функция $F(x, y, y', y'')$ непрерывна и имеет непрерывные $F'_x, F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}$; $F'_{y'} = 0 \Leftrightarrow y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Следовательно, задача Коши для заданного уравнения с любыми начальными данными (x_0, y_0, y'_0) , такими, что $y_0 \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, имеет единственное решение. В частности, задача Коши с начальными условиями $\left(-1, \frac{\pi}{6}, 2\right)$ имеет единственное решение.

Замечаем, что заданное уравнение не содержит явно независимую переменную x . Поэтому делаем замену: $y'_x = z(y)$, где $z(y)$ — новая неизвестная функция. А тогда

$$y''_{x^2} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow y''_{x^2} = z'_y z.$$

Относительно функции $z(y)$ заданное уравнение принимает вид

$$zz'_y \cos y + z^2 \sin y = z \Rightarrow z'_y \cos y + z \sin y = 1. \quad (*)$$

Могли потерять $z = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow y = C$ ($y = C$ — решение исходного уравнения, но оно не удовлетворяет начальным условиям). Уравнение (*) — линейное относительно функции $z(y)$. Решая его, находим

$$z = \sin y + C_1 \cos y \Leftrightarrow y' = \sin y + C_1 \cos y.$$

Постоянную C_1 получаем с помощью начальных условий:

$$2 = \sin \frac{\pi}{6} + C_1 \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{2} + C_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow C_1 = \sqrt{3}.$$

Таким образом, будем иметь

$$\begin{aligned} y' &= \sin y + \sqrt{3} \cos y \Rightarrow y' = 2 \sin \left(y + \frac{\pi}{3} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dy}{2 \sin \left(y + \frac{\pi}{3} \right)} = dx \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \right| = x + C_2. \end{aligned}$$

Постоянную C_2 определяем из начальных условий:

$$\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} \right) \right| = -1 + C_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1 + C_2 \Leftrightarrow 0 = -1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1.$$

Таким образом, будем иметь: $\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \right| = x + 1 \Rightarrow$ В окрестности точки $\left(-1, \frac{\pi}{6} \right)$ получаем: $\ln \operatorname{tg} \left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = 2x + 2$.

§4. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка

Так называются уравнения вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x). \quad (1)$$

(В (1) $y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ входят в первой степени и не перемножаются.) Функции $p_1(x), p_2(x), \dots, p_{n-1}(x), p_n(x)$ называются *коэффициентами* линейного уравнения, а функция $q(x)$ — *свободным членом* этого уравнения.

Предполагается, что функции $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x), q(x)$ — непрерывные на некотором промежутке (a, b) .

Установим область существования и единственности решения уравнения (1). Для этого перепишем уравнение (1) в виде, разрешенном относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = \underbrace{q(x) - p_1(x)y^{(n-1)} - p_2(x)y^{(n-2)} - \dots - p_{n-1}(x)y' - p_n(x)y}_{=f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})}.$$

Имеем $\frac{\partial f}{\partial y} = -p_n(x)$, $\frac{\partial f}{\partial y'} = -p_{n-1}(x)$, ..., $\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} = -p_1(x)$. Видим, что

функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $f'_y, f'_{y'}, \dots, f'_{y^{(n-1)}}$ в каждой точке области

$$(D) = \begin{cases} a < x < b, \\ -\infty < y < +\infty, \\ -\infty < y' < +\infty, \\ \dots\dots\dots \\ -\infty < y^{(n-1)} < +\infty. \end{cases}$$

Потому существует, и притом единственное, решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \quad (2)$$

где x_0 — любое из (a, b) , а $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — вообще любые числа.

Отметим, что если свободный член $q(x) \equiv 0$ в (a, b) , то уравнение (1) называется *линейным однородным*; если $q(x) \neq 0$ для $x \in (a, b)$, то уравнение (1) называется *линейным неоднородным*.

Заметим, что левая часть уравнения (1) представляет собой результат выполнения некоторой совокупности операций дифференцирования и алгебраических действий. Эту совокупность операций дифференцирования и алгебраических действий называют *линейным дифференциальным оператором n -го порядка* и обозначают символом L . Таким образом,

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y.$$

С помощью символа L уравнение (1) запишется так:

$$L(y) = q(x). \quad (\tilde{1})$$

Отметим следующие два свойства оператора L .

1. Пусть $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ — n раз непрерывно дифференцируемые функции на промежутке (a, b) . Тогда

$$L(y_1 + y_2 + \dots + y_m) = L(y_1) + L(y_2) + \dots + L(y_m), \quad x \in (a, b).$$

В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} L(y_1 + y_2 + \dots + y_m) &= (y_1 + y_2 + \dots + y_m)^{(n)} + \\ &+ p_1(x)(y_1 + y_2 + \dots + y_m)^{(n-1)} + \dots + \\ &+ p_n(x)(y_1 + y_2 + \dots + y_m) = [y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y_1] + \\ &+ [y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y_2] + \dots + \\ &+ [y_m^{(n)} + p_1(x)y_m^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y_m] = \\ &= L(y_1) + L(y_2) + \dots + L(y_m), \quad x \in (a, b). \end{aligned}$$

2. Пусть $y'(x)$ — n раз непрерывно дифференцируемая на промежутке (a, b) функция и C — некоторое постоянное число. Тогда

$$L(C \cdot y) = C \cdot L(y).$$

(Устанавливается простой подстановкой, как и в предыдущем свойстве.)

§5. Линейные однородные уравнения

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение n -го порядка:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

где $p_1(x), p_2(x), \dots, p_{n-1}(x), p_n(x) \in C((a, b))$. С помощью оператора L это уравнение запишется так:

$$L(y) = 0. \quad (I_0)$$

I°. Отметим следующие особенности линейного однородного уравнения.

1. Функция $y \equiv 0$, $x \in (a, b)$, является решением уравнения (I_0) .
2. Если функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ — решения линейного однородного уравнения (I_0) в (a, b) , то функция $y_1(x) + y_2(x) + \dots + y_m(x)$ есть решение этого уравнения в (a, b) .

► Так как функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ — решения уравнения (I_0) в (a, b) , то

$$L(y_1(x)) \equiv 0, L(y_2(x)) \equiv 0, \dots, L(y_m(x)) \equiv 0, x \in (a, b).$$

По свойству оператора L имеем

$$\begin{aligned} L(y_1(x) + y_2(x) + \dots + y_m(x)) &= \\ &= \underbrace{L(y_1(x))}_{\equiv 0, x \in (a, b)} + \underbrace{L(y_2(x))}_{\equiv 0, x \in (a, b)} + \dots + \underbrace{L(y_m(x))}_{\equiv 0, x \in (a, b)} \equiv 0, x \in (a, b). \end{aligned}$$

Значит, функция $y_1(x) + y_2(x) + \dots + y_m(x)$ — решение уравнения (I_0) в (a, b) . ◀

3. Если функция $y(x)$, $x \in (a, b)$, есть решение уравнения (I_0) в (a, b) и если C — любое постоянное число, то функция $Cy(x)$ является решением уравнения (I_0) в (a, b) .

► Имеем $L(Cy(x)) = C \underbrace{L(y(x))}_{\equiv 0, x \in (a, b)} \equiv 0$, $x \in (a, b)$. Значит, функ-

ция $Cy(x)$ есть решение уравнения (I_0) . ◀

Следствие. Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ — решения уравнения (1_0) в (a, b) и пусть $C_1, C_2, \dots, C_m$ — любые постоянные числа. Тогда функция

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_m y_m(x) \quad (*)$$

является решением уравнения (1_0) в промежутке (a, b) .

Замечание. При $m = n$ формула $(*)$ содержит n произвольных постоянных. Это обстоятельство наводит на мысль о возможности построения общего решения линейного однородного уравнения (1_0) в виде линейной комбинации n его решений. Выясним, какими должны быть решения $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ уравнения (1_0) , чтобы функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$ была общим решением этого уравнения.

II°. Линейная зависимость и линейная независимость функций.

Определение. Функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ ($n > 1$), определенные в промежутке (a, b) , называются *линейно зависимыми* в (a, b) , если существуют постоянные числа $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, не равные нулю одновременно, такие, что во всем промежутке (a, b) имеет место тождество:

$$\gamma_1 y_1(x) + \gamma_2 y_2(x) + \dots + \gamma_n y_n(x) \equiv 0. \quad (2)$$

Если таких постоянных $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ не существует, т. е. если тождество (2) имеет место лишь тогда, когда $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_n = 0$, то функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называются *линейно независимыми* в промежутке (a, b) .

Пример 1. Функции $y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2, \dots, y_n = x^{n-1}$ — линейно независимые в любом промежутке.

► Рассуждаем от противного. Допустим, что функции $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ — линейно зависимые в некотором промежутке (a, b) . Но тогда существуют постоянные числа $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, не равные нулю одновременно, такие, что в промежутке (a, b) имеет место тождество

$$\gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 x^2 + \dots + \gamma_n x^{n-1} \equiv 0. \quad (3)$$

А это невозможно, ибо левая часть (3) (в случае, когда среди коэффициентов $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ есть отличные от нуля) может обращаться в нуль не более чем при $(n-1)$ различных значениях x . Полученное противоречие доказывает, что функции $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ — линейно независимые. ◀

Пример 2. Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — различные числа, то функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$ линейно независимы в любом промежутке.

► Рассуждаем от противного. Допустим, что функции $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ — линейно зависимые в некотором промежутке (a, b) . Но тогда существуют постоянные числа $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, среди которых есть отличные от нуля, такие, что во всем промежутке (a, b) должно иметь место тождество

$$\gamma_1 e^{\lambda_1 x} + \gamma_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + \gamma_n e^{\lambda_n x} \equiv 0. \quad (4)$$

У нас в (4) среди чисел $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ есть хотя бы одно, отличное от нуля. Пусть для определенности $\gamma_1 \neq 0$. Разделим обе части (4) на $e^{\lambda_1 x}$. Получаем

$$\gamma_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_n)x} + \gamma_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_n)x} + \dots + \gamma_{n-1} e^{(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x} + \gamma_n \equiv 0.$$

Продифференцируем последнее тождество по x . Получаем

$$\delta_1 e^{k_1 x} + \delta_2 e^{k_2 x} + \dots + \delta_{n-1} e^{k_{n-1} x} \equiv 0. \quad (5)$$

Ясно, что в (5) $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ — различные числа и что $\delta_1 = \gamma_1(\lambda_1 - \lambda_n) \neq 0$. С тождеством (5) поступаем так же, как и с тождеством (4), и т. д. Через $(n-1)$ шагов придем к тому, что во всем промежутке (a, b) должно быть:

$$\mu e^{\mu x} \equiv 0, \text{ причем } \mu \neq 0.$$

А это невозможно. Получили противоречие. Значит, предположение, что функции $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ — линейно зависимые в некотором промежутке (a, b) , неверно. ◀

Пример 3. Функции $y_1 = e^{\lambda x}$, $y_2 = xe^{\lambda x}$, ..., $y_n = x^{n-1}e^{\lambda x}$ — линейно независимые в любом промежутке.

► Рассуждаем от противного. Допустим, что функции $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$, ..., $x^{n-1}e^{\lambda x}$ — линейно зависимые в некотором промежутке (a, b) . Но тогда существуют постоянные числа $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, среди которых есть отличные от нуля, такие, что во всем промежутке (a, b) должно иметь место тождество

$$\gamma_1 e^{\lambda x} + \gamma_2 x e^{\lambda x} + \dots + \gamma_n x^{n-1} e^{\lambda x} \equiv 0,$$

а значит, должно иметь место тождество

$$\gamma_1 + \gamma_2 x + \dots + \gamma_n x^{n-1} \equiv 0, x \in (a, b).$$

Но последнее невозможно, когда среди чисел γ_k ($k = \overline{1, n}$) есть отличные от нуля. Получили противоречие. Значит, предположение, что функции $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$, ..., $x^{n-1}e^{\lambda x}$ — линейно зависимые в некотором промежутке (a, b) , неверно. ◀

Пример 4. Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — различные числа, то функции

$$\begin{aligned} &e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\ &e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, \dots, x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x}, \\ &\dots\dots\dots \\ &e^{\lambda_m x}, xe^{\lambda_m x}, \dots, x^{k_m-1}e^{\lambda_m x} \end{aligned} \tag{6}$$

линейно независимые в любом промежутке.

► Рассуждаем от противного. Допустим, что функции (6) линейно зависимые в некотором промежутке (a, b) . Но тогда существуют числа

$$\gamma_0^{(1)}, \gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_{k_1-1}^{(1)}, \gamma_0^{(2)}, \gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_{k_2-1}^{(2)}, \dots, \gamma_0^{(m)}, \gamma_1^{(m)}, \dots, \gamma_{k_m-1}^{(m)}, \tag{7}$$

среди которых есть отличные от нуля, такие, что во всем промежутке (a, b) должно иметь место тождество:

$$\begin{aligned} &\gamma_0^{(1)} e^{\lambda_1 x} + \gamma_1^{(1)} x e^{\lambda_1 x} + \dots + \gamma_{k_1-1}^{(1)} x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x} + \\ &+ \gamma_0^{(2)} e^{\lambda_2 x} + \gamma_1^{(2)} x e^{\lambda_2 x} + \dots + \gamma_{k_2-1}^{(2)} x^{k_2-1} e^{\lambda_2 x} + \\ &\dots\dots\dots \\ &+ \gamma_0^{(m)} e^{\lambda_m x} + \gamma_1^{(m)} x e^{\lambda_m x} + \dots + \gamma_{k_m-1}^{(m)} x^{k_m-1} e^{\lambda_m x} \equiv 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$P_{k_1-1}^{(1)}(x)e^{\lambda_1 x} + P_{k_2-1}^{(2)}(x)e^{\lambda_2 x} + \dots + P_{k_m-1}^{(m)}(x)e^{\lambda_m x} \equiv 0, x \in (a, b). \quad (8)$$

(В (8)): $P_{k_l-1}^{(l)}(x)$, $l = \overline{1, m}$, — полиномы степени не выше чем $(k_l - 1)$.)

Так как среди чисел (7) есть хотя бы одно отличное от нуля, то хотя бы один из полиномов $P_{k_l-1}^{(l)}(x)$ ($l = 1, 2, \dots, m$) не равен тождественно нулю в промежутке (a, b) . Пусть, для определенности, $P_{k_1-1}^{(1)}(x) \not\equiv 0$ в промежутке (a, b) .

Отметим далее, что

$$\left[P_{k_1-1}^{(l)}(x) \cdot e^{\lambda_1 x} \right]'_x = \tilde{P}_{k_1-1}^{(l)}(x) \cdot e^{\lambda_1 x}.$$

Здесь $P_{k_1-1}^{(l)}(x)$ и $\tilde{P}_{k_1-1}^{(l)}(x)$ — полиномы одной и той же степени. Ясно, что если $P_{k_1-1}^{(l)}(x) \not\equiv 0$ для $x \in (a, b)$, то и $\tilde{P}_{k_1-1}^{(l)}(x) \not\equiv 0$ для $x \in (a, b)$. Разделим обе части (8) на $e^{\lambda_m x}$. Получаем

$$P_{k_1-1}^{(1)}(x)e^{(\lambda_1-\lambda_m)x} + P_{k_2-1}^{(2)}(x)e^{(\lambda_2-\lambda_m)x} + \dots + \\ + P_{k_{m-1}-1}^{(m-1)}(x)e^{(\lambda_{m-1}-\lambda_m)x} + P_{k_m-1}^{(m)}(x) \equiv 0,$$

$x \in (a, b)$. Проинтегрируем по x обе части последнего тождества последовательно k_m раз. Получаем

$$P_{k_1-1}^{(1)*}(x)e^{\mu_1 x} + P_{k_2-1}^{(2)*}(x)e^{\mu_2 x} + \dots + P_{k_{m-1}-1}^{(m-1)*}(x)e^{\mu_{m-1} x} \equiv 0, x \in (a, b). \quad (9)$$

(В (9)): $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m-1}$ — различные числа, и $P_{k_1-1}^{(1)*}(x) \not\equiv 0$, $x \in (a, b)$.)

С тождеством (9) поступаем так же, как и с тождеством (8), и т. д. Через $(m-1)$ таких шагов мы придем к тому, что во всем промежутке (a, b) должно иметь место тождество

$$P_{k_1-1}^{**}(x)e^{\nu x} \equiv 0.$$

Но последнее невозможно, ибо $P_{k_1-1}^{**}(x) \not\equiv 0$, $x \in (a, b)$. Получили противоречие. Значит, предположение, что функции (6) — линейно зависимые в некотором промежутке (a, b) , неверно. ◀

III*. Признаки линейной зависимости и линейной независимости функций.

Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ непрерывны на промежутке (a, b) и имеют там непрерывные производные всех порядков до $(n-1)$ -го порядка включительно. Составим определитель:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Этот определитель называют *вронскианом* (или *определителем Вронского*), составленным для функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ в промежутке (a, b) , и обозначают $W(x)$, $x \in (a, b)$, или $W(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$.

Теорема (необходимый признак линейной зависимости функций). Если функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — линейно зависимые в промежутке (a, b) , то во всем этом промежутке их вронсиан $W(x) = 0$.

► Так как функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — линейно зависимые в промежутке (a, b) , то существуют постоянные числа $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, среди которых есть отличные от нуля, такие, что во всем промежутке (a, b) имеет место тождество:

$$\gamma_1 y_1(x) + \gamma_2 y_2(x) + \dots + \gamma_n y_n(x) = 0, x \in (a, b). \quad (11)$$

Тождество (11) продифференцируем по x последовательно $(n-1)$ раз. В результате для любого $x_0 \in (a, b)$ будем иметь

[illegible]

(12) — линейная однородная (алгебраическая) система относительно $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. У нас среди $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ есть отличные от нуля. Следовательно, числа $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ дают решение системы (12), отличное от чисто нулевого. Но линейная однородная система

может иметь решения, отличные от чисто нулевого, лишь тогда, когда ее определитель равен нулю, т. е. когда $W(x_0) = 0$. ($W(x_0)$ есть определитель системы (12)). Так как точка x_0 — любая из промежутка (a, b) , то приходим к выводу, что $W(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$, т. е. $W(x) \equiv 0$, $x \in (a, b)$. ◀

Следствие (достаточный признак линейной независимости функций). Если в промежутке (a, b) имеется хотя бы одна точка x_0 , такая, что $W(x_0) = W(y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_n(x_0)) \neq 0$, то функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — линейно независимые в (a, b) .

► Рассуждаем от противного. Допустим, что функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — линейно зависимые в (a, b) . Но тогда, по доказанной теореме, должно быть: $W(x) \equiv 0$, $x \in (a, b)$, откуда, в частности, $W(x_0) = 0$, а это не так. ◀

Замечание. В общем случае теорема необратима. Именно, из того, что $W(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \equiv 0$, $x \in (a, b)$, не следует, что функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — линейно зависимые в (a, b) . Чтобы убедиться в этом, рассмотрим *пример*. Пусть

$$y_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^2, & x > 0; \end{cases} \quad y_2(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \quad \text{Имеем}$$

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \equiv 0, x \in (-\infty, +\infty)$$

(так как, если $x \leq 0$, то $y_1(x) = 0$; если $x > 0$, то $y_2(x) = 0$). Рассмотрим тождество

$$\gamma_1 y_1(x) + \gamma_2 y_2(x) \equiv 0, x \in (a, b). \quad (13)$$

Если $x \leq 0$, то тождество (13) выполняется лишь при $\gamma_2 = 0$. Если $x > 0$, то тождество (13) выполняется лишь при $\gamma_1 = 0$. Следовательно, для $x \in (-\infty, +\infty)$ тождество (13) имеет место лишь тогда, когда $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. А это означает, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — линейно независимые на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Покажем, что в случае, когда функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ являются решениями линейного однородного уравнения $L(y) = 0$, справедлива обратная и притом более сильная теорема.

Теорема (достаточный признак линейной зависимости n решений уравнения $L(y) = 0$). Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ есть решения линейного однородного уравнения $L(y) = 0$ в промежутке (a, b) . Тогда, если хотя бы в одной точке $x_0 \in (a, b)$ определитель Вронского, составленный для этих решений, равен нулю (т. е. $W(x_0) = 0$), то $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — линейно зависимые в (a, b) (и, следовательно, по предыдущей теореме: $W(x) \equiv 0, x \in (a, b)$).

► Рассмотрим следующую линейную однородную систему относительно неизвестных $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 y_1(x_0) + \gamma_2 y_2(x_0) + \dots + \gamma_n y_n(x_0) = 0, \\ \gamma_1 y'_1(x_0) + \gamma_2 y'_2(x_0) + \dots + \gamma_n y'_n(x_0) = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \gamma_1 y^{(n-1)}_1(x_0) + \gamma_2 y^{(n-1)}_2(x_0) + \dots + \gamma_n y^{(n-1)}_n(x_0) = 0. \end{array} \right. \quad (14)$$

Определителем системы (14) является как раз $W(x_0)$. Он по условию равен нулю. Но тогда система (14) имеет решения, отличные от чисто нулевого. Возьмем одно из таких решений: $\gamma_1^*, \gamma_2^*, \dots, \gamma_n^*$ (среди этих чисел есть отличные от нуля). Рассмотрим функцию

$$y = \gamma_1^* y_1(x) + \gamma_2^* y_2(x) + \dots + \gamma_n^* y_n(x). \quad (15)$$

Так как $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — решения уравнения $L(y) = 0$, то функция (15) также является решением этого уравнения. В силу соотношений (14), решение (15) удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$y|_{x=x_0} = \gamma_1^* y_1(x_0) + \gamma_2^* y_2(x_0) + \dots + \gamma_n^* y_n(x_0) = 0,$$

$$y'|_{x=x_0} = \gamma_1^* y_1'(x_0) + \gamma_2^* y_2'(x_0) + \dots + \gamma_n^* y_n'(x_0) = 0,$$

$$\dots$$

$$y^{(n-1)}|_{x=x_0} = \gamma_1^* y_1^{(n-1)}(x_0) + \gamma_2^* y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + \gamma_n^* y_n^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Видим, что решение (15) удовлетворяет нулевым начальным условиям:

$$y|_{x=x_0} = 0, \quad y'|_{x=x_0} = 0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0} = 0. \quad (16)$$

Заметим, что функция $y \equiv 0$, $x \in (a, b)$, также является решением уравнения $L(y) = 0$, удовлетворяющим начальным условиям (16). Но, в силу теоремы существования и единственности решения, существует только одно решение уравнения $L(y) = 0$, удовлетворяющее начальным условиям (16). Отсюда заключаем, что всюду в (a, b) должно быть:

$$y = \gamma_1^* y_1(x) + \gamma_2^* y_2(x) + \dots + \gamma_n^* y_n(x) \equiv 0. \quad (17)$$

Так как в (17) среди чисел γ_1^* , γ_2^* , ..., γ_n^* есть отличные от нуля, то это означает, что функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ — линейно зависимые в (a, b) . ◀

Следствие (необходимый признак линейной независимости n решений уравнения $L(y) = 0$). Если решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ линейного однородного уравнения $L(y) = 0$ — линейно независимые в промежутке (a, b) , то определитель Вронского, составленный для этих решений, не обращается в нуль ни в одной точке из промежутка (a, b) (т. е. $W(x) \neq 0$ при любом x из (a, b)).

► Действительно, если бы в промежутке (a, b) существовала хотя бы одна точка x_0 , такая, что $W(x_0) = 0$, то по доказанной теореме решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ были бы линейно зависимыми в (a, b) , а это не так. ◀

IV°. Существование фундаментальной системы решений линейного однородного уравнения.

Определение. Если решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ уравнения $L(y) = 0$ — линейно независимые в промежутке (a, b) , то говорят, что они образуют фундаментальную систему решений уравнения $L(y) = 0$ в (a, b) .

Покажем, что фундаментальная система решений у линейного однородного уравнения $L(y) = 0$ всегда существует.

► В самом деле, введем в рассмотрение матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

в которой числа a_{ik} ($i, k = \overline{1, n}$) — произвольные, но такие, что $\det A \neq 0$ (т. е. матрица A — неособенная). Возьмем произвольный столбец матрицы A (например, первый) и точку $x_0 \in (a, b)$. Пусть $y = y_1(x)$ — такое решение уравнения $L(y) = 0$, которое удовлетворяет начальным условиям:

$$y|_{x=x_0} = a_{11}, y'|_{x=x_0} = a_{21}, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = a_{n1}.$$

Затем берем второй столбец матрицы A . Пусть $y = y_2(x)$ — решение уравнения $L(y) = 0$, такое, которое удовлетворяет начальным условиям:

$$y|_{x=x_0} = a_{12}, y'|_{x=x_0} = a_{22}, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = a_{n2} \text{ и т. д.}$$

Берем, наконец, n -й столбец матрицы A . Пусть $y = y_n(x)$ — решение уравнения $L(y) = 0$, такое, которое удовлетворяет начальным условиям:

$$y|_{x=x_0} = a_{1n}, y'|_{x=x_0} = a_{2n}, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = a_{nn}.$$

Получим, таким образом, n решений уравнения $L(y) = 0$: $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, таких, для которых $W(x_0) = \det A \neq 0$. Следовательно, решения $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — линейно независимые, а значит, образуют фундаментальную систему решений уравнения $L(y) = 0$. ◀

§6. Теорема о составлении общего решения линейного однородного уравнения n -го порядка

Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ образуют в промежутке (a, b) фундаментальную систему решений уравнения:

$$L(y) = 0. \quad (1)$$

Тогда функция

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad (2)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ — произвольные постоянные, является общим решением уравнения (1).

► Убедимся, что функция (2) удовлетворяет определению общего решения (1). Для этого продифференцируем по x функцию (2) последовательно $(n-1)$ раз. Будем иметь

$$\begin{cases} y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x), \\ y' = C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) + \dots + C_n y_n'(x), \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)}(x) + C_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x). \end{cases} \quad (3)$$

Возьмем любую точку $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$ в области

$$(D) = \begin{cases} a < x < b, \\ -\infty < y < +\infty, \\ -\infty < y' < +\infty, \\ \dots\dots\dots \\ -\infty < y^{(n-1)} < +\infty. \end{cases} \quad \text{Положим в (3): } x = x_0, y = y_0, y' = y_0', \dots,$$

$y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$. Получим систему относительно неизвестных $C_1, C_2, \dots, C_n$:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = y_0', \\ \dots\dots\dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \quad (4)$$

Определителем системы (4) является вронскиан для $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, вычисленный в точке x_0 , т. е. $W(x_0)$.

По условию функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1). Следовательно, всюду в промежутке (a, b) : $W(x) \neq 0$. В частности, $W(x_0) \neq 0$. А тогда, как мы знаем, у системы (4) существует, и притом единственное, решение: $C_1 = C_{10}, C_2 = C_{20}, \dots, C_n = C_{n0}$. Таким образом, выполнен первый пункт определения общего решения уравнения (1). Подставим $C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0}$ вместо $C_1, C_2, \dots, C_n$ в (2). Получим

$$y = C_{10} y_1(x) + C_{20} y_2(x) + \dots + C_{n0} y_n(x). \quad (5)$$

Функция (5) есть линейная комбинация, составленная из решений уравнения (1). Следовательно, она является решением уравнения (1). Видим, что выполнен и второй пункт определения

общего решения. Значит, функция (2) удовлетворяет определению общего решения уравнения (1). ◀

Следствие. Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ образуют в промежутке (a, b) фундаментальную систему решений уравнения (1). Пусть $y = \varphi(x)$ — произвольное решение уравнения (1). Тогда обязательно существуют числа $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_n^{(0)}$, такие, что

$$\varphi(x) = C_1^{(0)} y_1(x) + C_2^{(0)} y_2(x) + \dots + C_n^{(0)} y_n(x), x \in (a, b).$$

► Составим из решений $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ общее решение (2) уравнения $L(y) = 0$ (т. е. функцию (2)). Продифференцируем по x функцию (2) $(n-1)$ раз, получим систему (3). В промежутке (a, b) возьмем какую-нибудь точку x_0 и вычислим в этой точке значения решения $y = \varphi(x)$ и производные этого решения до порядка $(n-1)$ включительно. Обозначим

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y'_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (*)$$

Подставим числа $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ в систему (3). Получим систему (4) относительно $C_1, C_2, \dots, C_n$. Система (4) однозначно разрешима. Пусть $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_n^{(0)}$ — решение системы (4). Составим функцию

$$y = \varphi_0(x) = C_1^{(0)} y_1(x) + C_2^{(0)} y_2(x) + \dots + C_n^{(0)} y_n(x). \quad (5')$$

Функция $y = \varphi_0(x)$ является решением уравнения (1), удовлетворяющим начальным условиям (*). Но этим же начальным условиям удовлетворяет и решение $y = \varphi(x)$ (т. е. то произвольное решение уравнения (1), о котором говорится в условии следствия).

По теореме существования и единственности решения задачи Коши существует интервал (α, β) , содержащий точку x_0 и содержащийся в промежутке (a, b) , такой, что $\varphi(x) \equiv \varphi_0(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$. Можно доказать, что $(\alpha, \beta) = (a, b)$. А тогда будем иметь: $\varphi(x) \equiv \varphi_0(x)$, $x \in (a, b)$. Но для $\varphi_0(x)$ справедлива формула (5'). Следовательно, и для функции $y = \varphi(x)$ справедливо представление

$$y = \varphi(x) = C_1^{(0)} y_1(x) + C_2^{(0)} y_2(x) + \dots + C_n^{(0)} y_n(x), x \in (a, b). \quad \blacktriangleleft$$

§7. Линейные неоднородные уравнения n -го порядка

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение n -го порядка:

$$L(y) = q(x). \quad (1)$$

Уравнение

$$L(y) = 0 \quad (2)$$

условимся называть линейным однородным уравнением, соответствующим линейному неоднородному уравнению (1), если в (1) и (2) оператор L один и тот же.

1°. Теорема (о составлении общего решения линейного неоднородного уравнения). Пусть $\tilde{y}(x)$ — какое-нибудь решение линейного неоднородного уравнения (1) в промежутке (a, b) и пусть

$$\bar{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

— общее решение линейного однородного уравнения (2), соответствующего уравнению (1) ($y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (2) в промежутке (a, b)). Тогда функция

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) \quad (3)$$

является общим решением уравнения (1).

► Так как $\tilde{y}(x)$ — решение уравнения (1) в промежутке (a, b) , то

$$L(\tilde{y}(x)) = q(x), x \in (a, b).$$

Так как $\bar{y}(x)$ — решение уравнения (2) в промежутке (a, b) , то

$$L(\bar{y}(x)) = 0, x \in (a, b).$$

Имеем

$$L(\bar{y}(x) + \tilde{y}(x)) = \underbrace{L(\bar{y}(x))}_{=0, x \in (a, b)} + \underbrace{L(\tilde{y}(x))}_{=q(x), x \in (a, b)} = q(x), x \in (a, b).$$

Значит, функция (3): $y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x)$ является решением уравнения (1). Мы докажем, что функция (3) является общим решением уравнения (1), если покажем, что из (3) можно получить любое частное решение уравнения (1), удовлетворяющее любым начальным условиям вида

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \quad (4)$$

(В (4) x_0 — любое из (a, b) , а $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — вообще любые числа.) Продифференцируем функцию (3) по x последовательно $(n-1)$ раз. Будем иметь

$$\begin{cases} y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) + \tilde{y}(x), \\ y' = C_1 y'_1(x) + C_2 y'_2(x) + \dots + C_n y'_n(x) + \tilde{y}'(x), \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)}(x) + C_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x) + \tilde{y}^{(n-1)}(x). \end{cases} \quad (5)$$

Подставим в (5) начальные условия (4). Получим

$$\begin{cases} y_0 = \tilde{y}(x_0) + C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0), \\ y'_0 = \tilde{y}'(x_0) + C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) + \dots + C_n y'_n(x_0), \\ \dots\dots\dots \\ y_0^{(n-1)} = \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) + C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0). \end{cases} \quad (6)$$

(6) — линейная система относительно $C_1, C_2, \dots, C_n$. Определителем этой системы является вронскиан для $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, вычисленный в точке x_0 , т. е. $W(x_0)$. У нас $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (2) в промежутке (a, b) . Следовательно, всюду в (a, b) : $W(x) \neq 0$. В частности, $W(x_0) \neq 0$. А тогда система (6) имеет, и притом единственное, решение: $C_1 = C_{10}, C_2 = C_{20}, \dots, C_n = C_{n0}$.

Подставив $C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0}$ вместо $C_1, C_2, \dots, C_n$ в (3), получим искомое частное решение уравнения (1). ◀

2°. Теорема (принцип суперпозиции решений). Пусть линейное неоднородное дифференциальное уравнение n -го порядка имеет вид

$$L(y) = q_1(x) + q_2(x) + \dots + q_m(x). \quad (7)$$

Пусть

$$\tilde{y}_1(x) \text{ есть решение уравнения: } L(y) = q_1(x), \quad (7_1)$$

$$\tilde{y}_2(x) \text{ есть решение уравнения: } L(y) = q_2(x), \quad (7_2)$$

.....

$$\tilde{y}_m(x) \text{ есть решение уравнения: } L(y) = q_m(x) \quad (7_m)$$

(заметим, что в уравнениях $(7_1) - (7_m)$ оператор L один и тот же). Тогда функция

$$\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) + \dots + \tilde{y}_m(x) \quad (8)$$

является решением уравнения (7).

► По условию: $L(\tilde{y}_1(x)) \equiv q_1(x)$, $x \in (a, b)$; $L(\tilde{y}_2(x)) \equiv q_2(x)$, $x \in (a, b)$; ...; $L(\tilde{y}_m(x)) \equiv q_m(x)$, $x \in (a, b)$. Имеем

$$\begin{aligned} L(\tilde{y}(x)) &= L(\tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) + \dots + \tilde{y}_m(x)) = \\ &= L(\tilde{y}_1(x)) + L(\tilde{y}_2(x)) + \dots + L(\tilde{y}_m(x)) \equiv \\ &\equiv q_1(x) + q_2(x) + \dots + q_m(x), x \in (a, b). \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что функция (8) является решением уравнения (7). ◀

3°. Метод вариации произвольных постоянных для нахождения решения $\tilde{y}(x)$ линейного неоднородного уравнения.

Пусть имеется линейное неоднородное уравнение

$$L(y) = q(x). \quad (9)$$

Пусть известна фундаментальная система решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ линейного однородного уравнения $L(y) = 0$, соответствующего неоднородному уравнению (9). Тогда общее решение однородного уравнения $L(y) = 0$ будет таким:

$$\bar{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad (10)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ — произвольные постоянные.

Станем искать решение $\tilde{y}(x)$ неоднородного уравнения (9) в виде

$$\tilde{y}(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \dots + C_n(x) y_n(x), \quad (11)$$

где $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ — неизвестные функции, которые мы должны подобрать так, чтобы функция (11) оказалась решением уравнения (9). (Формула (11) имеет такой же вид, как и общее решение соответствующего однородного уравнения, только в (11) $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ — функции.)

О том, что такие функции подобрать можно, утверждает теорема:

Если $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ являются функциями, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) + \dots + C_n'(x) y_n(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) + \dots + C_n'(x) y_n'(x) = 0, \\ \dots \\ C_1'(x) y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x) y_2^{(n-2)}(x) + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x) y_2^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = q(x), \end{cases} \quad (12)$$

то функция (11) будет решением неоднородного уравнения (9).

► Отметим, что система (12) — линейная относительно $C'_1(x), C'_2(x), \dots, C'_n(x)$. Определителем этой системы является вронскиан $W(x)$, составленный для функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$. Так как эти функции линейно независимы в промежутке (a, b) , то $W(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке из (a, b) . Поэтому у системы (12) существует, и притом единственное, решение.

Решая систему (12), мы получим

$$C'_1(x) = \psi_1(x), C'_2(x) = \psi_2(x), \dots, C'_n(x) = \psi_n(x),$$

где $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$ — вполне определенные функции, откуда находим

$$C_1(x) = \int \psi_1(x) dx, C_2(x) = \int \psi_2(x) dx, \dots, C_n(x) = \int \psi_n(x) dx. \quad (13)$$

Заметим, что произвольные постоянные, которые получаются при вычислении интегралов (13), можно считать равными нулю.

Покажем теперь, что функция (11), где в качестве $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ взяты их выражения из (13), является решением уравнения (9).

В самом деле, имеем, принимая во внимание (12):

$$\begin{array}{l|l} p_n(x) \cdot & \tilde{y} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \dots + C_n(x)y_n(x), \\ p_{n-1}(x) \cdot & \tilde{y}' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + \dots + C_n(x)y_n'(x) + 0, \\ +p_{n-2}(x) \cdot & \tilde{y}'' = C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + \dots + C_n(x)y_n''(x) + 0, \\ \dots & \\ p_1(x) \cdot & \tilde{y}^{(n-1)} = C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2(x)y_2^{(n-1)}(x) + \dots + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x) + 0, \\ 1 \cdot & \tilde{y}^{(n)} = C_1(x)y_1^{(n)}(x) + C_2(x)y_2^{(n)}(x) + \dots + C_n(x)y_n^{(n)}(x) + q(x), \\ \hline & L(\tilde{y}(x)) = C_1(x)L(y_1(x)) + C_2(x)L(y_2(x)) + \dots + C_n(x)L(y_n(x)) + q(x). \end{array} \quad (14)$$

У нас функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ являются решениями линейного однородного уравнения $L(y) = 0$. Поэтому $L(y_1(x)) = 0, x \in (a, b); L(y_2(x)) = 0, x \in (a, b); \dots; L(y_n(x)) = 0, x \in (a, b)$. А тогда из (14) получаем

$$L(\tilde{y}(x)) = L(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \dots + C_n(x)y_n(x)) = q(x), \\ x \in (a, b).$$

Значит, функция $\tilde{y}(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \dots + C_n(x)y_n(x)$ является решением линейного неоднородного уравнения (9). ◀

§8. О комплексных решениях линейного однородного уравнения

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — вещественные функции вещественного аргумента x , определенные в промежутке (a, b) . Тогда функция $f(x) = u(x) + iv(x)$, $x \in (a, b)$, где i — мнимая единица, называется *комплексной функцией вещественного аргумента x* .

1) Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x_0 \in (a, b)$, если в этой точке непрерывны функции $u(x)$ и $v(x)$.

2) Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке $x_0 \in (a, b)$, если в этой точке дифференцируемы функции $u(x)$ и $v(x)$. При этом имеет место формула $f'(x_0) = u'(x_0) + iv'(x_0)$.

3) Справедливы следующие формулы:

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x, e^{-i\beta x} = \cos \beta x - i \sin \beta x \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos \beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \sin \beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}$$

(это — так называемые *формулы Эйлера*).

4) Покажем, что показательная функция $e^{\lambda x}$, где $\lambda = \alpha + i\beta$ (α и β — действительные числа), дифференцируется по прежнему правилу:

$$(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}.$$

В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} (e^{\lambda x})'_x &= (e^{\alpha x + i\beta x})'_x = [e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)]'_x = \\ &= (e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x)'_x = (e^{\alpha x} \cos \beta x)'_x + i (e^{\alpha x} \sin \beta x)'_x = \\ &= (\alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x) + i(\alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x) = \\ &= \alpha e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) + i\beta e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) = \\ &= \alpha e^{\alpha x} e^{i\beta x} + i\beta e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{(\alpha + i\beta)x} (\alpha + i\beta) = \lambda e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

5) Пусть $f(x) = u(x) + iv(x)$ — произвольная комплексная функция вещественного аргумента, непрерывно дифференцируемая на промежутке (a, b) n раз. Оператор

$$L(\dots) = (\dots)^{(n)} + p_1(x)(\dots)^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)(\dots)' + p_n(x)(\dots)$$

определен для такой функции $f(x)$ и по-прежнему обладает свойствами линейности:

$$1. L(f(x)) = L(u(x)) + iL(v(x));$$

$$2. L(C \cdot f(x)) = C \cdot L(f(x)).$$

Если $L(f(x)) = L(u(x) + iv(x)) \equiv 0$, $x \in (a, b)$, то $f(x) = u(x) + iv(x)$ — решение линейного однородного уравнения $L(y) = 0$.

6) Для комплексных функций вещественного аргумента

$$f_1(x) = u_1(x) + iv_1(x), f_2(x) = u_2(x) + iv_2(x), \dots, f_n(x) = u_n(x) + iv_n(x)$$

справедливы признаки линейной зависимости и линейной независимости, установленные ранее для вещественных функций вещественного аргумента. Если $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ являются линейно независимыми решениями уравнения $L(y) = 0$ в (a, b) , то говорят, что они образуют фундаментальную систему решений этого уравнения в промежутке (a, b) .

7) Пусть имеется линейное однородное дифференциальное уравнение с вещественными коэффициентами:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

$$(\text{т. е. } L(y) = 0),$$

где $p_1(x), p_2(x), \dots, p_{n-1}(x), p_n(x)$ — вещественные функции аргумента x . Пусть $f(x) = u(x) + iv(x)$, где $u(x), v(x)$ — вещественные функции аргумента x , является решением уравнения $L(y) = 0$, т. е. $L(u(x) + iv(x)) \equiv 0$, $x \in (a, b)$. Тогда функции $u(x)$ и $v(x)$ (каждая в отдельности) являются решениями уравнения $L(y) = 0$.

► В самом деле, из тождества $L(u(x) + iv(x)) \equiv 0$, $x \in (a, b)$, вытекает, что $L(u(x)) + iL(v(x)) \equiv 0$, $x \in (a, b)$. При наших условиях оба выражения $L(u(x))$ и $L(v(x))$ представляют собой вещественные функции аргумента x . Поэтому последнее тождество имеет место лишь тогда, когда одновременно $L(u(x)) \equiv 0$, $x \in (a, b)$, и $L(v(x)) \equiv 0$, $x \in (a, b)$. А это означает, что каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$ является решением уравнения $L(y) = 0$. ◀

8) **Теорема** (о комплексной фундаментальной системе решений линейного однородного уравнения n -го порядка). Пусть имеется линейное однородное дифференциальное уравнение n -го порядка с вещественными коэффициентами $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$:

$$L(y) = 0. \quad (1)$$

Пусть уравнение (1) допускает следующую фундаментальную систему решений:

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x) \pm i\varphi_2(x), \\ &\varphi_3(x) \pm i\varphi_4(x), \\ &\dots \\ &\varphi_{2m-1}(x) \pm i\varphi_{2m}(x), \\ &\varphi_{2m+1}(x), \\ &\dots \\ &\varphi_n(x), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{2m}(x), \varphi_{2m+1}(x), \dots, \varphi_n(x)$ — вещественные функции вещественного аргумента x . Тогда функции

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{2m}(x), \varphi_{2m+1}(x), \dots, \varphi_n(x) \quad (3)$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (1).

► Обозначим

$$\psi_1(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x), \quad \psi_2(x) = \varphi_1(x) - i\varphi_2(x);$$

$$\psi_3(x) = \varphi_3(x) + i\varphi_4(x), \quad \psi_4(x) = \varphi_3(x) - i\varphi_4(x);$$

.....

.....

$$\psi_{2m-1}(x) = \varphi_{2m-1}(x) + i\varphi_{2m}(x), \quad \psi_{2m}(x) = \varphi_{2m-1}(x) - i\varphi_{2m}(x).$$

Тогда

$$\varphi_1(x) = \frac{\psi_1(x) + \psi_2(x)}{2}, \quad \varphi_2(x) = \frac{\psi_1(x) - \psi_2(x)}{2i};$$

$$\varphi_3(x) = \frac{\psi_3(x) + \psi_4(x)}{2}, \quad \varphi_4(x) = \frac{\psi_3(x) - \psi_4(x)}{2i};$$

.....

.....

$$\varphi_{2m-1}(x) = \frac{\psi_{2m-1}(x) + \psi_{2m}(x)}{2}, \quad \varphi_{2m}(x) = \frac{\psi_{2m-1}(x) - \psi_{2m}(x)}{2i}. \quad (4)$$

Из функций (3) составим линейную комбинацию и подчиним ее условию

$$\begin{aligned} &\gamma_1\varphi_1(x) + \gamma_2\varphi_2(x) + \dots + \gamma_{2m-1}\varphi_{2m-1}(x) + \gamma_{2m}\varphi_{2m}(x) + \\ &+ \gamma_{2m+1}\varphi_{2m+1}(x) + \dots + \gamma_n\varphi_n(x) \equiv 0, x \in (a, b). \end{aligned} \quad (5)$$

Если принять во внимание соотношения (4), то тождество (5) примет вид

$$\frac{\gamma_1 - i\gamma_2}{2} \psi_1(x) + \frac{\gamma_1 + i\gamma_2}{2} \psi_2(x) + \dots + \frac{\gamma_{2m-1} - i\gamma_{2m}}{2} \psi_{2m-1}(x) +$$

$$+ \frac{\gamma_{2m-1} + i\gamma_{2m}}{2} \psi_{2m}(x) + \gamma_{2m+1} \varphi_{2m+1}(x) + \dots + \gamma_n \varphi_n(x) \equiv 0, x \in (a, b).$$

По условию функции $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_{2m}(x), \varphi_{2m+1}(x), \dots, \varphi_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1). Но тогда

$$\gamma_1 - i\gamma_2 = 0, \gamma_1 + i\gamma_2 = 0, \dots, \gamma_{2m-1} - i\gamma_{2m} = 0,$$

$$\gamma_{2m-1} + i\gamma_{2m} = 0, \gamma_{2m+1} = 0, \dots, \gamma_n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0, \dots, \gamma_{2m-1} = 0, \gamma_{2m} = 0, \gamma_{2m+1} = 0, \dots, \gamma_n = 0.$$

А тогда из тождества (5) следует, что функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ — линейно независимые в (a, b) . ◀

§9. Линейные однородные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами

Пусть дано уравнение

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (1)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — постоянные вещественные числа. Коэффициенты уравнения (1), если их рассматривать как функции от x , определены и непрерывны на промежутке $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, областью существования и единственности решений уравнения (1) будет:

$$(D) = \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ -\infty < y < +\infty, \\ -\infty < y' < +\infty, \\ \dots\dots\dots \\ -\infty < y^{(n-1)} < +\infty. \end{cases}$$

Поставим себе задачу: построение фундаментальной системы решений для уравнения (1).

Станем искать решение уравнения (1) в виде

$$y = e^{\lambda x}, \quad (2)$$

где $\lambda = \alpha + i\beta$ — комплексное число; x — независимая вещественная переменная. Подставив (2) в левую часть уравнения (1), получим

$$L(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n). \quad (3)$$

Из (3) ясно, что $L(e^{\lambda x}) = 0$ тогда и только тогда, когда λ является корнем уравнения

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (4)$$

Многочлен $\varphi(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$ называют *характеристическим многочленом* уравнения (1), а его корни — *характеристическими числами* уравнения (1). Заметим, что если λ_0 — характеристическое число уравнения (1), то функция $e^{\lambda_0 x}$ — решение уравнения (1).

Возможны следующие два случая: 1 случай — все корни характеристического уравнения (4) — простые; 2 случай — среди корней характеристического уравнения (4) имеются кратные. Обсудим оба эти случая подробнее.

1 случай. Все корни характеристического уравнения (4): $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — различные числа (вещественные или комплексные). В этом случае сразу получаем n различных решений уравнения (1):

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}. \quad (5)$$

Функции (5) — линейно независимые в любом промежутке (это было показано ранее, см. §5, пример 2). Значит, они образуют фундаментальную систему решений уравнения $L(y) = 0$.

а) Если оказывается, что все корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — вещественные числа, то все решения (5) вещественные. Функция

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}, \quad (6)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ — произвольные постоянные, есть общее решение уравнения (1). Это следует из теоремы о составлении общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка. (Общее решение уравнения (1) получается как линейная комбинация n вещественных решений этого уравнения.)

б) Среди корней характеристического уравнения имеются комплексные. Пусть, например,

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \alpha_1 \pm i\beta_1, \lambda_{3,4} = \alpha_2 \pm i\beta_2, \dots, \lambda_{2m-1,2m} = \\ &= \alpha_m \pm i\beta_m, \lambda_{2m+1}, \lambda_{2m+2}, \dots, \lambda_n. \end{aligned}$$

(У нас характеристический многочлен $\varphi(\lambda)$ есть полином с вещественными коэффициентами. Поэтому, если $\lambda = \alpha + i\beta$ есть корень характеристического уравнения, то и $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ является

корнем этого уравнения. Здесь предполагается, что $\lambda_{2m+1}, \lambda_{2m+2}, \dots, \lambda_n$ — вещественные корни уравнения $\varphi(\lambda) = 0$.) Следовательно, уравнение (1) допускает в этом случае следующую фундаментальную систему решений:

$$e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x \pm i e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, \\ e^{\alpha_2 x} \cos \beta_2 x \pm i e^{\alpha_2 x} \sin \beta_2 x, \dots, e^{\alpha_m x} \cos \beta_m x \pm i e^{\alpha_m x} \sin \beta_m x, \\ e^{\lambda_{2m+1} x}, e^{\lambda_{2m+2} x}, \dots, e^{\lambda_n x}.$$

А тогда по теореме о комплексной фундаментальной системе решений (см. §8, пункт 8) заключаем, что функции

$$e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, e^{\alpha_2 x} \cos \beta_2 x, e^{\alpha_2 x} \sin \beta_2 x, \dots, \\ e^{\alpha_m x} \cos \beta_m x, e^{\alpha_m x} \sin \beta_m x, e^{\lambda_{2m+1} x}, e^{\lambda_{2m+2} x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (1). Подчеркнем, что все эти решения — вещественные функции вещественного аргумента x .

ФУНКЦИЯ

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x + \tilde{C}_1 e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x + C_2 e^{\alpha_2 x} \cos \beta_2 x + \\ + \tilde{C}_2 e^{\alpha_2 x} \sin \beta_2 x + \dots + C_m e^{\alpha_m x} \cos \beta_m x + \tilde{C}_m e^{\alpha_m x} \sin \beta_m x + \\ + C_{m+1} e^{\lambda_{2m+1} x} + C_{m+2} e^{\lambda_{2m+2} x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}, \quad (7)$$

где $C_1, \tilde{C}_1, C_2, \tilde{C}_2, \dots, C_m, \tilde{C}_m, C_{2m+1}, C_{2m+2}, \dots, C_n$ — произвольные постоянные, есть общее решение уравнения (1).

2 случай. Среди корней характеристического уравнения $\varphi(\lambda) = 0$ имеются кратные. Пусть полный список корней уравнения $\varphi(\lambda) = 0$ такой:

λ_1 — корень кратности n_1 ($n_1 \geq 1$),

λ_2 — корень кратности n_2 ($n_2 \geq 1$),

• • • • •

λ_m — корень кратности n_m ($n_m \geq 1$)

($1 \leq m < n$; среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ нет одинаковых, и $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$). Ясно, что функции $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_m x}$ — решения уравнения (1). Так как этих решений меньше, чем n , то они не образуют фундаментальную систему решений для уравнения (1) (нужно n линейно независимых решений).

Попытаемся найти еще $(n - m)$ решений уравнения (1) таких, которые вместе с функциями $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_m x}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1).

Рассмотрим один из корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, кратность которого больше или равна двум. Пусть это будет корень λ_i кратности n_i ($n_i \geq 2$). В уравнении $L(y) = 0$ сделаем замену, положив

$$y = ue^{\lambda_i x}, \quad (8)$$

где $u(x)$ — новая неизвестная функция. Будем иметь

$$\begin{array}{l|l} a_n \cdot & y = ue^{\lambda_i x} \\ a_{n-1} \cdot & y' = u\lambda_i e^{\lambda_i x} + u'e^{\lambda_i x} \\ a_{n-2} \cdot & y'' = u\lambda_i^2 e^{\lambda_i x} + 2u'\lambda_i e^{\lambda_i x} + u''e^{\lambda_i x} \\ a_{n-3} \cdot & y''' = u\lambda_i^3 e^{\lambda_i x} + 3u'\lambda_i^2 e^{\lambda_i x} + 3u''\lambda_i e^{\lambda_i x} + u'''e^{\lambda_i x} \\ \dots & \dots\dots\dots \\ 1 \cdot & y^{(n)} = u\lambda_i^n e^{\lambda_i x} + C_n^1 u'\lambda_i^{n-1} e^{\lambda_i x} + C_n^2 u''\lambda_i^{n-2} e^{\lambda_i x} + \dots + u^{(n)} e^{\lambda_i x} \end{array}$$

$$\begin{aligned} L(y) = L(ue^{\lambda_i x}) &= e^{\lambda_i x} \left[u \underbrace{(\lambda_i^n + a_1 \lambda_i^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda_i + a_n)}_{=\varphi(\lambda_i)} + \right. \\ &\quad + u' \underbrace{(n\lambda_i^{n-1} + a_1(n-1)\lambda_i^{n-2} + \dots + a_{n-2} 2\lambda_i + a_{n-1})}_{=\varphi'(\lambda_i)} + \\ &\quad + u'' \underbrace{(C_n^2 \lambda_i^{n-2} + C_{n-1}^2 \lambda_i^{n-3} a_1 + \dots + C_3^2 \lambda_i a_{n-3} + a_{n-2})}_{=\frac{\varphi''(\lambda_i)}{2!}} + u''' \frac{\varphi'''(\lambda_i)}{3!} + \\ &\quad \left. + \dots + u^{(n-1)} \frac{\varphi^{(n-1)}(\lambda_i)}{(n-1)!} + u^{(n)} \frac{\varphi^{(n)}(\lambda_i)}{n!} \right] = 0. \end{aligned}$$

После сокращения на $e^{\lambda_i x} (\neq 0)$ получаем следующее уравнение относительно функции $u(x)$:

$$\frac{\varphi^{(n)}(\lambda_i)}{n!} u^{(n)} + \frac{\varphi^{(n-1)}(\lambda_i)}{(n-1)!} u^{(n-1)} + \dots + \frac{\varphi'(\lambda_i)}{1!} u' + \varphi(\lambda_i) u = 0.$$

У нас λ_i — корень кратности n_i полинома $\varphi(\lambda)$. Это означает, что

$$\varphi(\lambda_i) = \varphi'(\lambda_i) = \dots = \varphi^{(n_i-1)}(\lambda_i) = 0, \text{ а } \varphi^{(n_i)}(\lambda_i) \neq 0.$$

Поэтому предыдущее уравнение в данном случае принимает вид

$$\frac{\varphi^{(n)}(\lambda_i)}{n!} u^{(n)} + \frac{\varphi^{(n-1)}(\lambda_i)}{(n-1)!} u^{(n-1)} + \dots + \frac{\varphi^{(n_i)}(\lambda_i)}{(n_i)!} u^{(n_i)} = 0. \quad (9)$$

Непосредственно из вида уравнения (9) следует, что функции $u_1 = 1$, $u_2 = x$, ..., $u_{n_i} = x^{n_i-1}$ являются решениями уравнения (9). Но тогда функции

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = x e^{\lambda_1 x}, \dots, y_{n_i} = x^{n_i-1} e^{\lambda_1 x} \quad (10)$$

являются решениями уравнения (1): $L(y) = 0$.

Если провести аналогичное рассмотрение для каждого из корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, то получим следующие n решений уравнения (1):

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 x}, & x e^{\lambda_1 x}, & \dots, & x^{n_1-1} e^{\lambda_1 x}, \\ e^{\lambda_2 x}, & x e^{\lambda_2 x}, & \dots, & x^{n_2-1} e^{\lambda_2 x}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{\lambda_m x}, & x e^{\lambda_m x}, & \dots, & x^{n_m-1} e^{\lambda_m x}. \end{array} \quad (11)$$

Так как $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — различные числа, то эти решения линейно независимые в любом промежутке (это было установлено ранее, см. §5, пример 4). Значит, они образуют фундаментальную систему решений уравнения $L(y) = 0$.

а) Если оказывается, что все корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — вещественные числа, то все решения (11) — вещественные функции. Общее решение уравнения (1) получается в этом случае как линейная комбинация этих n вещественных решений:

$$\begin{aligned} y = & C_1^{(1)} e^{\lambda_1 x} + C_2^{(1)} x e^{\lambda_1 x} + \dots + C_{n_1}^{(1)} x^{n_1-1} e^{\lambda_1 x} + \\ & + C_1^{(2)} e^{\lambda_2 x} + C_2^{(2)} x e^{\lambda_2 x} + \dots + C_{n_2}^{(2)} x^{n_2-1} e^{\lambda_2 x} + \\ & + \dots \dots \dots + \\ & + C_1^{(m)} e^{\lambda_m x} + C_2^{(m)} x e^{\lambda_m x} + \dots + C_{n_m}^{(m)} x^{n_m-1} e^{\lambda_m x}. \end{aligned} \quad (12)$$

б) Среди корней характеристического уравнения имеются комплексные. Пусть, например,

$$\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1 \text{ — корень кратности } n_1,$$

.....

$$\lambda_{2l-1,2l} = \alpha_l \pm i\beta_l \text{ — корень кратности } n_l,$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_{2l+1} - \text{корень кратности } n_{2l+1} \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_m - \text{корень кратности } n_m \end{array} \right\} - \text{корни вещественные}$$

(У нас характеристический многочлен $\varphi(\lambda)$ есть полином с вещественными коэффициентами. Поэтому, если $\lambda = \alpha + i\beta$ есть корень характеристического уравнения кратности k , то и $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ является корнем этого уравнения той же кратности k .) Следовательно, уравнение (1) допускает в этом случае следующую фундаментальную систему решений:

$$\begin{aligned} & e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x \pm i e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, x e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x \pm i x e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, \\ & \dots, x^{n_1-1} e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x \pm i x^{n_1-1} e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, \\ & \dots\dots\dots \\ & e^{\alpha_l x} \cos \beta_l x \pm i e^{\alpha_l x} \sin \beta_l x, x e^{\alpha_l x} \cos \beta_l x \pm i x e^{\alpha_l x} \sin \beta_l x, \\ & \dots, x^{n_l-1} e^{\alpha_l x} \cos \beta_l x \pm i x^{n_l-1} e^{\alpha_l x} \sin \beta_l x, \\ & \quad e^{\lambda_{2l+1} x}, x e^{\lambda_{2l+1} x}, \dots, x^{n_{2l+1}-1} e^{\lambda_{2l+1} x}, \\ & \quad \dots\dots\dots \\ & \quad e^{\lambda_m x}, x e^{\lambda_m x}, \dots, x^{n_m-1} e^{\lambda_m x}. \end{aligned}$$

А тогда по теореме о комплексной фундаментальной системе решений (см. §8, пункт 8) заключаем, что функции

$$\begin{aligned} & e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, x e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, x e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, \\ & \dots, x^{n_1-1} e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, x^{n_1-1} e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, \\ & \dots\dots\dots \\ & e^{\alpha_l x} \cos \beta_l x, e^{\alpha_l x} \sin \beta_l x, x e^{\alpha_l x} \cos \beta_l x, x e^{\alpha_l x} \sin \beta_l x, \\ & \dots, x^{n_l-1} e^{\alpha_l x} \cos \beta_l x, x^{n_l-1} e^{\alpha_l x} \sin \beta_l x, \\ & \quad e^{\lambda_{2l+1} x}, x e^{\lambda_{2l+1} x}, \dots, x^{n_{2l+1}-1} e^{\lambda_{2l+1} x}, \\ & \quad \dots\dots\dots \\ & \quad e^{\lambda_m x}, x e^{\lambda_m x}, \dots, x^{n_m-1} e^{\lambda_m x} \end{aligned} \tag{13}$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (1). Отметим, что все решения (13) являются вещественными функциями вещественного аргумента x . Общее решение уравнения (1) в этом случае будет таким:

$$\begin{aligned}
y = & C_1^{(1)} e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x + \tilde{C}_1^{(1)} e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x + C_2^{(1)} x e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x + \\
& + \tilde{C}_2^{(1)} x e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x + \dots + C_{n_1}^{(1)} x^{n_1-1} e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x + \tilde{C}_{n_1}^{(1)} x^{n_1-1} e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x + \dots + \\
& + C_1^{(l)} e^{\alpha_l x} \cos \beta_l x + \tilde{C}_1^{(l)} e^{\alpha_l x} \sin \beta_l x + C_2^{(l)} x e^{\alpha_l x} \cos \beta_l x + \\
& + \tilde{C}_2^{(l)} x e^{\alpha_l x} \sin \beta_l x + \dots + C_{n_l}^{(l)} x^{n_l-1} e^{\alpha_l x} \cos \beta_l x + \tilde{C}_{n_l}^{(l)} x^{n_l-1} e^{\alpha_l x} \sin \beta_l x + \\
& + C_1^{(2l+1)} e^{\lambda_{2l+1} x} + C_2^{(2l+1)} x e^{\lambda_{2l+1} x} + \dots + C_{n_{2l+1}}^{(2l+1)} x^{n_{2l+1}-1} e^{\lambda_{2l+1} x} + \dots + \\
& + C_1^{(m)} e^{\lambda_m x} + C_2^{(m)} x e^{\lambda_m x} + \dots + C_{n_m}^{(m)} x^{n_m-1} e^{\lambda_m x}.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
& C_1^{(1)}, \tilde{C}_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \tilde{C}_2^{(1)}, \dots, C_{n_1}^{(1)}, \\
& \tilde{C}_{n_1}^{(1)}, \dots, C_1^{(l)}, \tilde{C}_1^{(l)}, C_2^{(l)}, \tilde{C}_2^{(l)}, \dots, C_{n_l}^{(l)}, \tilde{C}_{n_l}^{(l)}, \\
& C_1^{(2l+1)}, C_2^{(2l+1)}, \dots, C_{n_{2l+1}}^{(2l+1)}, \dots, C_1^{(m)}, C_2^{(m)}, \dots, C_{n_m}^{(m)}
\end{aligned}$$

— произвольные постоянные. (Общее решение линейного однородного уравнения с постоянными вещественными коэффициентами получается как линейная комбинация n вещественных решений этого уравнения.)

§10. Построение частного решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$L(y) = q(x) \Leftrightarrow y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = q(x), \quad (1)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — постоянные числа. Пусть свободный член $q(x)$ уравнения (1) имеет специальный вид:

$$q(x) = e^{ax} [P_m(x) \cos bx + P_l^*(x) \sin bx], \quad (2)$$

где a и b — постоянные числа, а $P_m(x)$ и $P_l^*(x)$ — полиномы степени m и l соответственно. Тогда для нахождения частного решения $\tilde{y}(x)$ уравнения (1) можно применить так называемый метод неопределенных коэффициентов (который сводит нахождение решения $\tilde{y}(x)$ по существу к алгебраическим операциям).

дим A_0 . Подставив найденное значение A_0 во второе уравнение системы (3), находим A_1 . Затем из третьего уравнения находим A_2 , и т. д. Наконец, из последнего уравнения системы (3) найдем A_m . Найдя коэффициенты $A_0, A_1, A_2, \dots, A_m$, мы тем самым найдем частное решение $\tilde{y}(x)$ уравнения $L(y) = P_m(x)$.

Замечание. Изложенный способ доказательства является практическим способом построения решения $\tilde{y}(x)$.

2. По условию 0 является корнем кратности k характеристического уравнения (*). Это означает, что в уравнении (*)

$$a_n = 0, a_{n-1} = 0, a_{n-2} = 0, \dots, a_{n-(k-1)} = 0, \text{ но } a_{n-k} \neq 0.$$

Следовательно, исходное дифференциальное уравнение имело вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-k} y^{(k)} = P_m(x). \quad (1')$$

Видим, что в уравнение (1') не входят явно $y, y', \dots, y^{(k-1)}$. Поэтому делаем замену: $y^{(k)} = u(x)$, где $u(x)$ — новая неизвестная функция. Относительно функции $u(x)$ уравнение (1') примет вид

$$u^{(n-k)} + a_1 u^{(n-1-k)} + \dots + a_{n-k} u = P_m(x). \quad (1'')$$

Так как в уравнении (1'') $a_{n-k} \neq 0$, то мы имеем здесь дело со случаем, уже рассмотренным в пункте 1. Следовательно, уравнение (1'') имеет частное решение $\tilde{u}(x)$ вида

$$\tilde{u}(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m.$$

У нас $u(x) = y^{(k)}$. Поэтому для нахождения решения $\tilde{y}(x)$ уравнения (1') нам следует решить уравнение

$$\tilde{y}^{(k)}(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m.$$

Выражение для $\tilde{y}(x)$ мы получим в результате последовательных интегрирований k раз. Принимая во внимание, что нам нужно найти лишь какое-нибудь частное решение $\tilde{y}(x)$ уравнения (1'), мы можем произвольные постоянные, которые будут появляться при последовательных интегрированиях, считать равными нулю. А тогда для $\tilde{y}(x)$ получится следующее выражение:

$$\tilde{y}(x) = x^k (D_0 x^m + D_1 x^{m-1} + \dots + D_{m-1} x + D_m) = x^k \tilde{Q}_m(x). \quad \blacktriangleleft$$

II. Рассмотрим теперь случай, когда $q(x) = e^{ax} P_m(x)$. Этот случай получается из общего при $b = 0$, так что контрольным числом будет $a + ib = a + i0 = a$. Для этого случая имеет место теорема:

1. Если контрольное число a не является корнем характеристического уравнения $\varphi(\lambda) = 0$, т. е. уравнения

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-2} \lambda^2 + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad (*)$$

то уравнение $L(y) = e^{ax} P_m(x)$ имеет частное решение $\tilde{y}(x)$ вида

$$\tilde{y}(x) = e^{ax} Q_m(x) = e^{ax} (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m).$$

2. Если контрольное число a является корнем кратности k характеристического уравнения $(*)$, то уравнение $L(y) = e^{ax} P_m(x)$ имеет частное решение $\tilde{y}(x)$ вида

$$\tilde{y}(x) = x^k e^{ax} \tilde{Q}_m(x) = x^k e^{ax} (D_0 x^m + D_1 x^{m-1} + \dots + D_{m-1} x + D_m).$$

► В уравнении $L(y) = e^{ax} P_m(x)$ сделаем замену: $y = e^{ax} u(x)$, где $u(x)$ — новая неизвестная функция. Мы знаем, что

$$L(e^{ax} u) = e^{ax} \left[\frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!} u^{(n)} + \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} u^{(n-1)} + \dots + \frac{\varphi'(a)}{1!} u' + \varphi(a) u \right]$$

(такое выражение для $L(e^{ax} u)$ было получено нами в §9 при построении фундаментальной системы решений однородного уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами).

Сделав замену и произведя сокращение на e^{ax} , получим относительно функции $u(x)$ следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!} u^{(n)} + \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} u^{(n-1)} + \dots + \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!} u^{(k)} + \frac{\varphi^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} u^{(k-1)} + \\ + \dots + \frac{\varphi'(a)}{1!} u' + \varphi(a) u = P_m(x). \end{aligned}$$

1. Пусть число a не является корнем характеристического уравнения $(*)$, т. е. $\varphi(a) \neq 0$. Тогда, по доказанному ранее (см. случай I), полученное уравнение имеет частное решение $\tilde{u}(x) = Q_m(x)$, и, следовательно, исходное уравнение $L(y) = e^{ax} P_m(x)$ имеет частное решение

$$\tilde{y}(x) = e^{ax} \tilde{u}(x) = e^{ax} Q_m(x).$$

2. Пусть число a является корнем кратности k характеристического уравнения $(*)$. Но тогда

$$\varphi(a) = 0, \varphi'(a) = 0, \dots, \varphi^{(k-1)}(a) = 0, \varphi^{(k)}(a) \neq 0,$$

и, следовательно, преобразованное уравнение будет таким:

$$\frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!} u^{(n)} + \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} u^{(n-1)} + \dots + \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!} u^{(k)} = P_m(x).$$

А такое уравнение, по доказанному ранее (см. случай I), имеет частное решение $\tilde{u}(x) = x^k \tilde{Q}_m(x)$. Следовательно, исходное уравнение $L(y) = e^{ax} P_m(x)$ имеет частное решение

$$\tilde{y}(x) = e^{ax} \tilde{u}(x) = x^k e^{ax} \tilde{Q}_m(x). \quad \blacktriangleleft$$

III. Рассмотрим, наконец, случай, когда $q(x) = e^{ax} [P_m(x) \cos bx + P_l(x) \sin bx]$. Предполагается, что $b \neq 0$, $P_m(x)$ и $P_l(x)$ — полиномы с вещественными коэффициентами степеней m и l соответственно и такие, что $P_m^2(x) + P_l^2(x) \neq 0$. Предполагается также, что оператор L имеет вещественные коэффициенты $a_1, \dots, a_n$. Имеет место теорема.

1. Если контрольное число $a + ib$ не является корнем характеристического уравнения $\varphi(\lambda) = 0$, т. е. уравнения

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad (*)$$

то уравнение $L(y) = e^{ax} [P_m(x) \cos bx + P_l(x) \sin bx]$ имеет частное решение $\tilde{y}(x)$ вида

$$\tilde{y}(x) = e^{ax} [Q_\mu(x) \cos bx + \tilde{Q}_\mu(x) \sin bx],$$

где $Q_\mu(x)$ и $\tilde{Q}_\mu(x)$ — полиномы с вещественными коэффициентами, а $\mu = \max\{m, l\}$. (Хотя бы один из полиномов $Q_\mu(x)$, $\tilde{Q}_\mu(x)$ имеет степень μ .)

2. Если контрольное число $a + ib$ является корнем кратности k характеристического уравнения (*), то уравнение $L(y) = e^{ax} [P_m(x) \cos bx + P_l(x) \sin bx]$ имеет частное решение $\tilde{y}(x)$ вида

$$\tilde{y}(x) = x^k e^{ax} [Q_\mu(x) \cos bx + \tilde{Q}_\mu(x) \sin bx].$$

► Преобразуем правую часть уравнения $L(y) = e^{ax} [P_m(x) \cos bx + P_l(x) \sin bx]$, воспользовавшись формулами Эйлера:

$$\cos bx = \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}; \quad \sin bx = \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i} = \frac{ie^{-ibx} - ie^{ibx}}{2}.$$

Будем иметь

$$q(x) = e^{ax} \left[\underbrace{\frac{P_m(x) - iP_l(x)}{2}}_{=\Phi_\mu(x)} e^{ibx} + \underbrace{\frac{P_m(x) + iP_l(x)}{2}}_{=\bar{\Phi}_\mu(x)} e^{-ibx} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q(x) = e^{(a+ib)x} \Phi_\mu(x) + e^{(a-ib)x} \bar{\Phi}_\mu(x) = e^{\gamma x} \Phi_\mu(x) + e^{\bar{\gamma} x} \bar{\Phi}_\mu(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q(x) = q_1(x) + q_2(x), \text{ где } q_1(x) = e^{\gamma x} \Phi_\mu(x), q_2(x) = \bar{q}_1(x).$$

Значит, исходное уравнение можно переписать в виде

$$L(y) = q_1(x) + q_2(x), \text{ где } q_2(x) = \bar{q}_1(x). \quad (4)$$

Мы знаем, что если функция $\psi_1(x)$ есть решение уравнения

$$L(y) = q_1(x), \quad (4_1)$$

а функция $\psi_2(x)$ есть решение уравнения

$$L(y) = q_2(x), \quad (4_2)$$

то функция $\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$ есть решение уравнения (4).

Рассмотрим уравнение (4₁):

$$L(y) = e^{\gamma x} \Phi_\mu(x) = e^{(a+ib)x} \Phi_\mu(x).$$

(4₁) есть уравнение, рассмотренное в пункте II. А тогда:

1. Если число $\gamma = a + ib$ не является корнем характеристического уравнения (*), то уравнение (4₁) имеет частное решение вида

$$\psi_1(x) = e^{(a+ib)x} \Phi_\mu^*(x).$$

2. Если число $\gamma = a + ib$ является корнем кратности k характеристического уравнения (*), то уравнение (4₁) имеет частное решение вида

$$\psi_1(x) = x^k e^{(a+ib)x} \Phi_\mu^*(x).$$

Отметим, что $\Phi_\mu^*(x)$ — полином степени μ , т. е. той же степени, что и полином $\Phi_\mu(x)$. Так как $\Phi_\mu(x)$ имеет комплексные коэффициенты, то и $\Phi_\mu^*(x)$ имеет комплексные коэффициенты. Следовательно, $\Phi_\mu^*(x) = U_\mu(x) + iV_\mu(x)$, где $U_\mu(x)$ и $V_\mu(x)$ — полиномы с вещественными коэффициентами степени $\leq \mu$, причем хотя бы один из них имеет степень μ .

Рассмотрим теперь уравнение (4₂):

$$L(y) = e^{(a-bi)x} \bar{\Phi}_\mu(x).$$

Правая часть этого уравнения комплексно сопряжена с правой частью уравнения (4₁). Покажем, что $\psi_2(x) = \bar{\psi}_1(x)$ (здесь $\psi_2(x)$ — решение уравнения (4₂)). Представим решение $\psi_1(x)$ в виде $\psi_1(x) = \psi_{11}(x) + i\psi_{12}(x)$, где $\psi_{11}(x)$ и $\psi_{12}(x)$ — вещественные функции вещественного аргумента x . Тогда $\bar{\psi}_1(x) = \psi_{11}(x) - i\psi_{12}(x)$. Так как $\psi_1(x)$ есть решение уравнения (4₁), то

$$L(\psi_1(x)) = L(\psi_{11}(x) + i\psi_{12}(x)) \equiv L(\psi_{11}(x)) + iL(\psi_{12}(x)) \equiv q_1(x).$$

Перейдем в последнем тождестве к комплексно сопряженным величинам. Получим

$$\begin{aligned} L(\psi_{11}(x)) - iL(\psi_{12}(x)) &\equiv \bar{q}_1(x) \Leftrightarrow L(\psi_{11}(x) - i\psi_{12}(x)) \equiv q_2(x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow L(\bar{\psi}_1(x)) \equiv q_2(x) \Rightarrow \psi_2(x) = \bar{\psi}_1(x). \end{aligned}$$

Так как $\psi_1(x)$ — решение уравнения (4₁), а $\psi_2(x) (= \bar{\psi}_1(x))$ — решение уравнения (4₂), то функция

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) = \psi_1(x) + \bar{\psi}_1(x) = 2\operatorname{Re} \psi_1(x)$$

есть решения уравнения (4). Имеем

$$\begin{aligned} e^{(a+ib)x} \Phi_\mu^*(x) &= e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) (U_\mu(x) + iV_\mu(x)) \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{Re} [e^{(a+ib)x} \Phi_\mu^*(x)] &= e^{ax} (U_\mu(x) \cos bx - V_\mu(x) \sin bx). \end{aligned}$$

Поэтому:

1) Если $(a + ib)$ не является корнем характеристического уравнения (*), то уравнение $L(y) = e^{ax} [P_m(x) \cos bx + P_l(x) \sin bx]$ имеет частное решение

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x) &= 2e^{ax} [U_\mu(x) \cos bx - V_\mu(x) \sin bx] \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{y}(x) &= e^{ax} (Q_\mu(x) \cos bx + \tilde{Q}_\mu(x) \sin bx). \end{aligned}$$

Здесь $Q_\mu(x) = 2U_\mu(x)$, $\tilde{Q}_\mu(x) = -2V_\mu(x)$ — полиномы с вещественными коэффициентами.

2) Если $a + ib$ является корнем кратности k характеристического уравнения (*), то уравнение $L(y) = e^{ax} [P_m(x) \cos bx + P_l(x) \sin bx]$ имеет частное решение:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x) &= 2x^k e^{ax} [U_\mu(x) \cos bx - V_\mu(x) \sin bx] \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{y}(x) &= x^k e^{ax} (Q_\mu(x) \cos bx + \tilde{Q}_\mu(x) \sin bx). \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

§11. Уравнение Эйлера

Так называется линейное дифференциальное уравнение вида

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_1(ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(ax + b)y' + a_n y = q(x), \quad (1)$$

где $a, b, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ — постоянные числа. Видим, что (1) есть уравнение с переменными коэффициентами специального вида.

Покажем, что уравнение (1) приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замен:

1) $ax + b = e^t$, если $ax + b > 0$, и 2) $ax + b = -e^t$, если $ax + b < 0$.

Для определенности рассмотрим случай, когда $ax + b > 0$. В этом случае полагаем

$$ax + b = e^t \Rightarrow x'_t = \frac{1}{a} e^t \Rightarrow \frac{1}{x'_t} = ae^{-t}.$$

А тогда

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} \Rightarrow y'_x = y'_t ae^{-t};$$

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \frac{1}{x'_t} \Rightarrow y''_{x^2} = (y'_t ae^{-t})'_t \cdot ae^{-t} \Rightarrow y''_{x^2} = (y''_t - y'_t) a^2 e^{-2t};$$

$$\begin{aligned} y'''_{x^3} &= (y''_{x^2})'_x = (y''_{x^2})'_t \frac{1}{x'_t} \Rightarrow y'''_{x^3} = [(y''_t - y'_t) a^2 e^{-2t}]'_t ae^{-t} = \\ &= (y'''_t - 3y''_t + 2y'_t) a^3 e^{-3t}. \end{aligned}$$

Видим, что выражение для y'_x содержит множитель ae^{-t} ; выражение для y''_{x^2} содержит множитель $a^2 e^{-2t}$; выражение для y'''_{x^3} содержит множитель $a^3 e^{-3t}$. (Множители в скобках представляют собой линейные комбинации производных от функции y по переменной t .)

Предположим, что

$$y^{(k)}_{x^k} = (y^{(k)}_t + \alpha_1 y^{(k-1)}_t + \alpha_2 y^{(k-2)}_t + \dots + \alpha_{k-1} y'_t) a^k e^{-kt}, \quad (*)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$ — постоянные числа. Тогда

$$\begin{aligned} y^{(k+1)}_{x^{k+1}} &= (y^{(k)}_{x^k})'_x = (y^{(k)}_{x^k})'_t \frac{1}{x'_t} = (y^{(k)}_t)'_t ae^{-t} \Rightarrow y^{(k+1)}_{x^{k+1}} = \\ &= a^{k+1} e^{-(k+1)t} \left[(y^{(k+1)}_t + \alpha_1 y^{(k)}_t + \dots + \alpha_{k-1} y''_t) - \right. \end{aligned}$$

$$-k \left(y_t^{(k)} + \alpha_1 y_{t-1}^{(k-1)} + \dots + \alpha_{k-1} y_t' \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow y_{x^{k+1}}^{(k+1)} = a^{k+1} e^{-(k+1)t} \left(y_{t^{k+1}}^{(k+1)} + \beta_1 y_{t^k}^{(k)} + \dots + \beta_k y_t' \right),$$

где $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ — постоянные числа.

Переход от k к $k+1$ сделан. Для $k=1, 2, 3$ соотношение (*) установлено непосредственно. В силу перехода от k к $k+1$ оно верно для $k=4, 5, \dots, n$. Следовательно, будем иметь, например:

$$y_{x^n}^{(n)} = a^n e^{-nt} \left(y_{t^n}^{(n)} + \gamma_1 y_{t^{n-1}}^{(n-1)} + \dots + \gamma_{n-1} y_t' \right).$$

При подстановке найденных выражений для $y_x', y_{x^2}', \dots, y_{x^n}^{(n)}$ в уравнение (1) надлежит умножить y_x' на $a_{n-1}(ax+b) = a_{n-1}e^t$; y_{x^2}' на $a_{n-2}(ax+b)^2 = a_{n-2}e^{2t}$, ..., $y_{x^n}^{(n)}$ на $(ax+b)^n = e^{nt}$. При этом показательные множители исчезнут и мы получим линейное уравнение с постоянными коэффициентами относительно функции $y(t)$:

$$\tilde{L}(y(t)) = \tilde{q}(t).$$

§12. Примеры и задачи по теме:

“Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка”

Задача 1. Решить уравнение $y'' + y' - 2y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2.$$

Фундаментальная система решений: $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-2x}$. Следовательно, общее решение исходного уравнения будет таким:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Задача 2. Решить уравнение $y'' - 2y' = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2.$$

Фундаментальная система решений: $y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = 1$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{2x}$; $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 + C_2 e^{2x}$ — общее решение исходного уравнения.

Задача 3. Решить уравнение $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 + i, \lambda_2 = 2 - i.$$

Фундаментальная система решений: $y_1(x) = e^{2x} \cos x$, $y_2(x) = e^{2x} \sin x$; $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$ — общее решение исходного уравнения.

Задача 4. Решить уравнение $y'' + 2y' + 10y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 - 3i, \lambda_2 = -1 + 3i.$$

Фундаментальная система решений: $y_1(x) = e^{-x} \cos 3x$, $y_2(x) = e^{-x} \sin 3x$. $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{-x} \cos 3x + C_2 e^{-x} \sin 3x$ — общее решение исходного уравнения.

Задача 5. Решить уравнение $y'' + 4y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Фундаментальная система решений: $y_1(x) = \cos 2x$, $y_2(x) = \sin 2x$. $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ — общее решение исходного уравнения.

Задача 6. Решить уравнение $y''' - 8y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1 + i\sqrt{3}, \lambda_3 = -1 - i\sqrt{3}.$$

Фундаментальная система решений: $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = e^{-x} \cos(x\sqrt{3})$, $y_3(x) = e^{-x} \sin(x\sqrt{3})$;

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) = \\ = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \cos(x\sqrt{3}) + C_3 e^{-x} \sin(x\sqrt{3})$$

— общее решение исходного уравнения.

Задача 7. Решить уравнение $y^{(4)} - y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^4 - 1 = 0$; $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -i$, $\lambda_4 = i$. Фундаментальная система решений: $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^x$, $y_3(x) = \cos x$, $y_4(x) = \sin x$.

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) + C_4 y_4(x) = \\ = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

— общее решение исходного уравнения.

Задача 8. Решить уравнение $y^{(6)} + 64y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^6 + 64 = 0 \Rightarrow \lambda^6 = -2^6 \Rightarrow \lambda = 2e^{i\frac{\pi+2k\pi}{6}}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda = \sqrt{3} \pm i, \lambda = \pm 2i, \lambda = -\sqrt{3} \pm i.$$

Фундаментальная система решений:

$$e^{x\sqrt{3}} \cos x, e^{x\sqrt{3}} \sin x, \cos 2x, \sin 2x, e^{-x\sqrt{3}} \cos x, e^{-x\sqrt{3}} \sin x.$$

$$y = C_1 e^{x\sqrt{3}} \cos x + C_2 e^{x\sqrt{3}} \sin x + C_3 \cos 2x + \\ + C_4 \sin 2x + C_5 e^{-x\sqrt{3}} \cos x + C_6 e^{-x\sqrt{3}} \sin x$$

— общее решение исходного уравнения.

Задача 9. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Фундаментальная система решений: e^x, xe^x . $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$ — общее решение заданного уравнения.

Задача 10. Решить уравнение $4y'' + 4y' + y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

Фундаментальная система решений: $e^{-\frac{x}{2}}, xe^{-\frac{x}{2}}$. $y = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 x e^{-\frac{x}{2}}$ —

общее решение заданного уравнения.

Задача 11. Решить уравнение $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^5 - 6\lambda^4 + 9\lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda^3(\lambda - 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \lambda_4 = \lambda_5 = 3.$$

Фундаментальная система решений: $1, x, x^2, e^{3x}, xe^{3x}$.

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{3x} + C_5 x e^{3x}$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 12. Решить уравнение $y^{(5)} - 10y'' + 9y' = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^5 - 10\lambda^3 + 9\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^4 - 10\lambda^2 + 9) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = 3, \lambda_5 = -3.$$

Фундаментальная система решений: $1, e^x, e^{-x}, e^{3x}, e^{-3x}$.

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} + C_4 e^{3x} + C_5 e^{-3x}$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 13. Решить уравнение $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + i)^2(\lambda - i)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = i, \lambda_3 = \lambda_4 = -i.$$

Фундаментальная система решений: $\cos x, \sin x, x \cos x, x \sin x$.

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 14. Решить уравнение $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Фундаментальная система решений: $e^x, xe^x, x^2 e^x$. $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$ — общее решение заданного уравнения.

Задача 15. Решить уравнение $y''' - y'' - y' + y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1.$$

Фундаментальная система решений: $e^x, x e^x, e^{-x}$. $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x}$ — общее решение заданного уравнения.

Задача 16. Решить уравнение $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -1.$$

Фундаментальная система решений: $e^{2x}, e^{-2x}, e^x, e^{-x}$.

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^x + C_4 e^{-x}$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 17. Решить уравнение $y^{(5)} + 8y'' + 16y' = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^5 + 8\lambda^3 + 16\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 + 4)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 2i, \lambda_4 = \lambda_5 = -2i.$$

Фундаментальная система решений: $1, \cos 2x, \sin 2x, x \cos 2x, x \sin 2x$.

$$y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + C_4 x \cos 2x + C_5 x \sin 2x$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 18. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2.$$

Фундаментальная система решений: e^x, xe^x, e^{-2x} . $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-2x}$ — общее решение заданного уравнения.

Задача 19. Решить уравнение $y^{(4)} + 4y'' + 3y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i, \lambda_3 = i\sqrt{3}, \lambda_4 = -i\sqrt{3}.$$

Фундаментальная система решений: $\cos x, \sin x, \cos(x\sqrt{3}), \sin(x\sqrt{3})$.

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos(x\sqrt{3}) + C_4 \sin(x\sqrt{3})$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 20. Решить уравнение $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.

Решение. Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 2y' - 3y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$. Следовательно, общее решение однородного уравнения будет таким:

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Найдем теперь частное решение заданного неоднородного уравнения. Для этого выпишем контрольное число $a + ib$. Для заданного уравнения: $a + ib = 4 + i0 = 4$. Видим, что контрольное число не является корнем характеристического уравнения (*). Значит, заданное уравнение имеет частное решение $\tilde{y}(x)$ вида

$$\tilde{y}(x) = Ae^{4x}.$$

Имеем $\tilde{y}' = 4Ae^{4x}$, $\tilde{y}'' = 16Ae^{4x}$. Подставляем выражения для $\tilde{y}(x)$, $\tilde{y}'(x)$, $\tilde{y}''(x)$ в заданное уравнение. Получаем

$$16Ae^{4x} - 8Ae^{4x} - 3Ae^{4x} = e^{4x} \Rightarrow 5A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{5}.$$

Следовательно, $\tilde{y}(x) = \frac{1}{5}e^{4x}$. А тогда $y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{5}e^{4x}$ — общее решение заданного уравнения.

Задача 21. Решить уравнение $y'' + y = 4xe^x$.

Решение. Найдем сначала общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' + y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения будет таким:

$$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Для заданного уравнения контрольное число $a + ib = 1 + i0 = 1$. Видим, что контрольное число не является корнем характеристического уравнения (*). Значит, заданное уравнение имеет частное решение $\tilde{y}(x)$ вида $\tilde{y}(x) = (Ax + B)e^x$. Имеем

$$\tilde{y}'(x) = (Ax + B + A)e^x; \tilde{y}''(x) = (Ax + B + 2A)e^x.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}(x)$, $\tilde{y}'(x)$ в заданное уравнение. Получаем

$$(Ax + B + 2A)e^x + (Ax + B)e^x \equiv 4xe^x \Rightarrow \\ \Rightarrow 2Ax + 2B + 2A \equiv 4x \Rightarrow \begin{cases} 2A = 4, \\ 2B + 2A = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 2, B = -2.$$

Следовательно, $\tilde{y}(x) = (2x - 2)e^x$. А тогда

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (2x - 2)e^x$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 22. Решить уравнение $y'' - y = 2e^x - x^2$.

Решение. Найдем сначала общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' - y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения будет таким:

$$\bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

1. Рассматриваем уравнение $y'' - y = 2e^x$.

Контрольным числом для этого уравнения является $a + ib = 1 + i0 = 1$. Видим, что контрольное число является корнем кратности $k = 1$ характеристического уравнения (*). Значит, рассматриваемое уравнение имеет частное решение

$$\tilde{y}_1(x) = x \cdot A e^x \Rightarrow \tilde{y}_1'(x) = (Ax + A)e^x, \tilde{y}_1''(x) = (Ax + 2A)e^x.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}_1(x)$ и $\tilde{y}_1''(x)$ в уравнение $y'' - y = 2e^x$. Получаем

$$(Ax + 2A)e^x - A x e^x \equiv 2e^x \Rightarrow 2A = 2 \Rightarrow A = 1.$$

Таким образом, получили $\tilde{y}_1(x) = x e^x$.

2. Рассматриваем уравнение $y'' - y = -x^2$.

Контрольным числом для этого уравнения является $a + ib = 0 + i0 = 0$. Видим, что контрольное число не является корнем характеристического уравнения (*). Значит, рассматриваемое уравнение имеет частное решение $\tilde{y}_2(x)$ вида

$$\tilde{y}_2(x) = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow \tilde{y}_2' = 2Ax + B, \tilde{y}_2'' = 2A.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}_2(x)$ и $\tilde{y}_2''(x)$ в уравнение $y'' - y = -x^2$. Получаем

$$\begin{array}{rcl} x^2 & | & -A = -1 \Rightarrow A = 1; \\ 2A - Ax^2 - Bx - C = -x^2 & \Rightarrow & x \mid -B = 0 \Rightarrow B = 0; \\ x^0 & | & 2A - C = 0 \Rightarrow C = 2. \end{array}$$

Таким образом, получили $\tilde{y}_2(x) = x^2 + 2$.

Частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения будет, следовательно, таким:

$$\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) = xe^x + x^2 + 2.$$

А тогда

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + xe^x + x^2 + 2$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 23. Решить уравнение $y'' + y' - 2y = 3xe^x$.

Решение. Найдем сначала общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' + y' - 2y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$. Следовательно,

$$\bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Для заданного уравнения контрольное число $a + ib = 1 + i0 = 1$. Видим, что контрольное число является корнем кратности $k = 1$ характеристического уравнения (*). Значит, заданное уравнение имеет частное решения $\tilde{y}(x)$ вида

$$\tilde{y}(x) = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{y}'(x) = [Ax^2 + (2A + B)x + B]e^x,$$

$$\tilde{y}''(x) = [Ax^2 + (4A + B)x + (2A + 2B)]e^x.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}(x)$, $\tilde{y}'(x)$, $\tilde{y}''(x)$ в заданное уравнение. Получаем

$$[6Ax + (2A + 3B)]e^x = 3xe^x \Rightarrow 6Ax + (2A + 3B) = 3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \mid 6A = 3 \\ x^0 \mid 2A + 3B = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{3}.$$

Следовательно, $\bar{y}(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}\right)e^x$. А тогда $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}\right)e^x$ — общее решение заданного уравнения.

Задача 24. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = \sin x$.

Решение. Найдем сначала общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Следовательно,

$$\bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Найдем теперь частное решение $\check{y}(x)$ заданного уравнения. Для заданного уравнения контрольное число $a + ib = 0 + i1 = i$. Видим, что контрольное число не является корнем характеристического уравнения (*). Значит, заданное уравнение имеет частное решение $\check{y}(x)$ вида

$$\check{y}(x) = A \cos x + B \sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \check{y}' = -A \sin x + B \cos x, \check{y}'' = -A \cos x - B \sin x.$$

Подставляем в заданное уравнение выражения для $\check{y}, \check{y}', \check{y}''$. Получаем

$$(A - 3B) \cos x + (3A + B) \sin x = \sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \cos x \mid A - 3B = 0, \\ \sin x \mid 3A + B = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{3}{10}, B = \frac{1}{10}.$$

Следовательно, $\check{y}(x) = \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x$. А тогда

$$y = \bar{y}(x) + \check{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 25. Решить уравнение $y'' + y = 4 \sin x$.

Решение. Найдем сначала общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' + y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. Следовательно, $\bar{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Для заданного уравнения контрольное число $a + ib = 0 + i \cdot 1 = i$. Видим, что контрольное число является корнем кратности $k = 1$ характеристического уравнения (*). Значит, заданное уравнение имеет частное решение $\tilde{y}(x)$ вида

$$\begin{aligned}\tilde{y}(x) &= x(A \cos x + B \sin x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{y}' &= (A + Bx) \cos x + (B - Ax) \sin x, \\ \tilde{y}'' &= (2B - Ax) \cos x - (2A + Bx) \sin x.\end{aligned}$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}(x)$, $\tilde{y}'(x)$ в заданное уравнение. Получаем

$$2B \cos x - 2A \sin x = 4 \sin x \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \cos x \mid \quad 2B = 0 \\ \sin x \mid \quad -2A = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow A = -2, B = 0.$$

Следовательно, $\tilde{y}(x) = -2x \cos x$. А тогда

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x \cos x$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 26. Решить уравнение $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$.

Решение. Найдем сначала общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' - 5y' + 4y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$. Следовательно, $\bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$. Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Для заданного уравнения контрольное число $a + ib = 2 + i0 = 2$. Видим, что контрольное число не является корнем характеристического уравнения (*). Значит, заданное уравнение имеет частное решение $\tilde{y}(x)$ вида

$$\begin{aligned}\tilde{y}(x) &= (Ax^2 + Bx + C)e^{2x} \Rightarrow \tilde{y}' = [2Ax^2 + (2A + 2B)x + (B + 2C)]e^{2x}, \\ \tilde{y}'' &= [4Ax^2 + (8A + 4B)x + (2A + 4B + 4C)]e^{2x}.\end{aligned}$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}(x)$, $\tilde{y}'(x)$, $\tilde{y}''(x)$ в заданное уравнение. Получаем

$$\begin{aligned}&[-2Ax^2 - (2A + 2B)x + (2A - B - 2C)]e^{2x} = 4x^2 e^{2x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -2Ax^2 - (2A + 2B)x + (2A - B - 2C) = 4x^2 \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 \mid -2A = 4 \\ x \mid -(2A + 2B) = 0 \\ x^0 \mid 2A - B - 2C = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = -2, B = 2, C = -3.$$

Следовательно, $\tilde{y}(x) = -(2x^2 - 2x + 3)$. А тогда

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{4x} - (2x^2 - 2x + 3)$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 27. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = x \cos x$.

Решение. Найдем сначала общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Следовательно,

$$\bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Для заданного уравнения контрольное число $a + ib = 0 + i \cdot 1 = i$. Видим, что контрольное число не является корнем характеристического уравнения (*). Значит, заданное уравнение имеет частное решение $\tilde{y}(x)$ вида

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x) &= (Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{y}' &= (Cx + D + A) \cos x - (Ax + B - C) \sin x, \\ \tilde{y}'' &= -(Ax + B - 2C) \cos x - (Cx + D + 2A) \sin x. \end{aligned}$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}(x)$, $\tilde{y}'(x)$, $\tilde{y}''(x)$. Получаем

$$\begin{aligned} & [(A - 3C)x + (B + 2C - 3A - 3D)] \cos x + \\ & + [(3A + C)x + 3B + D - 2A - 3C] \sin x \equiv x \cos x \Rightarrow \\ \Rightarrow & \begin{array}{l} \cos x \mid (A - 3C)x + (B + 2C - 3A - 3D) \equiv x \\ \sin x \mid (3A + C)x + (3B + D - 2A - 3C) \equiv 0 \end{array} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} A - 3C = 1, \\ 3A + C = 0, \\ B + 2C - 3A - 3D = 0, \\ 3B + D - 2A - 3C = 0 \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = 0,1, C = -0,3, B = -0,12, D = -0,34.$$

Следовательно, $\tilde{y}(x) = (0,1x - 0,12) \cos x - (0,3x + 0,34) \sin x$. А тогда $y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (0,1x - 0,12) \cos x - (0,3x + 0,34) \sin x$ — общее решение заданного уравнения.

Задача 28. Решить уравнение $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$.

Решение. Найдем сначала общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' + 3y' - 4y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -4$. Следовательно, $\bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$.

1. Рассмотрим уравнение $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x}$. Найдем частное решение $\tilde{y}_1(x)$ этого уравнения. Контрольным числом рассматриваемого уравнения является $a + ib = -4 + i0 = -4$. Видим, что контрольное число есть корень характеристического уравнения (*) кратности $k = 1$. Следовательно, частное решение $\tilde{y}_1(x)$ имеет вид

$$\tilde{y}_1(x) = x \cdot A e^{-4x} \Rightarrow \tilde{y}_1' = (A - 4Ax) e^{-4x}, \tilde{y}_1'' = (16Ax - 8A) e^{-4x}.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}_1(x), \tilde{y}_1'(x), \tilde{y}_1''(x)$ в уравнение: $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x}$. Получаем

$$-5Ae^{-4x} \equiv e^{-4x} \Rightarrow A = -\frac{1}{5}.$$

Значит, $\tilde{y}_1(x) = -\frac{x}{5} e^{-4x}$.

2. Рассмотрим уравнение $y'' + 3y' - 4y = xe^{-x}$. Найдем частное решение $\tilde{y}_2(x)$ этого уравнения. Контрольным числом рассматриваемого уравнения является $a + ib = -1 + i0 = -1$. Видим, что оно не является корнем характеристического уравнения (*). Следовательно, $\tilde{y}_2(x)$ имеет вид

$$\tilde{y}_2(x) = (Ax + B) e^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{y}_2'(x) = (-Ax + A - B) e^{-x}, \tilde{y}_2''(x) = (Ax + B - 2A) e^{-x}.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}_2, \tilde{y}_2', \tilde{y}_2''$ в уравнение $y'' + 3y' - 4y = xe^{-x}$. Получаем

$$(-6Ax + A - 6B) e^{-x} \equiv xe^{-x} \Rightarrow -6Ax + A - 6B \equiv x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \mid -6A = 1 \\ x^0 \mid A - 6B = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = -\frac{1}{6}, B = -\frac{1}{36}.$$

Значит, $\tilde{y}_2(x) = -\left(\frac{x}{6} + \frac{1}{36}\right)e^{-x}$. А тогда

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - \frac{x}{5} e^{-4x} - \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{36}\right) e^{-x}$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 29. Решить уравнение $y'' + 2y' - 3y = x^2 e^x$.

Решение. Найдем сначала общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' + 2y' - 3y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$. Следовательно,

$$\bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}.$$

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Контрольным числом заданного уравнения является $a + ib = 1 + i0 = 1$. Видим, что контрольное число есть корень характеристического уравнения кратности $k = 1$. Значит, заданное уравнение имеет частное решение $\tilde{y}(x)$ вида

$$\tilde{y}(x) = x(Ax^2 + Bx + C)e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{y}' = [Ax^3 + (B + 3A)x^2 + (2B + C)x + C]e^x,$$

$$\tilde{y}'' = [Ax^3 + (B + 6A)x^2 + (6A + 4B + C)x + (2B + 2C)]e^x.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ в заданное уравнение. Получаем

$$[12Ax^2 + (6A + 8B)x + (2B + 4C)]e^x = x^2 e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12Ax^2 + (6A + 8B)x + (2B + 4C) = x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 \mid 12A = 1 \\ x \mid 6A + 8B = 0 \\ x^0 \mid 2B + 4C = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{12}, B = -\frac{1}{16}, C = \frac{1}{32}.$$

Следовательно, $\bar{y}(x) = \left(\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{16} + \frac{x}{32} \right) e^x$. А тогда

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + \left(\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{16} + \frac{x}{32} \right) e^x$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 30. Решить уравнение $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$.

Решение. Находим общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' - 4y' + 8y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2 + 2i$, $\lambda_2 = 2 - 2i$. Следовательно, $\bar{y}(x) = C_1 e^{2x} \cos 2x + C_2 e^{2x} \sin 2x$.

1. Рассматриваем уравнение $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}$. Контрольным числом этого уравнения является $a + ib = 2 + i0 = 2$. Видим, что оно не есть корень характеристического уравнения (*). Значит, частное решение $\tilde{y}_1(x)$ уравнения $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}$ имеет вид

$$\tilde{y}_1(x) = Ae^{2x} \Rightarrow \tilde{y}_1' = 2Ae^{2x}, \tilde{y}_1'' = 4Ae^{2x}.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}_1, \tilde{y}_1', \tilde{y}_1''$ в уравнение $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}$. Получаем

$$4Ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow A = \frac{1}{4}.$$

Значит, $\tilde{y}_1(x) = \frac{1}{4} e^{2x}$.

2. Рассматриваем уравнение $y'' - 4y' + 8y = \sin 2x$. Контрольным числом этого уравнения является $a + ib = 0 + i2 = 2i$. Видим, что оно не есть корень характеристического уравнения (*). Поэтому частное решение $\tilde{y}_2(x)$ имеет вид

$$\tilde{y}_2(x) = A \cos 2x + B \sin 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{y}_2' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x, \tilde{y}_2'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}_2, \tilde{y}_2', \tilde{y}_2''$ в уравнение $y'' - 4y' + 8y = \sin 2x$. Получаем

$$(4A - 8B) \cos 2x + (4B + 8A) \sin 2x = \sin 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \cos 2x \mid 4A - 8B = 0 \\ \sin 2x \mid 4B + 8A = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{10}, B = \frac{1}{20}.$$

Следовательно, $\tilde{y}_2(x) = \frac{1}{10} \cos 2x + \frac{1}{20} \sin 2x$. А тогда

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) =$$

$$= C_1 e^{2x} \cos 2x + C_2 e^{2x} \sin 2x + 0,25 e^{2x} + 0,1 \cos 2x + 0,05 \sin 2x$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 31. Решить уравнение $y'' - 9y = e^{3x} \cos x$.

Решение. Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 9y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - 9 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3$. Следовательно, $\bar{y}(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$.

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Контрольным числом заданного уравнения является $a + ib = 3 + i$. Видим, что оно не есть корень характеристического уравнения (*). Поэтому частное решение $\tilde{y}(x)$ имеет вид

$$\tilde{y}(x) = e^{3x} (A \cos x + B \sin x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{y}' = [(3A + B) \cos x + (3B - A) \sin x] e^{3x},$$

$$\tilde{y}'' = [(8A + 6B) \cos x + (8B - 6A) \sin x] e^{3x}.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}(x), \tilde{y}''(x)$ в заданное уравнение. Получаем

$$[(6B - A) \cos x - (B + 6A) \sin x] e^{3x} = e^{3x} \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (6B - A) \cos x - (B + 6A) \sin x = \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \cos x \mid 6B - A = 1 \\ \sin x \mid B + 6A = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = -\frac{1}{37}, B = \frac{6}{37}.$$

Следовательно, $\tilde{y}(x) = e^{3x} \left(\frac{6}{37} \sin x - \frac{1}{37} \cos x \right)$. А тогда

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + e^{3x} \left(\frac{6}{37} \sin x - \frac{1}{37} \cos x \right)$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 32. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 6xe^x$.

Решение. Находим общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' - 2y' + y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Следовательно, $\bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Контрольным числом заданного уравнения является $a + ib = 1 + i0 = 1$. Видим, что контрольное число является корнем кратности $k = 2$ характеристического уравнения (*). Поэтому частное решение $\tilde{y}(x)$ имеет вид

$$\tilde{y}(x) = x^2(Ax + B)e^x \Rightarrow \tilde{y}' = [Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx]e^x,$$

$$\tilde{y}'' = [Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B)x + 2B]e^x.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ в заданное уравнение. Получаем

$$(6Ax + 2B)e^x = 6xe^x \Rightarrow 6Ax + 2B = 6x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \mid 6A = 6 \\ x^0 \mid 2B = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = 1, B = 0.$$

Значит, $\tilde{y}(x) = x^3 e^x$. А тогда $y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + x^3 e^x$ — общее решение заданного уравнения.

Задача 33. Решить уравнение $y'' + y = x \sin x$.

Решение. Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. Следовательно, $\bar{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Контрольным числом заданного уравнения является $a + ib = 0 + i \cdot 1 = i$. Видим, что контрольное число является корнем характеристического уравнения (*) кратности $k = 1$. Поэтому частное решение $\tilde{y}(x)$ имеет вид

$$\tilde{y}(x) = x[(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{y}' = [Cx^2 + (2A + D)x + B] \cos x + [-Ax^2 + (2C - B)x + D] \sin x.$$

$$\begin{aligned}\ddot{y} = & \left[-Ax^2 + (4C - B)x + (2A + 2D) \right] \cos x + \\ & + \left[-Cx^2 - (4A + D)x + (2C - 2B) \right] \sin x.\end{aligned}$$

Подставляем выражения для $\bar{y}(x)$, $\ddot{y}(x)$ в заданное уравнение. Получаем

$$\begin{aligned}[4Cx + (2A + 2D)] \cos x + [-4Ax + (2C - 2B)] \sin x & \equiv x \sin x \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \cos x \mid 4Cx + (2A + 2D) \equiv 0 \\ \sin x \mid -4Ax + (2C - 2B) \equiv x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \mid 4C = 0 \\ x^0 \mid 2A + 2D = 0 \\ x \mid -4A = 1 \\ x^0 \mid 2C - 2B = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow A = -\frac{1}{4}, B = 0, C = 0, D = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Значит, $\bar{y}(x) = -\frac{x^2}{4} \cos x + \frac{x}{4} \sin x$. А тогда

$$y = \bar{y}(x) + \check{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x^2}{4} \cos x + \frac{x}{4} \sin x$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 34. Решить уравнение $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$.

Решение. Находим общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' + 4y' + 4y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 \Leftrightarrow (\lambda + 2)^2 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Следовательно, $\bar{y}(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$.

Найдем теперь частное решение $\check{y}(x)$ заданного уравнения. Контрольным числом заданного уравнения является $a + ib = 2 + i \cdot 0 = 2$. Видим, что контрольное число не есть корень характеристического уравнения (*). Поэтому частное решение $\check{y}(x)$ имеет вид

$$\check{y}(x) = (Ax + B)e^{2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \check{y}' = [2Ax + (A + 2B)]e^{2x}, \check{y}'' = [4Ax + (4A + 4B)]e^{2x}.$$

Подставляем выражения для $\check{y}(x)$, $\check{y}'(x)$, $\check{y}''(x)$ в заданное уравнение. Получаем

$$[16Ax + (8A + 16B)]e^{2x} \equiv xe^{2x} \Rightarrow 16Ax + (8A + 16B) \equiv x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \mid 16A = 1 \\ x^0 \mid 8A + 16B = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{16}, B = -\frac{1}{32}.$$

Следовательно, $\tilde{y}(x) = \left(\frac{x}{16} - \frac{1}{32} \right) e^{2x}$. А тогда

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \left(\frac{x}{16} - \frac{1}{32} \right) e^{2x}.$$

Задача 35. Решить уравнение $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$.

Решение. Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 5y' = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$. Следовательно, $\bar{y}(x) = C_1 + C_2 e^{5x}$.

1. Рассмотрим уравнение $y'' - 5y' = 3x^2$. Найдем частное решение $\tilde{y}_1(x)$ этого уравнения. Контрольным числом для рассматриваемого уравнения является $a + ib = 0 + i \cdot 0 = 0$. Видим, что контрольное число есть корень характеристического уравнения $(*)$ кратности $k = 1$. Поэтому частное решение $\tilde{y}_1(x)$ имеет вид

$$\tilde{y}_1(x) = x(Ax^2 + Bx + C) \Rightarrow \tilde{y}_1' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \tilde{y}_1'' = 6Ax + 2B.$$

Подставляем $\tilde{y}_1', \tilde{y}_1''$ в уравнение $y'' - 5y' = 3x^2$. Получаем

$$-15Ax^2 + (6A - 10B)x + (2B - 5C) = 3x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 \mid -15A = 3 \\ x \mid 6A - 10B = 0 \\ x^0 \mid 2B - 5C = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = -\frac{1}{5}, B = -\frac{3}{25}, C = -\frac{6}{125}.$$

Следовательно, $\tilde{y}_1(x) = -0,2x^3 - 0,12x^2 - 0,048x$.

2. Рассмотрим уравнение $y'' - 5y' = \sin 5x$. Найдем частное решение $\tilde{y}_2(x)$ этого уравнения. Контрольным числом для рассматриваемого уравнения является $a + ib = 0 + i \cdot 5 = 5i$. Видим, что контрольное число не есть корень характеристического уравнения $(*)$. Поэтому частное решение $\tilde{y}_2(x)$ имеет вид

$$\tilde{y}_2(x) = A \cos 5x + B \sin 5x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{y}_2'(x) = -5A \sin 5x + 5B \cos 5x, \tilde{y}_2''(x) = -25A \cos 5x - 25B \sin 5x.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}_2', \tilde{y}_2''$ в уравнение $y'' - 5y' = \sin 5x$.
Получаем

$$\begin{aligned} & -25(A+B)\cos 5x + 25(A-B)\sin 5x = \sin 5x \Rightarrow \\ \Rightarrow & \left. \begin{array}{l} \cos 5x | \quad -25(A+B) = 0 \\ \sin 5x | \quad 25(A-B) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow A = 0,02, B = -0,02. \end{aligned}$$

Следовательно, $\tilde{y}_2(x) = 0,02 \cos 5x - 0,02 \sin 5x$. А тогда

$$\begin{aligned} y &= \bar{y}(x) + \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) = \\ &= C_1 + C_2 e^{5x} - 0,2x^3 - 0,12x^2 - 0,048x + 0,02 \cos 5x - 0,02 \sin 5x \\ &\text{— общее решение заданного уравнения.} \end{aligned}$$

Задача 36. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ ($q(x) = \frac{e^x}{x}$).

Решение. Находим общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' - 2y' + y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 \quad (*)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1. \text{ Следовательно, } \bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x \quad (y_1(x) = e^x, y_2(x) = x e^x).$$

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Искать частное решение $\tilde{y}(x)$ будем методом вариации произвольных постоянных. (Правая часть заданного уравнения $q(x)$ не является функцией специального вида.) Итак, полагаем

$$\tilde{y}(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \Rightarrow \tilde{y}(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x.$$

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяем из системы

$$\begin{cases} C_1' y_1(x) + C_2' y_2(x) = 0, \\ C_1' y_1'(x) + C_2' y_2'(x) = q(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' e^x + C_2' x e^x = 0, \\ C_1' e^x + C_2' (x+1) e^x = \frac{e^x}{x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1'(x) = -1, C_2'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow C_1(x) = -x, C_2(x) = \ln|x|$$

(произвольные постоянные, которые получаются при этом, считаем равными нулю). Таким образом, получаем $\tilde{y}(x) = -x e^x + x \ln|x| \cdot e^x$. А тогда

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x - x e^x + x \ln|x| \cdot e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^x + \tilde{C}_2 x e^x + x e^x \ln|x|$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 37. Решить уравнение $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$ ($q(x) = \frac{1}{e^x + 1}$).

Решение. Находим общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' + 3y' + 2y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad (*)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2. \text{ Следовательно, } \bar{y}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} \quad (y_1(x) = e^{-x}, y_2(x) = e^{-2x}).$$

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Станем искать $\tilde{y}(x)$ методом вариации произвольных постоянных, ибо $q(x)$ не является функцией специального вида. Полагая $\tilde{y}(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-2x}$. Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяем из системы

$$\begin{aligned} & \begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{-2x} = 0, \\ -C_1'(x)e^{-x} - 2C_2'(x)e^{-2x} = \frac{1}{e^x + 1} \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow C_1'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}, C_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{e^x + 1} \Rightarrow \\ & \Rightarrow C_1(x) = \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = \ln(e^x + 1). \\ & C_2(x) = -\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = -\int \frac{e^x \cdot e^x dx}{e^x + 1} = [e^x = t] = \\ & = -(t - \ln(t + 1)) = -e^x + \ln(e^x + 1). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\tilde{y}(x) = e^{-x} \ln(e^x + 1) + e^{-2x} [\ln(e^x + 1) - e^x].$$

А тогда

$$\begin{aligned} y &= \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + e^{-x} \ln(e^x + 1) + \\ &+ e^{-2x} [\ln(e^x + 1) - e^x] \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = \tilde{C}_1 e^{-x} + \tilde{C}_2 e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(e^x + 1) \end{aligned}$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 38. Решить уравнение $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ ($q(x) = \frac{1}{\sin x}$).

Решение. Находим общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' + y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. Следовательно, $\bar{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ ($y_1(x) = \cos x, y_2(x) = \sin x$).

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Станем искать $\tilde{y}(x)$ методом вариации произвольных постоянных, ибо $q(x)$ не является функцией специального вида. Полагая $\tilde{y}(x) = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$. Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяем из системы

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \frac{1}{\sin x} \end{cases} \Rightarrow C_1'(x) = -1, C_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1(x) = -x, C_2(x) = \ln |\sin x|.$$

Таким образом, получаем $\tilde{y}(x) = -x \cos x + \sin x \ln |\sin x|$. А тогда

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x + \sin x \ln |\sin x|$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 39. Решить уравнение $y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x$ ($q(x) = 2 \operatorname{tg} x$).

Решение. Находим общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' + 4y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 + 4 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i$. Следовательно, $\bar{y}(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ ($y_1(x) = \cos 2x, y_2(x) = \sin 2x$).

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Станем искать $\tilde{y}(x)$ методом вариации произвольных постоянных, ибо $q(x)$ не является функцией специального вида. Полагая $\tilde{y}(x) = C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x$. Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяем из системы

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos 2x + C_2'(x) \sin 2x = 0, \\ -2C_1'(x) \sin 2x + 2C_2'(x) \cos 2x = 2 \operatorname{tg} x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1' = -2\sin^2 x, C_2' = \frac{\sin x \cos 2x}{\cos x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1(x) = \frac{1}{2} \sin 2x - x, C_2(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + \ln |\cos x|.$$

Таким образом,

$$\tilde{y}(x) = \left(\frac{1}{2} \sin 2x - x \right) \cos 2x - \left(\frac{1}{2} \cos 2x - \ln |\cos x| \right) \sin 2x.$$

А тогда

$$\begin{aligned} y &= \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \\ &+ \left(\frac{1}{2} \sin 2x - x \right) \cos 2x - \left(\frac{1}{2} \cos 2x - \ln |\cos x| \right) \sin 2x \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= C_1 \cos 2x - x \cos 2x + C_2 \sin 2x + \sin 2x \ln |\cos x|. \end{aligned}$$

Задача 40. Решить уравнение $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$
 $(q(x) = \frac{3\sqrt{x+1}}{e^x})$.

Решение. Находим общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' + 2y' + y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Следовательно, $\bar{y}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$ ($y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = x e^{-x}$).

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Станем искать $\tilde{y}(x)$ методом вариации произвольных постоянных, ибо $q(x)$ не является функцией специального вида. Полагая $\tilde{y}(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)xe^{-x}$. Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяем из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)xe^{-x} = 0, \\ -C_1(x)e^{-x} + C_2'(x)(1-x)e^{-x} = 3e^{-x}\sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1'(x) = -3x\sqrt{x+1}, C_2'(x) = 3\sqrt{x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1(x) = -\frac{6}{5}(x+1)^{5/2} + 2(x+1)^{3/2}, C_2(x) = 2(x+1)^{3/2}.$$

Таким образом,

$$\tilde{y}(x) = e^{-x} \left[-\frac{6}{5}(x+1)^{5/2} + 2(x+1)^{3/2} + 2x(x+1)^{3/2} \right] = \frac{4}{5}(x+1)^{5/2} e^{-x}.$$

А тогда

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{4}{5}(x+1)^{5/2} e^{-x}.$$

Задача 41. Решить уравнение $y'' + y = 2 \sec^3 x$ ($q(x) = \frac{2}{\cos^3 x}$).

Решение. Находим общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' + y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$. Следовательно, $\bar{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ ($y_1(x) = \cos x, \quad y_2(x) = \sin x$).

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Станем искать $\tilde{y}(x)$ методом вариации произвольных постоянных, ибо $q(x)$ не является функцией специального вида. Полагаем $\tilde{y}(x) = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$. Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяем из системы

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \frac{2}{\cos^3 x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1'(x) = -2 \frac{\sin x}{\cos^3 x}, \quad C_2'(x) = \frac{2}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}, \quad C_2(x) = 2 \operatorname{tg} x.$$

Таким образом,

$$\tilde{y}(x) = -\frac{1}{\cos x} + \frac{2 \sin^2 x}{\cos x} \Rightarrow \tilde{y}(x) = -\frac{\cos 2x}{\cos x}.$$

А тогда

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{\cos 2x}{\cos x}$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 42. Решить уравнение $x^3(y'' - y) = x^2 - 2 \Rightarrow y'' - y = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}$. Считаем $x \neq 0$ ($q(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}$).

Решение. Находим общее решение $\bar{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' - y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Следовательно, $\bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ ($y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{-x}$).

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$ заданного уравнения. Станем искать решение $\tilde{y}(x)$ методом вариации произвольных постоянных, ибо $q(x)$ не является функцией специального вида. Полагаем $\tilde{y}(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$. Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяем из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0, \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1'(x) = \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{x^3}\right)e^{-x}, \quad C_2'(x) = \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x}\right)e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1(x) = \int \frac{e^{-x}}{2x} dx - \int \frac{e^{-x}}{x^3} dx.$$

Но

$$\int \frac{e^{-x}}{x^3} dx = \left[\begin{array}{l} u = e^{-x}, \quad du = -e^{-x} dx \\ dv = \frac{dx}{x^3}, \quad v = -\frac{1}{2x^2} \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{2x^2} - \int \frac{e^{-x}}{2x^2} dx = \left[\begin{array}{l} u = e^{-x}, \quad du = -e^{-x} dx \\ dv = \frac{dx}{2x^2}, \quad v = -\frac{1}{2x} \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{2x^2} + \frac{e^{-x}}{2x} + \int \frac{e^{-x}}{2x} dx.$$

Поэтому $C_1(x) = \frac{e^{-x}}{2x^2} - \frac{e^{-x}}{2x}$. Совершенно аналогично находим

$$C_2(x) = -\frac{e^x}{2x^2} - \frac{e^x}{2x}. \text{ Таким образом, } \tilde{y}(x) = \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x} \right) + \left(-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x} \right) = -\frac{1}{x}. \text{ А тогда}$$

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{x}.$$

Задача 43. Решить уравнение $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$.

Решение. Видим, что заданное уравнение есть уравнение Эйлера. Поэтому:

1) Для $x > 0$ делаем замену: $x = e^t$. Тогда

$$x'_t = e^t, y'_x = y'_t \cdot t'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \Rightarrow y'_x = y'_t e^{-t};$$

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = (y'_t e^{-t})'_t e^{-t} = (y''_t - y'_t) e^{-2t}.$$

Относительно функции $y(t)$ заданное уравнение принимает вид

$$y''_t - y'_t - 4y'_t + 6y = 0 \Rightarrow y''_t - 5y'_t + 6y = 0.$$

2) Для $x < 0$ делаем замену:

$$x = -e^t \Rightarrow x'_t = -e^t, y'_x = y'_t \frac{1}{x'_t} = -y'_t e^{-t},$$

$$y''_{x^2} = (-y'_t e^{-t})'_t \frac{1}{x'_t} = (-y''_t e^{-t} + y'_t e^{-t})(-e^{-t}) = (y''_t - y'_t) e^{-2t}.$$

Относительно функции $y(t)$ заданное уравнение будет иметь тот же вид: $y''_t - 5y'_t + 6y = 0$. Таким образом, как для $x > 0$, так и для $x < 0$, получили одно и то же линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Найдем общее решение $\bar{y}(t)$ полученного уравнения. Имеем

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Следовательно, $\bar{y}(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$. Возвращаясь к прежней независимой переменной x , получим $\bar{y}(x) = C_1 x^2 + C_2 x^3$.

Задача 44. Решить уравнение $x^2 y'' - xy' - 3y = 0$.

Решение. Замечаем, что заданное уравнение — уравнение Эйлера. Поэтому делаем замену: $x = e^t$ для $x > 0$ и $x = -e^t$ для $x < 0$. При такой замене независимой переменной x будем иметь:

$$1) \text{ для } x > 0: y'_x = y'_t e^{-t}, \quad y''_{xx} = (y''_t - y'_t) e^{-2t}.$$

$$2) \text{ для } x < 0: y'_x = -y'_t e^{-t}, \quad y''_{xx} = (y''_t - y'_t) e^{-2t}.$$

В обоих случаях относительно функции $y(t)$ заданное уравнение принимает вид $y''_t - 2y'_t - 3y = 0$. Получили линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Найдём общее решение $\bar{y}(t)$ полученного уравнения. Имеем

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$. Следовательно, $\bar{y}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$. Возвращаясь к прежней независимой переменной x , получим $\bar{y} = \frac{C_1}{x} + C_2 x^3$.

Задача 45. Решить уравнение $x^3 y'' + xy' - y = 0$.

Решение. Замечаем, что заданное уравнение — уравнение Эйлера. Поэтому делаем замену: $x = e^t$ для $x > 0$ и $x = -e^t$ для $x < 0$. При такой замене независимой переменной x будем иметь:

$$1) \text{ для } x > 0: y'_x = y'_t e^{-t}, \quad y''_{xx} = (y''_t - y'_t) e^{-2t}, \quad y'''_{xx} = (y'''_t - 3y''_t + 2y'_t) e^{-3t};$$

$$2) \text{ для } x < 0: y'_x = -y'_t e^{-t}, \quad y''_{xx} = (y''_t - y'_t) e^{-2t}, \quad y'''_{xx} = -(y'''_t - 3y''_t + 2y'_t) e^{-3t}.$$

В обоих случаях относительно функции $y(t)$ заданное уравнение принимает вид $y'''_t - 3y''_t + 3y'_t - y = 0$. Получили линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Найдём общее решение $\bar{y}(t)$ полученного уравнения. Имеем

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^3 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Следовательно, $\bar{y}(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 t^2 e^t$. Возвращаясь к прежней независимой переменной x , получим

$$\bar{y} = C_1 x + C_2 x \ln|x| + C_3 x \ln^2|x|.$$

Задача 46. Решить уравнение $x^2 y'' = 2y'$.

Решение. Заданное уравнение для $x \neq 0$ равносильно уравнению $x^3 y'' - 2xy' = 0$, которое является уравнением Эйлера. Делаем замену: $x = e^t$ для $x > 0$ и $x = -e^t$ для $x < 0$. Тогда:

1) для $x > 0$: $y'_x = y'_t e^{-t}$, $y''_{x^2} = (y''_t - 3y'_t + 2y_t) e^{-3t}$;

2) для $x < 0$: $y'_x = -y'_t e^{-t}$, $y''_{x^2} = -(y''_t - 3y'_t + 2y_t) e^{-3t}$.

В обоих случаях относительно функции $y(t)$ заданное уравнение принимает вид $y''_t - 3y'_t = 0$. Получили линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Найдем общее решение $\bar{y}(t)$ полученного уравнения. Имеем

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda - 3) = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$. Следовательно, $\bar{y}(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^{3t}$. Возвращаясь к прежней независимой переменной x , получим

$$\bar{y} = C_1 + C_2 \ln|x| + C_3 x^3.$$

Задача 47. Решить уравнение $x^2 y'' - xy' + y = 8x^3$.

Решение. Замечаем, что заданное уравнение — уравнение Эйлера. При обычной замене независимой переменной x будем иметь:

1) для $x > 0$: $y'_x = y'_t e^{-t}$, $y''_{x^2} = (y''_t - y'_t) e^{-2t}$.

2) для $x < 0$: $y'_x = -y'_t e^{-t}$, $y''_{x^2} = (y''_t - y'_t) e^{-2t}$.

Заданное уравнение относительно функции $y(t)$ принимает вид $y''_t - 2y'_t + y = \pm 8e^{3t}$ (знак “+” при $x > 0$ и знак “-” при $x < 0$). Получили линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида.

Находим сначала общее решение $\bar{y}(t)$ соответствующего однородного уравнения $y''_t - 2y'_t + y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Следовательно, $\bar{y}(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t$.

Найдем теперь частное решение $\check{y}(t)$ неоднородного уравнения. Контрольным числом рассматриваемого уравнения является

$a + ib = 3 + i0 = 3$. Видим, что оно не есть корень характеристического уравнения (*). Следовательно, $\tilde{y}(t)$ имеет вид

$$\tilde{y}(t) = Ae^{3t} \Rightarrow \tilde{y}'_t = 3Ae^{3t}, \tilde{y}''_t = 9Ae^{3t}.$$

Подставляя эти выражения для $\tilde{y}, \tilde{y}'_t, \tilde{y}''_t$ в уравнение $y''_t - 2y'_t + y = \pm 8e^{3t}$, получаем $4Ae^{3t} = \pm 8e^{3t} \Rightarrow A = \pm 2$. Таким образом, $\tilde{y}(t) = \pm 2e^{3t}$. А тогда

$$y(t) = \bar{y}(t) + \tilde{y}(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t \pm 2e^{3t}.$$

Возвращаясь к прежней независимой переменной x , получим $y(x) = C_1 x + C_2 x \ln|x| + 2x^3$ — общее решение заданного уравнения.

Задача 48. Решить уравнение $x^2 y'' + xy' + 4y = 10x$.

Решение. Замечаем, что заданное уравнение — уравнение Эйлера. Поэтому делаем замену: $x = e^t$ для $x > 0$ и $x = -e^t$ для $x < 0$. При такой замене независимой переменной x будем иметь:

$$1) \text{ для } x > 0: y'_x = y'_t e^{-t}, y''_{x^2} = (y''_t - y'_t) e^{-2t}.$$

$$2) \text{ для } x < 0: y'_x = -y'_t e^{-t}, y''_{x^2} = (y''_t - y'_t) e^{-2t}.$$

Относительно функции $y(t)$ заданное уравнение принимает вид $y''_t + 4y = \pm 10e^t$ (знак “+” для $x > 0$ и знак “-” для $x < 0$). Получили линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида.

Находим сначала общее решение $\bar{y}(t)$ соответствующего однородного уравнения $y''_t + 4y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 + 4 = 0 \quad (*)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i. \text{ Следовательно, } \bar{y}(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t.$$

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(t)$ неоднородного уравнения. Контрольным числом рассматриваемого неоднородного уравнения является $a + ib = 1 + i \cdot 0 = 1$. Видим, что оно не есть корень характеристического уравнения (*). Следовательно, $\tilde{y}(t)$ имеет вид

$$\tilde{y}(t) = Ae^t \Rightarrow \tilde{y}'_t(t) = Ae^t, \tilde{y}''_t(t) = Ae^t.$$

Подставляя эти выражения для $\tilde{y}$ и $\tilde{y}''_t$ в уравнение $y''_t + 4y = \pm 10e^t$, получаем $5Ae^t = \pm 10e^t \Rightarrow A = \pm 2$. Таким образом, $\tilde{y}(t) = \pm 2e^t$. А тогда

$$y(t) = \bar{y}(t) + \tilde{y}(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t \pm 2e^t.$$

Возвращаясь к прежней независимой переменной x , получим

$$y(x) = C_1 \cos (2 \ln |x|) + C_2 \sin (2 \ln |x|) + 2x$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 49. Решить уравнение $x^3 y'' - 2xy' = 6 \ln x$.

Решение. Из вида уравнения заключаем, что оно определено для $x > 0$. Для $x > 0$ заданное уравнение равносильно уравнению

$$x^2 y'' - 2y' = 6 \frac{\ln x}{x}, \text{ которое является уравнением Эйлера. Поэтому}$$

делаем замену: $x = e^t$ ($\Rightarrow \ln x = t$). При такой замене будем иметь $y'_x = y'_t e^{-t}$, $y''_x = (y''_t - y'_t) e^{-2t}$. Относительно функции $y(t)$ заданное уравнение принимает вид $y''_t - y'_t - 2y = 6te^{-t}$. Получили линейное уравнение с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида.

Находим сначала общее решение $\bar{y}(t)$ соответствующего однородного уравнения $y''_t - y'_t - 2y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1. \quad (*)$$

Следовательно, $\bar{y}(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$.

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(t)$ неоднородного уравнения. Контрольным числом рассматриваемого неоднородного уравнения является $a + ib = -1 + i0 = -1$. Видим, что контрольное число есть корень характеристического уравнения (*) кратности $k = 1$. Поэтому $\tilde{y}(t)$ имеет вид

$$\tilde{y}(t) = t(At + B)e^{-t} \Rightarrow \tilde{y}'_t(t) = [-At^2 + (2A - B)t + B]e^{-t},$$

$$\tilde{y}''_t = [At^2 + (B - 4A)t + (2A - 2B)]e^{-t}.$$

Подставляя эти выражения для $\tilde{y}$, $\tilde{y}'_t$, $\tilde{y}''_t$ в уравнение $y''_t - y'_t - 2y = 6te^{-t}$, получаем

$$[-6At + (2A - 3B)]e^{-t} = 6te^{-t} \Rightarrow -6At + (2A - 3B) = 6t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} t \mid -6A = 6 \\ t^0 \mid 2A - 3B = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = -1, B = -\frac{2}{3}.$$

Таким образом, $\bar{y}(t) = -\left(t^2 + \frac{2}{3}t\right)e^{-t}$. А тогда

$$y(t) = \bar{y}(t) + \tilde{y}(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} - \left(t^2 + \frac{2}{3}t\right)e^{-t}.$$

Возвращаясь к прежней независимой переменной x , получим

$$y(x) = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x} - \left(\ln^2 x + \frac{2}{3} \ln x\right) \frac{1}{x}$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 50. Решить уравнение $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$.

Решение. Замечаем, что данное уравнение — уравнение Эйлера. Поэтому делаем замену: $x = e^t$ для $x > 0$ и $x = -e^t$ для $x < 0$. При такой замене независимой переменной x будем иметь:

$$1) \text{ для } x > 0: y'_x = y'_t e^{-t}, \quad y''_{xx} = (y''_t - y'_t) e^{-2t}.$$

$$2) \text{ для } x < 0: y'_x = -y'_t e^{-t}, \quad y''_{xx} = (y''_t - y'_t) e^{-2t}.$$

Относительно функции $y(t)$ заданное уравнение принимает вид $y''_t - 4y'_t + 5y = 3e^{2t}$. Получили линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида. Находим сначала общее решение $\bar{y}(t)$ соответствующего однородного уравнения $y''_t - 4y'_t + 5y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2 + i, \lambda_2 = 2 - i$. Следовательно, $\bar{y}(t) = C_1 e^{2t} \cos t + C_2 e^{2t} \sin t$.

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(t)$ неоднородного уравнения. Характеристическим числом рассматриваемого неоднородного уравнения является $a + ib = 2 + i0 = 2$. Видим, что контрольное число не есть корень характеристического уравнения (*). Следовательно, $\tilde{y}(t)$ имеет вид

$$\tilde{y}(t) = Ae^{2t} \Rightarrow \tilde{y}'_t = 2Ae^{2t}, \quad \tilde{y}''_t = 4Ae^{2t}.$$

Подставляя эти выражения для $\tilde{y}, \tilde{y}'_t, \tilde{y}''_t$ в уравнение $y''_t - 4y'_t + 5y = 3e^{2t}$, получаем $Ae^{2t} = 3e^{2t} \Rightarrow A = 3$. Таким образом, $\tilde{y}(t) = 3e^{2t}$. А тогда

$$y(t) = \bar{y}(t) + \tilde{y}(t) = C_1 e^{2t} \cos t + C_2 e^{2t} \sin t + 3e^{2t}.$$

Возвращаясь к прежней независимой переменной x , получим

$$y(x) = C_1 x^2 \cos(\ln|x|) + C_2 x^2 \sin(\ln|x|) + 3x^2.$$

Задача 51. Решить уравнение $x^2 y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2$.

Решение. Замечаем что заданное уравнение — уравнение Эйлера. Поэтому делаем замену: $x = e^t$ для $x > 0$ и $x = -e^t$ для $x < 0$. При такой замене независимой переменной x будем иметь:

$$1) \text{ для } x > 0: y'_x = y'_t e^{-t}, y''_{xx} = (y''_t - y'_t) e^{-2t}.$$

$$2) \text{ для } x < 0: y'_x = -y'_t e^{-t}, y''_{xx} = (y''_t - y'_t) e^{-2t}.$$

Относительно функции $y(t)$ заданное уравнение принимает вид $y''_t - y'_t - 6y = \pm 5e^{3t} + 8e^{2t}$. Получили линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида. Находим сначала общее решение $\bar{y}(t)$ соответствующего однородного уравнения $y''_t - y'_t - 6y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$. Следовательно, $\bar{y}(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t}$. Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(t)$ неоднородного уравнения.

1) Рассмотрим уравнение $y''_t - y'_t - 6y = \pm 5e^{3t}$. Контрольным числом этого уравнения является $a + ib = 3 + i \cdot 0 = 3$. Это контрольное число есть корень кратности $k = 1$ характеристического уравнения (*). Следовательно, частное решение $\tilde{y}_1(t)$ рассматриваемого уравнения имеет вид

$$\tilde{y}_1(t) = Ate^{3t} \Rightarrow \tilde{y}'_1 = (3At + A)e^{3t}, \tilde{y}''_1 = (9At + 6A)e^{3t}.$$

Подставляя эти выражения для $\tilde{y}_1, \tilde{y}'_1, \tilde{y}''_1$ в уравнение $y''_t - y'_t - 6y = \pm 5e^{3t}$, получаем $5Ae^{3t} \equiv \pm 5e^{3t} \Rightarrow A = \pm 1$. Значит, $\tilde{y}_1(t) = \pm te^{3t}$.

2) Рассмотрим уравнение $y''_t - y'_t - 6y = 8e^{2t}$. Контрольным числом этого уравнения является $a + ib = 2 + i \cdot 0 = 2$. Видим, что оно не есть корень характеристического уравнения (*). Следовательно, частное решение $\tilde{y}_2(t)$ рассматриваемого уравнения имеет вид

$$\tilde{y}_2(t) = Ae^{2t} \Rightarrow \tilde{y}'_2 = 2Ae^{2t}, \tilde{y}''_2 = 4Ae^{2t}.$$

Подставляя эти выражения для $\tilde{y}_2, \tilde{y}'_2, \tilde{y}''_2$ в уравнение $y''_2 - y'_2 - 6y = 8e^{2t}$, получаем $-4Ae^{2t} \equiv 8e^{2t} \Rightarrow A = -2$. Значит, $\tilde{y}_2(t) = -2e^{2t}$. А тогда

$$y(t) = \bar{y}(t) + \tilde{y}_1(t) + \tilde{y}_2(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t} \pm t e^{3t} - 2e^{2t}.$$

Возвращаясь к прежней независимой переменной x , получим

$$y(x) = C_1 x^3 + \frac{C_2}{x^2} + x^3 \ln|x| - 2x^2.$$

Задача 52. Решить уравнение $x^2 y'' - 2y = \sin(\ln x)$.

Решение. Из вида уравнения заключаем, что оно определено для $x > 0$ и что оно есть уравнение Эйлера. Поэтому делаем замену: $x = e^t$ ($\Rightarrow t = \ln x$). При такой замене будем иметь $y'_x = y'_t e^{-t}$, $y''_{xx} = (y''_t - y'_t) e^{-2t}$. Относительно функции $y(t)$ заданное уравнение принимает вид $y''_t - y'_t - 2y = \sin t$. Получили линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида. Находим сначала общее решение $\bar{y}(t)$ соответствующего однородного уравнения $y''_t - y'_t - 2y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$. Следовательно, $\bar{y}(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$.

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(t)$ неоднородного уравнения. Контрольным числом рассматриваемого неоднородного уравнения является $a + ib = 0 + i \cdot 1 = i$. Видим, что контрольное число не есть корень характеристического уравнения (*). Поэтому $\tilde{y}(t)$ имеет вид

$$\tilde{y}(t) = A \cos t + B \sin t \Rightarrow \tilde{y}'_t = -A \sin t + B \cos t, \tilde{y}''_t = -A \cos t - B \sin t.$$

Подставляя эти выражения для $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ в уравнение $y''_t - y'_t - 2y = \sin t$, получим

$$\begin{aligned} & -(3A + B) \cos t + (A - 3B) \sin t \equiv \sin t \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \cos t \mid 3A + B = 0 \\ \sin t \mid A - 3B = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow A = 0,1, B = -0,3. \end{aligned}$$

Значит, $\tilde{y}(t) = 0,1 \cos t - 0,3 \sin t$. А тогда

$$y(t) = \bar{y}(t) + \tilde{y}(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} + 0,1 \cos t - 0,3 \sin t.$$

Возвращаясь к прежней независимой переменной x , получим

$$y(x) = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x} + 0,1 \cos(\ln x) - 0,3 \sin(\ln x).$$

Задача 53. Решить уравнение $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$.

Решение. Замечаем, что заданное уравнение — уравнение Эйлера. Поэтому делаем замену: $x-2 = e^t$, если $x > 2$, и $x-2 = -e^t$, если $x < 2$. При такой замене независимой переменной x будем иметь:

$$1) \text{ для } x > 2: y'_x = y'_t e^{-t}, y''_{x^2} = (y''_t - y'_t) e^{-2t}.$$

$$2) \text{ для } x < 2: y'_x = -y'_t e^{-t}, y''_{x^2} = (y''_t - y'_t) e^{-2t}.$$

Относительно функции $y(t)$ заданное уравнение принимает вид $y''_t - 4y'_t + 4y = 2 \pm e^t$ (знак “+” для $x > 2$ и знак “-” для $x < 2$). Получили линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида.

Находим сначала общее решение $\bar{y}(t)$ соответствующего однородного уравнения $y''_t - 4y'_t + 4y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad (*)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2. \text{ Следовательно, } \bar{y}(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}.$$

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(t)$ неоднородного уравнения.

1) Рассмотрим уравнение $y''_t - 4y'_t + 4y = 2$. Контрольным числом этого уравнения является $a + ib = 0 + i0 = 0$. Видим, что контрольное число не есть корень характеристического уравнения (*). Поэтому $\tilde{y}_1(t)$ имеет вид $\tilde{y}_1(t) = A \Rightarrow \tilde{y}'_1 = 0, \tilde{y}''_1 = 0$. Подставляя эти выражения для $\tilde{y}_1, \tilde{y}'_1, \tilde{y}''_1$ в уравнение $y''_t - 4y'_t + 4y = 2$, получим $4A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$. Таким образом, $\tilde{y}_1(t) = \frac{1}{2}$.

2) Рассмотрим уравнение $y''_t - 4y'_t + 4y = \pm e^t$. Контрольным числом этого уравнения является $a + ib = 1 + i0 = 1$. Видим, что оно не есть корень характеристического уравнения (*). Поэтому $\tilde{y}_2(t)$ имеет вид

$$\tilde{y}_2(t) = Ae^t \Rightarrow \tilde{y}'_2 = Ae^t, \tilde{y}''_2 = Ae^t.$$

Подставляя эти выражения для $\tilde{y}_2, \tilde{y}_2', \tilde{y}_2''$ в уравнение $y_p'' - 4y_p' + 4y = \pm e^t$, получим $Ae^t \equiv \pm e^t \Rightarrow A = \pm 1$. Таким образом, $\tilde{y}_2(t) = \pm e^t$. А тогда

$$y(t) = \bar{y}(t) + \tilde{y}_1(t) + \tilde{y}_2(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} + \frac{1}{2} \pm e^t.$$

Возвращаясь к прежней независимой переменной x , получаем

$$y(x) = C_1(x-2)^2 + C_2(x-2)^2 \ln|x-2| + \frac{1}{2} + (x-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1(x-2)^2 + C_2(x-2)^2 \ln|x-2| + x - \frac{3}{2}$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 54. Решить уравнение $(2x+3)^3 y'' + 3(2x+3)y' - 6y = 0$.

Решение. Замечаем, что заданное уравнение — уравнение Эйлера. Поэтому делаем замену: 1) $2x+3 = e^t$ для $x > -\frac{3}{2}$ и 2) $2x+3 = -e^t$ для $x < -\frac{3}{2}$. При такой замене независимой переменной x будем иметь:

1) для $x > -\frac{3}{2}$:

$$y'_x = y'_t \cdot 2e^{-t}, y''_{xx} = (y''_{tt} - y'_t) \cdot 4e^{-2t}, y'''_{xx} = (y'''_{tt} - 3y''_{tt} + 2y'_t) \cdot 8e^{-3t};$$

2) для $x < -\frac{3}{2}$:

$$y'_x = -y'_t \cdot 2e^{-t}, y''_{xx} = (y''_{tt} - y'_t) \cdot 4e^{-2t}, y'''_{xx} = -(y'''_{tt} - 3y''_{tt} + 2y'_t) \cdot 8e^{-3t}.$$

Относительно функции $y(t)$ заданное уравнение принимает вид

$$8y'''_{tt} - 24y''_{tt} + 22y'_t - 6y = 0 \Leftrightarrow 4y'''_{tt} - 12y''_{tt} + 11y'_t - 3y = 0.$$

Получили линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Имеем

$$4\lambda^3 - 12\lambda^2 + 11\lambda - 3 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{3}{2}, \lambda_3 = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\bar{y}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{\frac{3}{2}t} + C_3 e^{\frac{1}{2}t}$.

Возвращаясь к прежней независимой переменной x , получим

$$\bar{y}(x) = C_1 |2x + 3| + C_2 |2x + 3|^{3/2} + C_3 |2x + 3|^{1/2}$$

— общее решение заданного уравнения.

Задача 55. Решить уравнение $x^2 y'' - xy' + y = \frac{\ln x}{x} + \frac{x}{\ln x}$.

Решение. Из вида уравнения заключаем, что оно определено для $x > 0$. Видим, что заданное уравнение — уравнение Эйлера. Поэтому делаем замену: $x = e^t$ ($\Rightarrow \ln x = t$). При такой замене будем иметь $y'_x = y'_t e^{-t}$, $y''_{xx} = (y''_t - y'_t) e^{-2t}$. Относительно функции $y(t)$ заданное уравнение принимает вид $y''_t - 2y'_t + y = te^{-t} + \frac{e^t}{t}$. Получили линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами.

Находим сначала общее решение $\bar{y}(t)$ соответствующего однородного уравнения $y''_t - 2y'_t + y = 0$. Имеем

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \quad (*)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Следовательно, $\bar{y}(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t$.

Найдем теперь частное решение $\tilde{y}(t)$ неоднородного уравнения.

1) Рассмотрим уравнение $y''_t - 2y'_t + y = te^{-t}$. (Правая часть этого уравнения есть функция специального вида.) Контрольным числом рассматриваемого неоднородного уравнения является $a + ib = -1 + i \cdot 0 = -1$. Видим, что контрольное число не есть корень характеристического уравнения. Поэтому $\tilde{y}_1(t)$ имеет вид

$$\tilde{y}_1(t) = (At + B)e^{-t} \Rightarrow \tilde{y}'_1 = [-At + (A - B)]e^{-t}, \tilde{y}''_1 = [At + (B - 2A)]e^{-t}.$$

Подставляя эти выражения для $\tilde{y}_1, \tilde{y}'_1, \tilde{y}''_1$ в уравнение $y''_t - 2y'_t + y = te^{-t}$, получаем

$$[4At + 4(B - A)]e^{-t} = te^{-t} \Rightarrow 4At + 4(B - A) = t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l|l} t & 4A = 1 \\ t^0 & 4(B - A) = 0 \end{array} \Rightarrow A = \frac{1}{4}, B = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, $\tilde{y}_1(t) = \frac{1}{4}(t + 1)e^{-t}$.

2) Рассмотрим уравнение $y''_2 - 2y'_2 + y = \frac{e^t}{t}$. Правая часть этого уравнения не является функцией специального вида. Поэтому его частное решение $\tilde{y}_2(t)$ будем искать методом вариации произвольных постоянных. Полагаем $\tilde{y}_2(t) = C_1(t)e^t + C_2(t)te^t$. Функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$ определяем из системы

$$\begin{cases} C'_1(t)e^t + C'_2(t)te^t = 0, \\ C'_1(t)e^t + C'_2(t)(1+t)e^t = \frac{e^t}{t} \end{cases} \Rightarrow C'_1(t) = -1, C'_2(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1(t) = -t, C_2(t) = \ln|t|.$$

Таким образом, $\tilde{y}_2(t) = -te^t + te^t \ln|t|$. А тогда

$$y(t) = \bar{y}(t) + \tilde{y}_1(t) + \tilde{y}_2(t) = C_1e^t + C_2te^t + \frac{t+1}{4}e^{-t} + te^t \ln|t| - te^t.$$

Возвращаясь к прежней независимой переменной x , получим

$$y(x) = C_1x + C_2x \ln x + \frac{1 + \ln x}{4x} + x \ln x (\ln|\ln x| - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1x + x \ln x \left(\tilde{C}_2 + \ln|\ln x| \right) + \frac{1 + \ln x}{4x}.$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

§1. Непосредственное применение ряда Тейлора

Класс дифференциальных уравнений, решения которых выражаются через элементарные функции или интегрирование которых приводится к квадратурам, сравнительно невелик. Очень часто встречаются уравнения, не принадлежащие указанному классу, и тогда приходится прибегать к приближенным методам интегрирования дифференциальных уравнений и к получению решений в виде рядов.

Одним из основных среди этих методов является метод получения решения в виде степенного ряда — ряда Тейлора для этого решения. Изложим сущность этого метода на уравнении первого порядка.

Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

и пусть требуется найти его решение $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее начальному условию

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad (2)$$

т. е. $\varphi(x_0) = y_0$. Будем предполагать, что искомое решение $y = \varphi(x)$ разложимо в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \varphi(x_0) + \frac{\varphi'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \\ & + \frac{\varphi''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Но чтобы написать это разложение решения $y = \varphi(x)$ в ряд Тейлора (3), нужно знать коэффициенты разложения. Отметим, что их можно найти с помощью данного дифференциального уравнения (1) и начального условия (2). В самом деле, в силу начального условия (2), имеем $\varphi(x_0) = y_0$, где y_0 — заданное число.

Если теперь в уравнении (1) положить $x = x_0$ и в соответствии с этим $y = y_0$, то оно определит значение y'_0 производной $\varphi'(x)$ искомой функции $\varphi(x)$ при $x = x_0$ (так как функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (1)), и мы получим

$$y'_0 = \varphi'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Продифференцируем по x обе части уравнения (1), помня, что y и y' являются функциями от x . Будем иметь

$$y'' = f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot y'. \quad (4)$$

Положив теперь в правой части (4) $x = x_0$ и в соответствии с этим $y = y_0$, $y' = y'_0$, мы получим в левой части (4)

$$y''(x_0) = \varphi''(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0) y'_0$$

и т. д. Так последовательно мы определим все коэффициенты в ряде (3).

Отметим, что если функция $f(x, y)$ разложима в ряд по степеням $(x - x_0)$ и $(y - y_0)$ в некотором прямоугольнике

$P = \left\{ \begin{array}{l} x_0 - a < x < x_0 + a, \\ y_0 - b < y < y_0 + b, \end{array} \right.$ то решение $y = \varphi(x)$ дифференциального

уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2), представимо степенным рядом (3). Этот ряд во всяком случае сходится при x , удовлетворяющих условию: $x_0 - h < x < x_0 + h$, где

$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$, а M — наибольшее значение $|f(x, y)|$ в прямо-

угольнике $(\bar{P}) = \left\{ \begin{array}{l} x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \\ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b. \end{array} \right.$

Пример. Найти решение уравнения $y' = x + y^2$, удовлетворяющее условию $y|_{x=0} = 0$ (здесь $x_0 = 0$, $y_0 = 0$).

Ряд Тейлора для искомого решения $y = \varphi(x)$ будет рядом Маклорена:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} x + \frac{\varphi''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

Из начального условия следует, что $\varphi(0) = y_0 = 0$. Из заданного уравнения находим $y'(0) = \varphi'(0) = f(0, 0) = 0$. Дифференцируя по x обе части заданного уравнения, находим

$$y'' = 1 + 2yy' \Rightarrow y''(0) = \varphi''(0) = 1.$$

Дифференцируя еще раз, получаем

$$y''' = 2(y')^2 + 2yy'' \Rightarrow y'''(0) = \varphi'''(0) = 0.$$

Далее,

$$y^{(4)} = 6y'y'' + 2yy''' \Rightarrow y^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(0) = 0,$$

$$y^{(5)} = 6(y'')^2 + 8y'y''' + 2yy^{(4)} \Rightarrow y^{(5)}(0) = \varphi^{(5)}(0) = 6,$$

и т. д. Таким образом, находим

$$y = \varphi(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{6x^5}{5!} + \dots$$

Здесь числа a и b можно брать любыми, так как $f(x, y) = x + y^2$ уже представлена разложенной по степеням x и y при любых x и y .

При этом $M = \max|x + y^2| = a + b^2$ и, следовательно, за сходимость ряда, представляющего решение $y = \varphi(x)$ при $|x| < h$

($h = \min\left\{a, \frac{b}{a + b^2}\right\}$), можно ручаться.

§2. Метод неопределенных коэффициентов

В некоторых случаях для интегрирования дифференциальных уравнений более удобным оказывается метод неопределенных коэффициентов. Особенно удобен он в применении к линейным дифференциальным уравнениям. (В большинстве случаев решения линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами порядка выше первого не выражаются через элементарные функции и квадратуры.) Проиллюстрируем метод неопределенных коэффициентов на уравнении второго порядка вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (1)$$

Предположим, что коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ уравнения (1) представлены степенными рядами:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k. \quad (2)$$

Пусть R_1 и R_2 — радиусы сходимости рядов (2) соответственно. Станем искать решение уравнения (1) также в виде степенного ряда:

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \Rightarrow \quad (3)$$

$$\Rightarrow y'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^{m-1}, y''(x) = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) c_m x^{m-2}.$$

Подставляя выражения для $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ в уравнение (1) и требуя, чтобы это уравнение удовлетворялось, получим тождество:

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) c_m x^{m-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^{m-1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \equiv 0. \quad (4)$$

После перемножения и сложения рядов в левой части тождества (4) мы получим степенной ряд, который должен тождественно равняться нулю. Следовательно, все коэффициенты и свободный член полученного ряда должны равняться нулю. Приравнявая нулю эти коэффициенты, получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} x^0 \mid & 2 \cdot 1 \cdot c_2 + a_0 c_1 + b_0 c_0 = 0, \\ x^1 \mid & 3 \cdot 2 \cdot c_3 + 2a_0 c_2 + a_1 c_1 + b_0 c_1 + b_1 c_0 = 0, \\ x^2 \mid & 4 \cdot 3 \cdot c_4 + 3a_0 c_3 + 2a_1 c_2 + a_2 c_1 + b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 = 0, \\ \dots & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Если оставить c_0 и c_1 произвольными (они будут играть роль произвольных постоянных), то первое уравнение системы (5) позволит определить c_2 , второе затем — c_3 , следующее — c_4 и т. д. Все они выразятся через c_0 и c_1 . Подставив найденные коэффициенты в ряд (3), мы получим решение уравнения (1), которое содержит две произвольные постоянные и будет общим. В вычислительном отношении удобно находить сразу не общее, а два линейно независимых частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, определяемых соответственно начальными условиями

$$\left. \begin{aligned} y_1|_{x=0} &= 1, \quad y_1'|_{x=0} = 0, \\ y_2|_{x=0} &= 0, \quad y_2'|_{x=0} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Выбор начальных условий для $y_1(x)$ означает, что в ряде $y_1(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$, для которого $y_1' = c_1 + 2c_2 x + \dots$, положено $c_0 = 1$ и $c_1 = 0$. Выбор начальных условий для $y_2(x)$ означа-

ет, что в ряде $y_2(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$, для которого $y_2' = c_1 + 2c_2x + \dots$, положено $c_0 = 0$ и $c_1 = 1$.

Отметим, что полученные таким образом $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы, так как их определитель Вронского $W(y_1, y_2)$ отличен от нуля при $x = 0$.

$$W(y_1, y_2)|_{x=0} = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 (\neq 0).$$

Общее решение уравнения (1) можно написать теперь в виде $y = \tilde{C}_1 y_1(x) + \tilde{C}_2 y_2(x)$, где $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ — произвольные постоянные.

Замечание. Выше был показан алгоритм построения ряда (3). При этом не обсуждалось: будет ли ряд сходиться и для каких x он будет решением уравнения (1)?

Ответ на эти вопросы дает следующая теорема, которую мы примем без доказательства.

Пусть ряды (2) имеют радиусы сходимости R_1 и R_2 соответственно и пусть $R = \min\{R_1, R_2\}$. Тогда для $x \in (-R, R)$ построенный указанным выше способом ряд (3) сходится и его сумма является решением уравнения (1). (При этом следует подчеркнуть, что старший коэффициент в уравнении (1) равен единице.)

Пример. Решить уравнение $y'' + xy' + y = 0$.

Решение. Здесь $p(x) = x$, $q(x) = 1$. Ищем решение заданного уравнения в виде

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m.$$

Тогда $y' = \sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^{m-1}$, $y'' = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) c_m x^{m-2}$. Подставляя выражения для y, y', y'' в заданное уравнение, получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) c_m x^{m-2} + x \sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m &\equiv 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_k x^k &\equiv 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

(Здесь в сумме $\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) c_m x^{m-2}$ изменен индекс суммирования.

Положено $m-2 = k$. Тогда $m = k+2$, $m-1 = k+1$; значению $m = 2$ соответствует значение $k = 0$.)

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)c_{k+2} + (k+1)c_k] x^k = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ (коэффициенты степенного ряда равны нулю).

Получаем, таким образом, следующую систему уравнений для определения коэффициентов c_k , $k = 0, 1, 2, \dots$.

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} + (k+1)c_k = 0 \Leftrightarrow (k+2)c_{k+2} + c_k = 0. \quad (*)$$

1) Положим в (*): $c_0 = 1$, $c_1 = 0$; находим

$$c_2 = -\frac{1}{2}, c_3 = 0, c_4 = -\frac{1}{4}c_2 = \frac{1}{2 \cdot 4}, c_5 = 0, c_6 = -\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{2m+1} = 0, c_{2m} = \frac{(-1)^m}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2m)}, m = 1, 2, 3, \dots$$

Следовательно,

$$y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2m)} + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1(x) = 1 + \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 + \dots = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

2) Второе решение, линейно независимое с $y_1(x)$, найдем, положив в (*): $c_0 = 0$, $c_1 = 1$. Будем иметь

$$c_2 = 0, c_4 = 0, c_6 = 0, \dots, c_{2m} = 0,$$

$$c_3 = -\frac{1}{3}, c_5 = \frac{1}{3 \cdot 5}, c_7 = -\frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7}, \dots,$$

$$c_{2m+1} = \frac{(-1)^m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m+1)}, m = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно, $y_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}$. А тогда $y = \tilde{C}_1 y_1(x) + \tilde{C}_2 y_2(x)$,

где $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ — произвольные постоянные, есть общее решение заданного уравнения.

Так как ряды для $p(x)$ и $q(x)$ сходятся при всех конечных значениях x , то и ряды для $y_1(x)$ и $y_2(x)$ сходятся при всех

конечных x , и суммы этих рядов являются решениями заданного уравнения при всех конечных x .

Замечание. Метод неопределенных коэффициентов, показанный здесь для линейного уравнения, применим и для нелинейных уравнений. Отыскивая решение заданного нелинейного уравнения в виде степенного ряда, мы подставляем в это уравнение вместо y сумму ряда (3) и затем, производя операции, показанные уравнением, стремимся получить тождественное равенство степенных рядов, откуда будет следовать равенство коэффициентов при одинаковых степенях x в этих рядах.

Это даст нам уравнения для последовательного определения коэффициентов ряда (3). Так мы получим формально ряд (3). Если затем будет установлено, что он сходится в некотором промежутке, то его сумма будет представлять решение заданного уравнения в этом промежутке.

§3. Уравнение Бесселя.

Его интегрирование с помощью
обобщенного степенного ряда

1°. Уравнением Бесселя называется линейное однородное дифференциальное уравнение вида

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \quad (p \geq 0). \quad (1)$$

Поскольку уравнение (1) не изменяется при замене в нем x на $(-x)$, то станем рассматривать его лишь для положительных значений x . Если записать уравнение (1) в виде

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) y = 0,$$

то заметим, что коэффициенты этого уравнения не разлагаются в ряды по положительным степеням x , и поэтому нельзя утверждать, что можно найти решение уравнения (1) в виде степенного ряда.

Станем искать решение уравнения (1) не в виде степенного ряда, а в виде так называемого *обобщенного степенного ряда*, т. е. в виде

$$y(x) = x^p \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{p+k}, \quad (2)$$

в котором показатель p и все коэффициенты c_k подлежат определению. Заметим, что коэффициент c_0 можно считать отличным от нуля, ибо если бы он (и, может быть, несколько следующих за

ним) был равен нулю, то, вынеся x в некоторой степени за скобки, мы добились бы того, чтобы в получившемся степенном ряде свободный член был отличен от нуля и только бы увеличился показатель ρ . Поэтому мы будем определять ρ , уже считая $c_0 \neq 0$.

Имеем из (2)

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\rho + k) c_k x^{\rho+k-1}, y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\rho + k)(\rho + k - 1) c_k x^{\rho+k-2}.$$

Подставляя выражения для y, y', y'' в уравнение (1), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} (\rho + k)(\rho + k - 1) c_k x^{\rho+k} + \sum_{k=0}^{\infty} (\rho + k) c_k x^{\rho+k} + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{\rho+k+2} - p^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{\rho+k} \equiv 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x^{\rho} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (\rho + k)(\rho + k - 1) c_k x^k + \right. \\ & \left. + \sum_{k=0}^{\infty} (\rho + k) c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2} - p^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right] \equiv 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (\rho + k)(\rho + k - 1) c_k x^k + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} (\rho + k) c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2} - p^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \equiv 0. \end{aligned}$$

В левой части полученного тождества имеем степенной ряд. Следовательно, это тождество возможно лишь тогда, когда все коэффициенты и свободный член степенного ряда равны нулю.

Приравнявая нулю свободный член и коэффициенты при $x, x^2, x^3, \dots, x^m, \dots$, получим равенства:

$$\begin{aligned} x^0 \mid & [\rho(\rho - 1) + \rho - p^2] c_0 = 0, \\ x^1 \mid & [(\rho + 1)\rho + (\rho + 1) - p^2] c_1 = 0, \\ x^2 \mid & [(\rho + 2)(\rho + 1) + (\rho + 2) - p^2] c_2 + c_0 = 0, \\ & \dots \dots \dots \\ x^m \mid & [(\rho + m)(\rho + m - 1) + (\rho + m) - p^2] c_m + c_{m-2} = 0, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Коэффициент c_0 при этом остается произвольным. С помощью признака Даламбера легко показать, что ряд (4) сходится при всех значениях x . Действительно, имеем для любого значения x :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{2k}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k \cdot (2p+2)(2p+4)(2p+6) \dots (2p+2k)}}{\frac{x^{2k-2}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k-2) \cdot (2p+2)(2p+4)(2p+6) \dots (2p+2k-2)}} \right| =$$

$$= x^2 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k(2p+2k)} = 0.$$

Следовательно, сумма ряда (4) определяет вещественное решение уравнения Бесселя при всех x , при которых x^p — вещественное.

2°. **Функции Бесселя первого рода.** Если в соотношении

$$y(x) = c_0 x^p \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k \cdot (2p+2)(2p+4)(2p+6) \dots (2p+2k)}$$

положить $c_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$, то получим решение уравнения Бесселя,

которое называется *функцией Бесселя первого рода* порядка p и обозначается символом $J_p(x)$. Таким образом,

$$J_p(x) = \frac{x^p}{2^p \Gamma(p+1)} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k \cdot (2p+2)(2p+4)(2p+6) \dots (2p+2k)}. \quad (5)$$

Придадим выражению, стоящему в правой части (5), иную форму. Для этого внесем $\frac{x^p}{2^p \Gamma(p+1)}$ под знак суммы. Тогда знаменатель общего члена получаемого ряда может быть преобразован следующим образом:

$$2^p \Gamma(p+1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k \cdot (2p+2)(2p+4) \dots (2p+2k) =$$

$$= 2^p \Gamma(p+1) \cdot 2^k \cdot k! \cdot 2^k (p+1)(p+2) \dots (p+k) =$$

$$= 2^{p+2k} \cdot k! \Gamma(p+1)(p+1)(p+2) \dots (p+k).$$

По основному свойству гамма-функции: $\Gamma(p+1) \cdot (p+1) = \Gamma(p+2)$, $\Gamma(p+2) \cdot (p+2) = \Gamma(p+3)$, ..., $\Gamma(p+k) \cdot (p+k) = \Gamma(p+k+1)$. Следовательно, выражение (5) примет вид

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k}. \quad (6)$$

Получив два корня $\rho_1 = -p$ и $\rho_2 = -p$ уравнения $\rho^2 - p^2 = 0$, мы воспользовались пока одним корнем $\rho_1 = p$ и построили решение $J_p(x)$ уравнения Бесселя в форме (6).

Воспользовавшись вторым корнем $\rho_2 = -p$, мы можем аналогичным образом построить второе решение уравнения Бесселя. Очевидно, оно может быть получено из решения (6) заменой p на $(-p)$, так как само уравнение Бесселя содержит только p^2 и не меняется от замены p на $(-p)$. Это второе решение уравнения Бесселя можно, следовательно, записать в виде

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p}. \quad (7)$$

$J_{-p}(x)$ также называется функцией Бесселя первого рода порядка $-p$.

3°. О составлении общего решения уравнения Бесселя. Так как уравнение Бесселя является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка, то для составления его общего решения достаточно иметь два линейно независимых частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, и тогда общее решение можно написать в виде $y = \tilde{C}_1 y_1(x) + \tilde{C}_2 y_2(x)$, где $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ — произвольные постоянные.

Отметим, что если число p не целое, то решения $J_p(x)$ и $J_{-p}(x)$ уравнения Бесселя будут линейно независимыми (так как их отношение не будет постоянной величиной). Поэтому при p не целом общее решение уравнения Бесселя будет таким:

$$y = \tilde{C}_1 J_p(x) + \tilde{C}_2 J_{-p}(x). \quad (8)$$

Если же p — число целое ($p = n$), то функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ — линейно зависимы, так как имеет место соотношение

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \quad (9)$$

Действительно, имеем $J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}$. Так как

$\Gamma(-n+k+1)$ обращается в бесконечность при $k = 0, 1, \dots, n-1$, то

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n+k+1)}.$$
 Полагая в этой сумме $k = n + m$, получим

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}}{\Gamma(n+m+1)\Gamma(m+1)} = (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}}{m!\Gamma(n+m+1)} = (-1)^n J_n(x).$$

Вследствие установленной линейной зависимости $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ решение уравнения Бесселя $y = \tilde{C}_1 J_n(x) + \tilde{C}_2 J_{-n}(x)$ уже не будет общим. Для составления общего решения нужно наряду с $J_n(x)$ иметь другое решение уравнения Бесселя, линейно независимое с $J_n(x)$.

Рассмотрим при нецелом p функцию:

$$Y_p(x) = \frac{J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi}. \quad (10)$$

Функция (10) является линейной комбинацией решений уравнения Бесселя и вследствие линейности и однородности этого уравнения будет сама являться его решением. Это решение (10) называется *функцией Бесселя второго рода порядка p* .

При $p = n$ (целом) $Y_n(x)$ принимает неопределенный вид, так как числитель и знаменатель дроби (10) обращаются в нуль. (Числитель

$$J_n(x) \cos n\pi - J_{-n}(x) = J_n(x)(-1)^n - (-1)^n J_n(x) = 0,$$

знаменатель $\sin n\pi = 0$.) Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, получим

$$Y_n(x) = \lim_{p \rightarrow n} Y_p(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_p(x)}{\partial p} - (-1)^n \frac{\partial J_{-p}(x)}{\partial p} \right]_{p=n}. \quad (11)$$

Можно показать (на чем мы не останавливаемся), что функция (11) будет решением уравнения Бесселя при $p = n$ линейно независимым с $J_n(x)$. Следовательно, общее решение уравнения Бесселя при $p = n$ (целом) будет таким:

$$y(x) = \tilde{C}_1 J_n(x) + \tilde{C}_2 Y_n(x). \quad (12)$$

Заметим, что формула $y(x) = \tilde{C}_1 J_p(x) + \tilde{C}_2 Y_p(x)$ дает общее решение уравнения Бесселя как при целых, так и при нецелых p .

4°. Основные соотношения между функциями Бесселя. Было получено

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k}.$$

Составим отношение $\frac{J_p(x)}{x^p}$ и найдем производную по x от этого отношения. Будем иметь

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{J_p(x)}{x^p} \right) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(p+k+1)} \cdot \frac{x^{2k}}{2^{p+2k}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2k}{k! \Gamma(p+k+1)} \cdot \frac{x^{2k-1}}{2^{p+2k}}.$$

В последней сумме введем новый индекс суммирования m по формуле $k = m+1$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{J_p(x)}{x^p} \right) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} 2(m+1)}{(m+1)! \Gamma(p+1+m+1)} \cdot \frac{x^{2m+1}}{2^{2m+2+p}} = \\ &= -\frac{1}{x^p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{p+1+2m}}{m! \Gamma(p+1+m+1)} = -\frac{1}{x^p} J_{p+1}(x). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{J_p(x)}{x^p} \right) = -\frac{1}{x^p} J_{p+1}(x). \quad (13)$$

Будем называть формулу (13) *первым основным соотношением* между функциями Бесселя. Из соотношения (13) находим

$$\begin{aligned} J'_p(x) \cdot \frac{1}{x^p} - p \cdot \frac{1}{x^{p+1}} J_p(x) &= -\frac{1}{x^p} J_{p+1}(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow J'_p(x) &= -J_{p+1}(x) + \frac{p}{x} J_p(x). \end{aligned} \quad (14)$$

В частности, $J'_0(x) = -J_1(x)$.

Выведем теперь второе основное соотношение. Для этого составляем произведение $x^p J_p(x)$ и находим производную по x от этого произведения. Будем иметь

$$\frac{d}{dx} (x^p J_p(x)) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(p+k+1)} \cdot \frac{x^{2k+2p}}{2^{2k+p}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(p+k+1)} \cdot \frac{2(k+p)x^{2k+2p-1}}{2^{2k+p}}.$$

Так как $\Gamma(p+k+1) = (p+k)\Gamma(p+k)$, то

$$\frac{d}{dx} (x^p J_p(x)) = x^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(p-1+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p-1} = x^p J_{p-1}(x).$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dx} (x^p J_p(x)) = x^p J_{p-1}(x). \quad (15)$$

Формулу (15) будем называть *вторым основным соотношением* между функциями Бесселя. Из соотношения (15) находим

$$\begin{aligned} x^p J'_p(x) + p x^{p-1} J_p(x) &= x^p J_{p-1}(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow J'_p(x) &= J_{p-1}(x) - \frac{p}{x} J_p(x). \end{aligned} \quad (16)$$

Сопоставляя формулы (14) и (16), получаем соотношение между тремя последовательными функциями Бесселя.

$$\begin{aligned} \frac{p}{x} J_p(x) - J_{p+1}(x) &= J_{p-1}(x) - \frac{p}{x} J_p(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2p}{x} J_p(x) &= J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x). \end{aligned} \quad (17)$$

Формулу (17) будем называть *третьим основным соотношением* между функциями Бесселя. Из формул (14) и (16) путем сложения соответствующих частей этих формул получаем

$$J'_p(x) = J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x). \quad (18)$$

Замечание. Для функций Бесселя второго рода могут быть получены такие же соотношения, как и полученные здесь основные соотношения для функций Бесселя первого рода.

5°. Случай вырождения. Функции Бесселя не относятся к классу элементарных функций. Однако есть случаи, когда они выражаются через элементарные функции (или, как говорят, *вырождаются*).

Рассмотрим функцию $J_{1/2}(x)$. Пользуясь выражением (5), получаем

$$J_{1/2}(x) = \frac{x^{1/2}}{2^{1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k \cdot (1+2)(1+4) \dots (1+2k)} =$$

$$= \frac{1}{2^{1/2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{=\sin x} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x,$$

ибо $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Аналогично можно убедиться, что

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos x. \text{ А тогда из формул (13) и (15) следует, что}$$

функции Бесселя с индексом, равным целому числу плюс $\frac{1}{2}$, будут выражаться через элементарные функции.

Действительно, принимая во внимание формулу (13), находим

$$\begin{aligned} J_{3/2}(x) &= J_{1+\frac{1}{2}}(x) = -x^{1/2} \frac{d}{dx} \left(\frac{J_{1/2}(x)}{x^{1/2}} \right) = -x^{1/2} \frac{d}{dx} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = \\ &= -x^{1/2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{5/2}(x) &= J_{1+\frac{3}{2}}(x) = -x^{3/2} \frac{d}{dx} \left(\frac{J_{3/2}(x)}{x^{3/2}} \right) = -x^{3/2} \frac{d}{dx} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin x}{x^3} - \frac{\cos x}{x^2} \right) \right] = \\ &= -x^{3/2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left[\frac{\cos x}{x^3} - \frac{3 \sin x}{x^4} + \frac{\sin x}{x^2} + \frac{2 \cos x}{x^3} \right] = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \left[\left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \sin x - \frac{3}{x} \cos x \right] \end{aligned}$$

и т. д. Точно так же, принимая во внимание формулу (15), находим

$$\begin{aligned} J_{-3/2}(x) &= J_{-1-\frac{1}{2}}(x) = x^{1/2} \frac{d}{dx} \left[\frac{J_{-1/2}(x)}{x^{1/2}} \right] = x^{1/2} \frac{d}{dx} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\cos x}{x} \right] = \\ &= x^{1/2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(-\frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2} \right) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \left(\sin x + \frac{\cos x}{x} \right). \end{aligned}$$

$$J_{-5/2}(x) = J_{-1-\frac{3}{2}}(x) = x^{3/2} \frac{d}{dx} \left[\frac{J_{-3/2}(x)}{x^{3/2}} \right] = -x^{3/2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x^2} + \frac{\cos x}{x^3} \right) =$$

$$= -x^{3/2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\cos x}{x^2} - \frac{2 \sin x}{x^3} - \frac{\sin x}{x^3} - \frac{3 \cos x}{x^4} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J_{-5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \left[\left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \cos x + \frac{3 \sin x}{x} \right].$$

и т. д.

6°. Обобщенное уравнение Бесселя. Обобщенным уравнением Бесселя называется уравнение

$$x^2 y'' + xy' + (k^2 x^2 - p^2) y = 0, \quad (*)$$

где k — некоторая постоянная, отличная от нуля. Покажем, что заменой независимой переменной x на новую переменную t по формуле $t = kx$ это уравнение приводится к обычному уравнению Бесселя. Действительно, при такой замене имеем

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = ky'_t, \quad y''_{x^2} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \frac{1}{x'_t} = (ky'_t)'_t \cdot k = k^2 y''_{t^2}.$$

Подставляя выражения для y'_x, y''_{x^2} в уравнение (*), получаем

$$k^2 x^2 y''_{t^2} + kxy'_t + (k^2 x^2 - p^2) y = 0 \Rightarrow t^2 y''_{t^2} + ty'_t + (t^2 - p^2) y = 0.$$

Видим, что получено обычное уравнение Бесселя.

При p не целом общим решением полученного уравнения будет

$$y = \tilde{C}_1 J_p(t) + \tilde{C}_2 J_{-p}(t),$$

и, следовательно, общим решением обобщенного уравнения будет

$$y = \tilde{C}_1 J_p(kx) + \tilde{C}_2 J_{-p}(kx).$$

В случае, когда $p = n$ есть целое положительное число или нуль, будем иметь соответственно

$$y = \tilde{C}_1 J_n(t) + \tilde{C}_2 Y_n(t), \quad y = \tilde{C}_1 J_n(kx) + \tilde{C}_2 Y_n(kx).$$

Заметим, что формула $y = \tilde{C}_1 J_p(kx) + \tilde{C}_2 Y_p(kx)$ дает общее решение обобщенного уравнения Бесселя как при целых, так и при не целых p .

7°. Асимптотические формулы для функций Бесселя. В некоторых случаях бывают нужны формулы, приближенно представляющие интересующие нас функции при больших значениях аргумента, с помощью других, более простых функций. Эти формулы обычно называются асимптотическими.

Приведем (без доказательства) асимптотические формулы для функций Бесселя. Эти формулы при положительных значениях аргумента x таковы:

$$J_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O(x^{-3/2}) \quad (x > 0),$$

$$Y_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left(x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O(x^{-3/2}) \quad (x > 0).$$

Написанные формулы означают, что при больших положительных значениях аргумента x разность между функцией $J_p(x)$ и функцией

$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$ и разность между функцией $Y_p(x)$ и функцией

$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left(x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$ есть величины того же порядка, что $x^{-3/2}$.

Следовательно, при больших положительных значениях x функция

$J_p(x)$ ведет себя как функция $\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$, а функция

$Y_p(x)$ — как функция $\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left(x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$. Из этих же асимптотических формул можно сделать вывод о характере графиков функций

$J_p(x)$, $Y_p(x)$: при больших $x > 0$ график $J_p(x)$ близок к графику соответствующей косинусоиды с амплитудой, уменьшающейся по закону $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}$; график $Y_p(x)$ близок к графику соответствующей синусоиды с амплитудой, уменьшающейся по закону $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}$ (рис. 4.1).

Из асимптотических формул видно также, что каждая из функций $J_p(x)$, $Y_p(x)$ имеет бесконечно много вещественных корней, таких, что расстояние между соседними корнями стремится к π , когда значения корней растут.

Замечание 1. Ввиду важной роли, которую играют функции Бесселя в приложениях, для них составлены таблицы.

Замечание 2. Изложенное в настоящем параграфе следует рассматривать лишь как введение в изучение теории функций Бесселя. Подробное изучение многих других замечательных

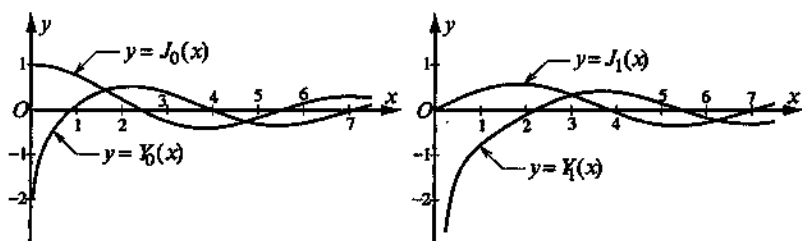


Рис. 4.1

свойств функций Бесселя читатель найдет в “Курсе высшей математики” В.И. Смирнова (т. II, 1948, с. 141–146, и т. III, ч. 2, 1949, с. 519–564), а также в многочисленной специальной литературе о функциях Бесселя.

8°. Примеры и задачи к §3.

Задача 1. Решить уравнение $y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{1}{9x^2}\right)y = 0$.

Решение. Перепишем заданное уравнение в виде

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0.$$

Видим, что заданное уравнение является уравнением Бесселя ($p = \frac{1}{3}$). Следовательно, общее решение уравнения будет таким:

$$y = \tilde{C}_1 J_{1/3}(x) + \tilde{C}_2 J_{-1/3}(x).$$

Задача 2. Решить уравнение $x^2 y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$.

Решение. Перепишем заданное уравнение в виде

$$x^2 y'' + xy' + \left(2^2 x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0.$$

Видим, что заданное уравнение является обобщенным уравнением Бесселя ($k = 2$, $p = \frac{1}{2}$). Следовательно, общее решение уравнения будет таким:

$$y = \tilde{C}_1 J_{1/2}(2x) + \tilde{C}_2 J_{-1/2}(2x).$$

Задача 3. Решить уравнение $x^2 y'' + xy' + 4(x^4 - 2)y = 0$.

Решение. Положим $x^2 = t$. Тогда

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot 2x, y''_{x^2} = (y'_t \cdot 2x)'_x = \\ &= (y'_t)'_x \cdot 2x + y'_t \cdot 2 = 2x(y'_t)'_t \cdot t'_x + 2y'_t \Rightarrow \\ &\Rightarrow y''_{x^2} = y''_{t^2} \cdot 4x^2 + 2y'_t = y''_{t^2} \cdot 4t + 2y'_t. \end{aligned}$$

Подставляя выражения для y'_x, y''_{x^2} в заданное уравнение, получаем

$$t(y''_{t^2} \cdot 4t + 2y'_t) + 2ty'_t + 4(t^2 - 2)y = 0 \Rightarrow t^2 y''_{t^2} + ty'_t + (t^2 - 2)y = 0.$$

Видим, что полученное уравнение является уравнением Бесселя ($p = \sqrt{2}$). Следовательно, общее решение полученного уравнения будет таким:

$$y = \tilde{C}_1 J_{\sqrt{2}}(t) + \tilde{C}_2 J_{-\sqrt{2}}(t).$$

Возвращаясь к прежней независимой переменной x , получим общее решение заданного уравнения. Оно будет таким:

$$y = \tilde{C}_1 J_{\sqrt{2}}(x^2) + \tilde{C}_2 J_{-\sqrt{2}}(x^2).$$

Задача 4. Пусть дано уравнение Бесселя:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Известно, что функция $J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k}$ есть решение данного уравнения. Доказать, что функция

$Y_p(x) = J_p(x) \int \frac{dx}{x J_p^2(x)}$ также является решением этого уравнения.

► Имеем

$$\begin{aligned} Y'_p(x) &= J'_p(x) \int \frac{dx}{x J_p^2(x)} + J_p(x) \frac{1}{x J_p^2(x)} \Rightarrow \\ \Rightarrow Y'_p(x) &= J'_p(x) \int \frac{dx}{x J_p^2(x)} + \frac{1}{x J_p(x)} = \frac{1}{J_p(x)} \left[J'_p(x) Y_p(x) + \frac{1}{x} \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J_p(x)Y_p'(x) = J_p'(x)Y_p(x) + \frac{1}{x} \Rightarrow \quad (*)$$

$$\Rightarrow J_p'(x) = J_p(x) \frac{Y_p'(x)}{Y_p(x)} - \frac{1}{xY_p(x)}.$$

Дифференцируя обе части равенства (*), находим

$$\begin{aligned} J_p'(x)Y_p'(x) + J_p(x)Y_p''(x) &= J_p''(x)Y_p(x) + J_p'(x)Y_p'(x) - \frac{1}{x^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow J_p''(x) &= J_p(x) \cdot \frac{Y_p''(x)}{Y_p(x)} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{Y_p(x)}. \end{aligned}$$

У нас $J_p(x)$ — решение данного уравнения Бесселя. Поэтому должно быть

$$J_p''(x) + \frac{1}{x} J_p'(x) + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) J_p(x) \equiv 0.$$

Подставляя здесь вместо $J_p'(x)$, $J_p''(x)$ найденные для них выражения, получим

$$\begin{aligned} J_p(x) \cdot \frac{Y_p''(x)}{Y_p(x)} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{Y_p(x)} + \frac{1}{x} J_p(x) \cdot \frac{Y_p'(x)}{Y_p(x)} - \\ - \frac{1}{x^2 Y_p(x)} + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) J_p(x) \equiv 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow J_p(x) \frac{1}{Y_p(x)} \left[Y_p''(x) + \frac{1}{x} Y_p'(x) + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) Y_p(x) \right] \equiv 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow Y_p''(x) + \frac{1}{x} Y_p'(x) + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) Y_p(x) \equiv 0. \end{aligned}$$

А это означает, что функция $Y_p(x) = J_p(x) \int \frac{dx}{xJ_p^2(x)}$ является решением данного уравнения Бесселя. Отметим, что решения $Y_p(x)$ и $J_p(x)$ линейно независимы, ибо их отношение не является постоянной величиной. ◀

Задача 5. Решить уравнение $xy'' + y' + xy = 0$.

Решение. Видим, что заданное уравнение является частным случаем уравнения Бесселя, когда $p = 0$. Одним из решений этого уравнения является функция Бесселя первого рода порядка $p = 0$, т. е. функция $J_0(x)$. Вторым решением заданного уравнения, линейно независимым с $J_0(x)$, будет

$$Y_0(x) = J_0(x) \int \frac{dx}{xJ_0^2(x)}.$$

Имеем

$$J_0(x) = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{xJ_0^2(x)} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x^2}{2} + \dots \right) = \frac{1}{x} + \frac{x}{2} + \dots; \int \frac{dx}{xJ_0^2(x)} = \ln x + \frac{x^2}{2^2} + \dots;$$

$$Y_0(x) = J_0(x) \ln x + J_0(x) \left(\frac{x^2}{2^2} + \dots \right) \Rightarrow Y_0(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

где $c_0 = 0$, $c_1 = 0$. Подставив $Y_0(x)$ в уравнение, получим

$$\begin{aligned} x \left[J_0'(x) \ln x + 2J_0'(x) \frac{1}{x} - J_0(x) \cdot \frac{1}{x^2} \right] + J_0'(x) \ln x + J_0(x) \frac{1}{x} + xJ_0(x) \ln x + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} \equiv 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln x \cdot \underbrace{[xJ_0'(x) + J_0'(x) + xJ_0(x)]}_{=0} + 2J_0'(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2} x^{k+1} + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} \equiv 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} \equiv -2J_0'(x) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} [(k+1)kc_{k+1} + (k+1)c_{k+1} + c_{k-1}]x^k \equiv -2 \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \Rightarrow$$

$$(c_0=0, c_1=1)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} [(k+1)^2 c_{k+1} + c_{k-1}]x^k \equiv 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!(k-1)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях буквы x в левой и правой частях тождества, получим для определения коэффициентов c_k следующие уравнения:

$$c_1 = 0; (2m+1)^2 c_{2m+1} + c_{2m-1} = 0, m = 1, 2, \dots;$$

$$c_0 = 0; 4(m+1)^2 c_{2m+2} + c_{2m} = \frac{(-1)^m}{(m+1)! \cdot m! \cdot 2^m}, m = 0, 1, 2, \dots$$

Из этих уравнений находим, что коэффициенты c_k с нечетными номерами равны нулю, а c_k с четными номерами равны соответственно:

$$c_0 = 0, c_2 = \frac{1}{2^2}, c_4 = -\frac{1}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right), c_6 = \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right),$$

$$c_{2k} = (-1)^{k+1} \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2k)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}\right), \dots$$

Таким образом, будем иметь

$$Y_0(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2k)^2} \cdot x^{2k}.$$

НОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§1. Основные понятия и определения

1°. *Нормальными системами обыкновенных дифференциальных уравнений* называются системы вида

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (\tilde{I})$$

Здесь n — фиксированное число ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$) (n — порядок системы),

x — вещественная независимая переменная,

$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — искомые вещественные функции,

$f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ — известные функции, определенные и непрерывные в некоторой области $(D) \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Если ввести в рассмотрение вектор-функции

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad F(x, Y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix},$$

то система (1) запишется в виде

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y). \quad (1)$$

В (1): $x \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathbb{R}^n$, $F(x, Y) \in C(D)$, где $(D) \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

2°. **Определение.** Решением системы (1) в $\langle a, b \rangle$ называют вся-

кую вектор-функцию $Y(x) = \varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \dots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$, $x \in \langle a, b \rangle$, обладаю-

щую свойствами:

$$1) \text{ для любого } x \in \langle a, b \rangle \text{ существует } \varphi'(x) = \begin{pmatrix} \varphi'_1(x) \\ \varphi'_2(x) \\ \dots \\ \varphi'_n(x) \end{pmatrix};$$

2) для любого $x \in \langle a, b \rangle$ точка $(x, \varphi(x)) \in (D)$;

3) для любого $x \in \langle a, b \rangle$ $\varphi'(x) = F(x, \varphi(x))$.

Заметим, что вектор-функция $F(x, \varphi(x)) \in C(\langle a, b \rangle)$ как суперпозиция непрерывных функций. А тогда из свойства 3) следует, что $\varphi'(x) \in C(\langle a, b \rangle)$, то есть любое решение системы (1) в $\langle a, b \rangle$ непрерывно дифференцируемо.

3°. **Задача Коши** для системы (1) состоит в следующем: среди всех решений системы (1) найти такое решение $Y = \varphi(x)$, которое удовлетворяет условию

$$Y(x)|_{x=x_0} = Y_0. \quad (2)$$

В (2) x_0, Y_0 — любые, но такие, что точка $(x_0, Y_0) \in (D)$.

4°. Пусть дана система $\frac{dY}{dx} = F(x, Y)$ (1) и дано начальное условие $Y(x)|_{x=x_0} = Y_0$ (2). Пусть $Y = \tilde{\varphi}(x)$, $x \in I_{\tilde{\delta}} = (x_0 - \tilde{\delta}, x_0 + \tilde{\delta})$, и $Y = \tilde{\tilde{\varphi}}(x)$, $x \in I_{\tilde{\tilde{\delta}}} = (x_0 - \tilde{\tilde{\delta}}, x_0 + \tilde{\tilde{\delta}})$, — любые два решения задачи

(1) — (2). Тогда: если существует интервал $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ такой, что $\tilde{\Phi}(x) \equiv \tilde{\bar{\Phi}}(x)$, $x \in I_\delta$, то говорят, что задача (1) — (2) имеет единственное решение. Точку $(x_0, Y_0) \in (D)$ называют в этом случае точкой единственности системы (1).

Пусть область $(D_1) \subset (D)$ и пусть каждая точка $(x, Y) \in (D_1)$ является точкой единственности системы (1). Тогда (D_1) называют областью единственности системы (1).

§2. Некоторые сведения из теории вектор-функций

Напомним некоторые факты из теории вектор-функций, используемые при рассмотрении систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

1°. Пусть R^n — n -мерное векторное пространство. Пусть век-

тор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — любой из R^n . За *норму* вектора X принимают по

определению

$$\|X\| = \max_{(i=1, n)} \{|x_i|\}.$$

2°. *Расстояние* $\rho(\tilde{X}, \tilde{\tilde{X}})$ между любыми двумя точками $\tilde{X}$ и $\tilde{\tilde{X}}$ из R^n определяют соотношением

$$\rho(\tilde{X}, \tilde{\tilde{X}}) = \|\tilde{\tilde{X}} - \tilde{X}\|.$$

3°. Пусть $X^{(0)}$ — любая фиксированная точка из R^n . δ — *окрестность* точки $X^{(0)}$ определяется соотношением

$$U_\delta(X^{(0)}) = \{X, \|X - X^{(0)}\| < \delta\}.$$

Так как $\|X - X^{(0)}\| < \delta \Leftrightarrow |x_i - x_i^{(0)}| < \delta, i = \overline{1, n}$, то заключаем, что $U_\delta(X^{(0)})$ — n -мерный куб с центром в точке $X^{(0)}$ и ребром 2δ .

4°. Пусть $\{X^{(k)}\}_{k \in N}$ — последовательность векторов из R^n . Пусть $X^{(0)}$ — фиксированная точка в R^n . Говорят, что последователь-

ность $\{X^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ сходится к $X^{(0)}$ при $k \rightarrow \infty$, и пишут $\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = X^{(0)}$, если любому $\varepsilon > 0$ отвечает номер K такой, что как только $k > K$, так сейчас же $\|X^{(k)} - X^{(0)}\| < \varepsilon$. Отметим, что $\|X^{(k)} - X^{(0)}\| < \varepsilon \Leftrightarrow |x_i^{(k)} - x_i^{(0)}| < \varepsilon, i = \overline{1, n}$. Из этого следует, что сходимость в пространстве $\mathbb{R}^n$ осуществляется покомпонентно, то есть

$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = X^{(0)}\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i^{(0)}, i = \overline{1, n}\right).$$

5°. Введем в рассмотрение вектор $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$. Здесь

$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — функции от x , определенные в некотором промежутке $\langle a, b \rangle$. $Y(x)$ называется *вектор-функцией* скалярного аргумента x , определенной в $\langle a, b \rangle$.

Говорят, что вектор-функция $Y(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$, если в этой точке непрерывны одновременно функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$.

Производная вектор-функции $Y(x)$ в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$ опреде-

ляется соотношением $Y'(x_0) = \begin{pmatrix} y_1'(x_0) \\ y_2'(x_0) \\ \dots \\ y_n'(x_0) \end{pmatrix}$. $Y'(x_0)$ существует, если

существуют одновременно $y_1'(x_0), y_2'(x_0), \dots, y_n'(x_0)$.

Пусть вектор-функция $Y(x)$ определена в $[a, b]$. $\int_a^b Y(x) dx$ определяется соотношением

$$\int_a^b Y(x) dx = \begin{pmatrix} \int_a^b y_1(x) dx \\ \int_a^b y_2(x) dx \\ \dots \\ \int_a^b y_n(x) dx \end{pmatrix}.$$

$\int_a^b Y(x) dx$ существует, если существуют одновременно $\int_a^b y_1(x) dx$, $\int_a^b y_2(x) dx$, ..., $\int_a^b y_n(x) dx$.

Отметим, что $\left\| \int_a^b Y(x) dx \right\| \leq \left| \int_a^b \|Y(x)\| dx \right|$. В самом деле, имеем

$$\left\| \int_a^b Y(x) dx \right\| = \max_{(i=1, n)} \left| \int_a^b y_i(x) dx \right| = \left| \int_a^b y_{i_0}(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |y_{i_0}(x)| dx \right| \leq \left| \int_a^b \|Y(x)\| dx \right|.$$

6°. Рассмотрим вектор-функцию $F(x, Y)$ вида

$$F(x, Y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

Здесь $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Будем считать, что

$f_i(x, y_1, \dots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$, определены в некоторой области $(D) \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Частные производные вектор-функции $F(x, Y)$: $\frac{\partial F(x, Y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial F(x, Y)}{\partial y_i}$ ($i = \overline{1, n}$) определяются соотношениями:

$$\frac{\partial F(x, Y)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial F(x, Y)}{\partial y_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_i} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_i} \\ \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_i} \end{pmatrix} \quad (i = \overline{1, n}).$$

Символами $\frac{\partial F(x, Y)}{\partial(x, Y)}$ и $\frac{\partial F(x, Y)}{\partial Y}$ обозначают соответственно:

$$\frac{\partial F(x, Y)}{\partial(x, Y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \quad - \text{ матрица Якоби,}$$

$$\frac{\partial F(x, Y)}{\partial Y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

7°. Теорема о полном приращении вектор-функции.

Пусть

1) вектор-функция $F(x, Y) \in C(D)$ ($(D) \subset \mathbb{R}^{n+1}$);

2) область (D) выпукла по Y , т.е. для любых двух точек $(x, \tilde{Y})$

и $(x, \tilde{\tilde{Y}})$ из (D) оказывается, что отрезок, их соединяющий, лежит в (D) ;

$$3) \frac{\partial F(x, Y)}{\partial Y} \in C(D).$$

Тогда для любых двух точек $(x, \tilde{Y})$ и $(x, \tilde{\tilde{Y}})$ из (D) справедливо соотношение

$$F(x, \tilde{\tilde{Y}}) - F(x, \tilde{Y}) = \int_0^1 \frac{\partial F(x, \tilde{Y} + t(\tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y}))}{\partial Y} \cdot (\tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y}) dt. \quad (1)$$

► Пусть $(x, \tilde{Y})$ и $(x, \tilde{\tilde{Y}})$ — любые две точки из (D) . Соединим их прямолинейным отрезком. Его параметрические уравнения будут такими:

$$\begin{cases} x = x; \\ Y = \tilde{Y} + t \cdot (\tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y}), \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

В точках этого прямолинейного отрезка будем иметь

$$F(x, Y) = F(x, \tilde{Y} + t \cdot (\tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y})) = \psi(t), \quad t \in [0, 1].$$

$\psi(t)$ — векторная функция скалярного аргумента t :

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \dots \\ \psi_n(t) \end{pmatrix}; \quad \psi_i(t) = f_i(x, \tilde{y}_1 + t(\tilde{\tilde{y}}_1 - \tilde{y}_1), \dots, \tilde{y}_n + t(\tilde{\tilde{y}}_n - \tilde{y}_n)) \quad (i = \overline{1, n}).$$

Отметим, что

- 1) $\psi(t) \in C([0, 1])$ как суперпозиция непрерывных функций.
- 2) $\psi(t)$ имеет на $[0, 1]$ непрерывную производную

$$\psi'(t) = \begin{pmatrix} \psi'_1(t) \\ \dots \\ \psi'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial y_j}(x, \tilde{Y} + t(\tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y})) \cdot (\tilde{\tilde{y}}_j - \tilde{y}_j) \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_n}{\partial y_j}(x, \tilde{Y} + t(\tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y})) \cdot (\tilde{\tilde{y}}_j - \tilde{y}_j) \end{pmatrix}.$$

Из выражения для $\psi'(t)$ видим, что $\psi'(t) \in C([0, 1])$. А тогда для функции $\psi(t)$ справедлива формула Ньютона — Лейбница:

$$\psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \psi'(t) dt,$$

то есть

$$\begin{aligned} \psi_i(1) - \psi_i(0) &= f_i(x, \tilde{Y}) - f_i(x, \tilde{Y}) = \int_0^1 \psi'_i(t) dt = \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_j} (x, \tilde{Y} + t(\tilde{Y} - \tilde{Y})) \cdot (\tilde{y}_j - \tilde{y}_j) \right) dt; \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2)$$

Замечаем, что (2) есть покомпонентная запись формулы (1). Следовательно, формула (1) установлена. ◀

8°. Определение. Говорят, что вектор-функция $F(x, Y)$ удовлетворяет в области $(D) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ условию Липшица по Y , если существует число $L > 0$, такое, что для любых двух точек $(x, \tilde{Y})$ и $(x, \tilde{Y})$ из (D) справедливо соотношение

$$\|F(x, \tilde{Y}) - F(x, \tilde{Y})\| \leq L \cdot \|\tilde{Y} - \tilde{Y}\|.$$

Обозначение: $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(D)$.

Определение. Говорят, что вектор-функция $F(x, Y)$ удовлетворяет в области $(D) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ условию Липшица по Y локально, если для любой точки $(x_0, Y_0) \in (D)$ существует окрестность $U(x_0, Y_0) \subset (D)$, такая, что

$$F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(U(x_0, Y_0)).$$

Пишут: $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(D)$, локально.

На вопрос, при каких условиях функция $F(x, Y)$ наверняка удовлетворяет в области (D) условию Липшица по Y локально, ответ дает следующая теорема.

Теорема. Пусть $F(x, Y)$ определена и непрерывна в области $(D) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $\frac{\partial F(x, Y)}{\partial Y} \in C(D)$. Тогда $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(D)$ локально.

► Возьмем в области (D) любую точку (x_0, Y_0) . Рассмотрим окрестность этой точки: $U_\delta(x_0, Y_0)$. Будем считать δ столь малым, чтобы было $\bar{U}_\delta(x_0, Y_0) \subset (D)$ (это возможно, ибо (D) — область). Покажем, что $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(U_\delta(x_0, Y_0))$.

$$\text{По условию } \frac{\partial F(x, Y)}{\partial Y} \in C(D) \Rightarrow \frac{\partial F(x, Y)}{\partial Y} \in C(\bar{U}_\delta(x_0, Y_0)) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f_i(x, Y)}{\partial y_j} \in C(\bar{U}_\delta(x_0, Y_0)), i, j = \overline{1, n} \Rightarrow \text{существует число } K > 0, \text{ та-}$$

$$\text{кое, что } \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right| \leq K \text{ в } \bar{U}_\delta(x_0, Y_0) \text{ для любых } i, j = \overline{1, n} \Rightarrow \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right| \leq K \text{ в}$$

$$U_\delta(x_0, Y_0) \text{ при любых } i, j = \overline{1, n}.$$

Очевидно, что $U_\delta(x_0, Y_0)$ — выпуклая область (в частности, она выпуклая по Y).

Видим, что для $F(x, Y)$ в $U_\delta(x_0, Y_0)$ выполнены все условия теоремы о полном приращении вектор-функции. Поэтому для любых двух точек $(x, \tilde{Y})$ и $(x, \bar{Y})$ из $U_\delta(x_0, Y_0)$ будем иметь

$$\begin{aligned} F(x, \tilde{Y}) - F(x, \bar{Y}) &= \int_0^1 \frac{\partial F(x, \bar{Y} + t \cdot (\tilde{Y} - \bar{Y}))}{\partial Y} \cdot (\tilde{Y} - \bar{Y}) dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \|F(x, \tilde{Y}) - F(x, \bar{Y})\| &\leq \int_0^1 \left\| \frac{\partial F(x, \bar{Y} + t \cdot (\tilde{Y} - \bar{Y}))}{\partial Y} \cdot (\tilde{Y} - \bar{Y}) \right\| dt = \\ &= \int_0^1 \max_{i=1, n} \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \cdot (\tilde{y}_j - \bar{y}_j) \right| dt \leq \int_0^1 K \cdot n \cdot \|\tilde{Y} - \bar{Y}\| dt = \\ &= \underbrace{K \cdot n}_{=L \text{ - обозн.}} \cdot \|\tilde{Y} - \bar{Y}\| = L \cdot \|\tilde{Y} - \bar{Y}\| \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(U_\delta(x_0, Y_0)).$$

Итак, показано, что для любой точки $(x_0, Y_0) \in (D)$ существует окрестность $U_\delta(x_0, Y_0) \subset (D)$, такая, что $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(U_\delta(x_0, Y_0)) \Rightarrow F(x, Y)$ удовлетворяет условию Липшица по Y локально. ◀

§3. Существование и единственность решения задачи Коши нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

1°. Пусть даны система

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y), \quad F(x, Y) \in C(D), \quad (1)$$

и начальное условие

$$Y|_{x=x_0} = Y_0, \quad (x_0, Y_0) \in (D). \quad (2)$$

Будем искать решение задачи (1) — (2) методом последовательных приближений Пикара.

Положим $\psi_0(x) = Y_0$, $x \in \mathbb{R}$ ($\psi_0(x)$ — “нулевое” приближение). Существует интервал (α_1, β_1) , содержащий точку x_0 , такой, что для любого $x \in (\alpha_1, \beta_1)$ будет: точка $(x, \psi_0(x)) \in (D)$. Положим

$$\psi_1(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x F(x, \psi_0(x)) dx, \quad x \in (\alpha_1, \beta_1).$$

Так как $(x, \psi_0(x)) \in (D)$ для любого $x \in (\alpha_1, \beta_1)$, то $F(x, \psi_0(x)) \in$

$C((\alpha_1, \beta_1))$ и, следовательно, $\int_{x_0}^x F(x, \psi_0(x)) dx$ существует ($\psi_1(x)$ — “первое” приближение).

Имеем

$$\begin{aligned} \psi_1'(x) = F(x, \psi_0(x)) &\Rightarrow \psi_1'(x_0) = F(x_0, \psi_0(x_0)) = F(x_0, Y_0); \\ \psi_1(x_0) &= Y_0, \end{aligned}$$

то есть кривая $Y = \psi_1(x)$ проходит через точку (x_0, Y_0) и такая, что $Y'(x_0) = \psi_1'(x_0) = F(x_0, Y_0)$.

Существует интервал (α_2, β_2) , содержащий точку x_0 , такой, что точка $(x, \psi_1(x)) \in (D)$ для любого $x \in (\alpha_2, \beta_2)$. Положим

$$\psi_2(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x F(x, \psi_1(x)) dx, \quad x \in (\alpha_2, \beta_2).$$

Так как $(x, \psi_1(x)) \in (D)$ для любого $x \in (\alpha_2, \beta_2)$, то $F(x, \psi_1(x)) \in C((\alpha_2, \beta_2))$ и, следовательно, $\int_{x_0}^x F(x, \psi_1(x)) dx$ существует ($\psi_2(x)$ — “второе” приближение).

Имеем

$$\psi_2'(x) = F(x, \psi_1(x)) \Rightarrow \psi_2'(x_0) = F(x_0, \psi_1(x_0)) = F(x_0, Y_0);$$

$$\psi_2(x_0) = Y_0,$$

то есть кривая $Y = \psi_2(x)$ проходит через точку (x_0, Y_0) и такая, что $Y'(x_0) = \psi_2'(x_0) = F(x_0, Y_0)$.

Продолжая этот процесс аналогичным образом дальше, получим

$$\psi_k(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x F(x, \psi_{k-1}(x)) dx, \quad x \in (\alpha_k, \beta_k),$$

где $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$; (α_k, β_k) — некоторый интервал, содержащий точку x_0 и такой, что точка $(x, \psi_{k-1}(x)) \in (D)$ для любого $x \in (\alpha_k, \beta_k)$ ($\psi_k(x)$ — k -е приближение). И здесь кривая $Y = \psi_k(x)$ проходит через точку (x_0, Y_0) и такая, что $Y'(x_0) = \psi_k'(x_0) = F(x_0, Y_0)$.

Лемма (о приближениях Пикара). Пусть числа $a > 0$, $b > 0$ — такие, что параллелепипед

$$(\bar{P}_{ab}) = \{(x, Y), |x - x_0| \leq a, \|Y - Y_0\| \leq b\} \subset (D).$$

Пусть $M = \max_{(\bar{P}_{ab})} \|F(x, Y)\|$, $h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$. Тогда все приближения

Пикара $\psi_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ определены и непрерывны на отрезке $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ и удовлетворяют неравенству $\|\psi_k(x) - Y_0\| \leq b$, $x \in I$. (Это означает, что, графики вектор-функций $Y = \psi_k(x)$, $x \in I$, $k = 0, 1, 2, \dots$ лежат целиком в $(\bar{P}_{ab})$.)

► Рассмотрим $Y = \psi_0(x)$ ($\psi_0(x) \equiv Y_0$, $x \in \mathbb{R}$). Это приближение определено и непрерывно на всей вещественной оси;

следовательно, оно определено и непрерывно на отрезке I . Для $x \in I$ имеем

$$\|\psi_0(x) - Y_0\| = \|Y_0 - Y_0\| \leq b.$$

Допустим, что $Y = \psi_{k-1}(x)$ определено и непрерывно на I и удовлетворяет неравенству

$$\|\psi_{k-1}(x) - Y_0\| \leq b, x \in I.$$

Имеем тогда

$$\psi_k(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x F(x, \psi_{k-1}(x)) dx.$$

Точки $(x, \psi_{k-1}(x)) \in (\bar{P}_{ab})$, для любого $x \in I \Rightarrow F(x, \psi_{k-1}(x)) \in C(I)$ как суперпозиция непрерывных функций $\Rightarrow \psi_k(x) \in C(I)$.

Имеем далее, для $x \in I$

$$\begin{aligned} \|\psi_k(x) - Y_0\| &= \left\| \int_{x_0}^x F(x, \psi_{k-1}(x)) dx \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x \|F(x, \psi_{k-1}(x))\| dx \right| \leq M \cdot \left| \int_{x_0}^x dx \right| = M \cdot |x - x_0| \leq M \cdot h \leq b, \end{aligned}$$

ибо $h \leq \frac{b}{M}$.

Видим, что переход от $k-1$ к k сделан. Для $\psi_0(x)$ утверждение леммы проверено непосредственно. В силу перехода от $k-1$ к k , утверждение леммы будет справедливо для $\psi_k(x)$, где $k = 1, 2, \dots$. ◀

2°. Теорема Пикара. Пусть имеется система $\frac{dY}{dx} = F(x, Y)$.

Пусть $F(x, Y) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(D)$ — локально. Тогда для любой точки $(x_0, Y_0) \in (D)$ задача (1) — (2) имеет решение $Y = \varphi(x)$, $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, $h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$, причем это решение задачи (1) — (2) единственное.

► Возьмем произвольную точку $(x_0, Y_0) \in (D)$. По условию, $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(D)$ — локально $\Rightarrow$ существует $U_\delta(x_0, Y_0)$, такая, что $U_\delta(x_0, Y_0) \subset (D)$, и $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(U_\delta(x_0, Y_0))$. Пусть $L > 0$ — постоянная Липшица для $F(x, Y)$ в $U_\delta(x_0, Y_0)$. Возьмем числа a, b ($a > 0, b > 0$), такие, что $(\bar{P}_{ab}) \subset U_\delta(x_0, Y_0)$. Пусть $M = \max_{(\bar{P}_{ab})} \|F(x, Y)\|$, $h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$. По лемме, доказанной выше, все приближения Пикара

$$\psi_0(x) \equiv Y_0, \psi_k(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x F(x, \psi_{k-1}(x)) dx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

определены и непрерывны на отрезке $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ и удовлетворяют условию

$$\|\psi_k(x) - Y_0\| \leq b.$$

1) Покажем, что $\{\psi_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ сходится равномерно относительно x на I . Для этого рассмотрим функциональный ряд

$$\psi_0(x) + [\psi_1(x) - \psi_0(x)] + \dots + [\psi_k(x) - \psi_{k-1}(x)] + \dots \quad (3)$$

Замечаем, что $S_0(x) = \psi_0(x)$, $S_1(x) = \psi_1(x)$, ..., $S_k(x) = \psi_k(x)$, ... Значит, равномерная сходимость последовательности $\{\psi_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$, $x \in I$, равносильна равномерной сходимости ряда (3) на I . Установим равномерную сходимость ряда (3) на I . Для этого произведем оценку членов ряда (3). Имеем

$$\|\psi_0(x)\| = \|Y_0\|, x \in I.$$

$$\|\psi_1(x) - \psi_0(x)\| = \|\psi_1(x) - Y_0\| = \left\| \int_{x_0}^x F(x, Y_0) dx \right\| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^x \|F(x, Y_0)\| dx \right| \leq \underline{M \cdot |x - x_0|} \leq M \cdot h = \frac{M}{L} \cdot (Lh), x \in I.$$

Имеем, далее:

$$\begin{aligned} \|\psi_2(x) - \psi_1(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^x (F(x, \psi_1(x)) - F(x, \psi_0(x))) dx \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x \left\| \underbrace{F(x, \psi_1(x))}_{(\bullet) \in (\bar{P}_{ab})} - \underbrace{F(x, \psi_0(x))}_{(\bullet) \in (\bar{P}_{ab})} \right\| dx \right| \leq L \cdot \left| \int_{x_0}^x \frac{\|\psi_1(x) - \psi_0(x)\|}{\leq M|x-x_0|} dx \right| \leq \\ &\leq L \cdot M \cdot \left| \int_{x_0}^x |x - x_0| dx \right| = L \cdot M \frac{|x - x_0|^2}{2} \leq \frac{ML}{2} \cdot h^2 = \frac{M}{L} \cdot \frac{(L \cdot h)^2}{2!}, x \in I. \end{aligned}$$

Допустим, что

$$\|\psi_k(x) - \psi_{k-1}(x)\| \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{L^k}{k!} |x - x_0|^k \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{L^k \cdot h^k}{k!}, x \in I. \quad (4)$$

Но тогда

$$\begin{aligned} \|\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^x (F(x, \psi_k(x)) - F(x, \psi_{k-1}(x))) dx \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x \|F(x, \psi_k(x)) - F(x, \psi_{k-1}(x))\| dx \right| \leq L \cdot \left| \int_{x_0}^x \|\psi_k(x) - \psi_{k-1}(x)\| dx \right| \leq \\ &\leq \frac{M}{L} \cdot \frac{L^{k+1}}{k!} \left| \int_{x_0}^x |x - x_0|^k dx \right| \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{L^{k+1}}{(k+1)!} \cdot |x - x_0|^{k+1} \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{(L \cdot h)^{k+1}}{(k+1)!}, x \in I. \end{aligned}$$

Видим, что переход от k к $k+1$ сделан. Значит, оценка (4) справедлива на I для любого $k \in \mathbb{N}$. Введем в рассмотрение ряд

$$\|Y_0\| + \frac{M}{L} \cdot \frac{(Lh)}{1!} + \frac{M}{L} \cdot \frac{(Lh)^2}{2!} + \dots + \frac{M}{L} \cdot \frac{(Lh)^k}{k!} + \dots \quad (5)$$

Ряд (5) — числовой, положительный, сходящийся. Он является мажорантным для ряда (3) на $I \Rightarrow$ функциональный ряд (3) сходится равномерно на I .

Пусть $\varphi(x)$, $x \in I$, — сумма ряда (3). Имеем $S_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi(x)$, $x \in I \Rightarrow$

$$\Rightarrow \psi_k(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi(x), \quad x \in I. \quad (6)$$

Так как $\psi_k(x) \in C(I)$, то из (6) $\Rightarrow \varphi(x) \in C(I)$.

2) Покажем, что вектор-функция $Y = \varphi(x)$, $x \in I$, является решением задачи (1) — (2). Для этого берем k -е приближение Пикара

$$\psi_k(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x F(x, \psi_{k-1}(x)) dx, \quad x \in I. \quad (7)$$

Было показано, что $\psi_k(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi(x)$, $x \in I$. Покажем теперь, что

$$F(x, \psi_{k-1}(x)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} F(x, \varphi(x)), \quad x \in I.$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. У нас $F(x, Y) \in C(\bar{P}_{ab}) \Rightarrow F(x, Y)$ равномерно непрерывная в $(\bar{P}_{ab}) \Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$, зависящее

только от ε , такое, что для любых двух точек $(\tilde{x}, \tilde{Y})$ и $(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{Y}})$ из $(\bar{P}_{ab})$,

для которых $|\tilde{\tilde{x}} - \tilde{x}| < \delta$, $\|\tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y}\| < \delta$, будет $\|F(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{Y}}) - F(\tilde{x}, \tilde{Y})\| < \varepsilon$. У

нас $\psi_{k-1}(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \varphi(x)$, $x \in I \Rightarrow$ по числу $\delta > 0$ (найденному по ε)

можно указать номер K , такой, что как только $k > K$, так сейчас же

$$\|\psi_{k-1}(x) - \varphi(x)\| < \delta, \quad \text{для всех } x \in I.$$

Но тогда при $k > K$ будет

$$\|F(x, \psi_{k-1}(x)) - F(x, \varphi(x))\| < \varepsilon, \quad \text{для всех } x \in I.$$

Последнее означает, что $F(x, \psi_{k-1}(x)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} F(x, \varphi(x))$, $x \in I$. Пе-

рейдём в соотношении (7) к пределу при $k \rightarrow +\infty$. Получим

$$\varphi(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x F(x, \varphi(x)) dx, \quad x \in I. \quad (8)$$

Из (8) следует:

$$\begin{cases} 1) \varphi'(x) = F(x, \varphi(x)), & x \in I; \\ 2) \varphi(x_0) = Y_0. \end{cases}$$

А это означает, что $Y = \varphi(x)$, $x \in I$ — решение задачи (1) — (2).

3) Покажем теперь, что это решение — единственное. Рассуждаем от противного, а именно предполагаем, что задача (1) — (2) имеет и другие решения. Возьмем тогда два любых решения задачи (1) — (2):

$$Y = \tilde{\varphi}(x), x \in I_\delta; \quad Y = \tilde{\tilde{\varphi}}(x), x \in I_\delta.$$

По условию $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(D)$ — локально $\Rightarrow$ точке (x_0, Y_0) отвечает окрестность $U(x_0, Y_0) \subset (D)$, такая, что $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(U(x_0, Y_0))$.

У нас функции $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\tilde{\varphi}}(x)$ — непрерывные. Значит, существует $\delta > 0$, такое, что для любого $x \in I_\delta$ будет: точка $(x, \tilde{\varphi}(x))$ и точка $(x, \tilde{\tilde{\varphi}}(x)) \in U(x_0, Y_0)$. Так как $Y = \tilde{\varphi}(x)$ и $Y = \tilde{\tilde{\varphi}}(x)$ — решения задачи (1) — (2), то

$$\tilde{\varphi}'(x) = F(x, \tilde{\varphi}(x)), x \in I_\delta,$$

$$\tilde{\tilde{\varphi}}'(x) = F(x, \tilde{\tilde{\varphi}}(x)), x \in I_\delta.$$

Проинтегрируем оба этих соотношения по отрезку $[x_0, x]$, $x \in I_\delta$. Получаем

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x_0) + \int_{x_0}^x F(x, \tilde{\varphi}(x)) dx, \quad \tilde{\tilde{\varphi}}(x) = \tilde{\tilde{\varphi}}(x_0) + \int_{x_0}^x F(x, \tilde{\tilde{\varphi}}(x)) dx, x \in I_\delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{\tilde{\varphi}}(x) - \tilde{\varphi}(x) = \int_{x_0}^x (F(x, \tilde{\tilde{\varphi}}(x)) - F(x, \tilde{\varphi}(x))) dx, x \in I_\delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\tilde{\tilde{\varphi}}(x) - \tilde{\varphi}(x)\| \leq \left| \int_{x_0}^x \|F(x, \tilde{\tilde{\varphi}}(x)) - F(x, \tilde{\varphi}(x))\| dx \right| \leq L \cdot \left| \int_{x_0}^x \|\tilde{\tilde{\varphi}}(x) - \tilde{\varphi}(x)\| dx \right|$$

(здесь L — постоянная Липшица). Обозначим $\|\tilde{\tilde{\varphi}}(x) - \tilde{\varphi}(x)\| = f(x)$, $x \in I_\delta$. Будем иметь:

$$1) f(x) \in C(I_\delta);$$

$$2) f(x) \text{ удовлетворяет неравенству: } 0 \leq f(x) \leq L \cdot \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right|,$$

$$x \in I_\delta.$$

Но тогда по лемме Гронуола

$$f(x) \equiv 0, \quad x \in I_\delta \quad \Rightarrow \quad \tilde{\tilde{\Phi}}(x) = \tilde{\Phi}(x), \quad x \in I_\delta. \quad \blacktriangleleft$$

Следствие. Пусть $F(x, Y) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $\frac{\partial F(x, Y)}{\partial Y} \in$

$\in C(D)$. Тогда для любой точки $(x_0, Y_0) \in (D)$ задача (1) — (2) имеет единственное решение.

Замечание. Так как ряд (3) на отрезке I мажорируется числовым, положительным, сходящимся рядом (5), то, полагая $\varphi(x) = \psi_k(x)$, $x \in I$, всегда можно оценить погрешность этого приближения. Именно: норма упомянутой погрешности не превосходит остатка после k -го члена мажорантного ряда (5).

Замечание (о приведении нормального дифференциального уравнения n -го порядка к нормальной системе n уравнений первого порядка). Пусть имеется дифференциальное уравнение n -го порядка вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (9)$$

Покажем, что оно может быть приведено к нормальной системе n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

В самом деле, обозначим искомую функцию $y(x)$ через $y_1(x)$ и введем в рассмотрение новые функции: $y_2(x)$, $y_3(x)$, ..., $y_n(x)$, положив: $y_2(x) = y_1'(x)$, $y_3(x) = y_2'(x)$, ..., $y_n(x) = y_{n-1}'(x)$. В силу такого выбора новых функций, и принимая во внимание уравнение (9), будем иметь:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2 \quad [= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)], \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_3 \quad [= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)], \\ &\vdots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= y_n \quad [= f_{n-1}(x, y_1, y_2, \dots, y_n)], \\ \frac{dy_n}{dx} &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad [= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)]. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Заметим, что если найдено решение $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, ..., $y_n = \varphi_n(x)$ системы (10), то тем самым найдено решение $y = \varphi(x)$ уравнения (9), ибо $\varphi(x) = \varphi_1(x)$.

И, наоборот, если найдено решение $y = \varphi(x)$ уравнения (9), то тем самым найдено решение $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, ..., $y_n = \varphi_n(x)$ системы (10), ибо $\varphi_1(x) = \varphi(x)$, $\varphi_2(x) = \varphi'(x)$, ..., $\varphi_n(x) = \varphi^{(n-1)}(x)$. Такое же соответствие имеет место и для задач Коши. Именно, если $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ есть решение системы (10), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_1|_{x=x_0} = y_{10}, \quad y_2|_{x=x_0} = y_{20}, \quad \dots, \quad y_n|_{x=x_0} = y_{n0},$$

то функция $y(x)$ ($= y_1(x)$) будет решением уравнения (9), удовлетворяющим начальным условиям:

$$y|_{x=x_0} = y_{10} (= y_0), \quad y'|_{x=x_0} = y_{20} (= y'_0), \quad \dots,$$

$$y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_{n0} (= y_0^{(n-1)}).$$

И, наоборот, если $y = y(x)$ — решение уравнения (9), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)},$$

то $y_1 = y(x)$, $y_2 = y'(x)$, ..., $y_n = y^{(n-1)}(x)$ будет решением системы (10), удовлетворяющим начальным условиям:

$$y_1|_{x=x_0} = y_0 (= y_{10}), \quad y_2|_{x=x_0} = y'_0 (= y_{20}), \quad \dots,$$

$$y_n|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} (= y_{n0}).$$

Из следствия к теореме о существовании и единственности решения нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений вытекает, что:

если 1) функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, и

если 2) всюду в (D) существуют непрерывные $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$, ...,

$\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, то для любой точки $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in (D)$ задача Коши

уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ имеет, и притом единственное, решение.

§4. Общее решение и общий интеграл нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

1°. Пусть имеется нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y). \quad (1)$$

Предполагается, что 1) $F(x, Y) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, и

2) $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(D)$ — локально.

Определение. Семейство вектор-функций

$$Y = \varphi(x, C), \text{ где } C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

— произвольный постоянный вектор, называется *общим решением* системы (1) в области (D) , если, во-первых, для любой точки $(x_0, Y_0) \in (D)$ векторное уравнение

$$Y_0 = \varphi(x_0, C) \quad (3)$$

имеет единственное решение $C = C_0 = \begin{pmatrix} C_1^0 \\ C_2^0 \\ \dots \\ C_n^0 \end{pmatrix}$ и если, во-вторых, вектор-функция

$$Y = \varphi(x, C_0), \quad x \in I_\delta \quad [I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)] \quad (4)$$

является решением системы (1), хотя бы при достаточно малом δ .

Ясно, что это решение (4) удовлетворяет начальному условию $Y|_{x=x_0} = Y_0$.

Определение. Пусть $U(x, Y) = \begin{pmatrix} u_1(x, Y) \\ u_2(x, Y) \\ \dots \\ u_n(x, Y) \end{pmatrix} \in C^1(D)$ и пусть $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix}$ — произвольный постоянный вектор. Соотношение

$$U(x, Y) = C \quad (5)$$

называется *общим интегралом* системы (1) в (D) , если, во-первых, для любой точки $(x_0, Y_0) \in (D)$ векторное уравнение

$$U(x, Y) = U(x_0, Y_0) \quad (6)$$

определяет единственную дифференцируемую вектор-функцию

$$Y = \varphi(x), \quad x \in I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad (7)$$

такую, что $\varphi(x_0) = Y_0$; $U(x, \varphi(x)) \equiv U(x_0, Y_0)$, $x \in I_\delta$, и если, во-вторых, эта вектор-функция $Y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta$, хотя бы при достаточно малом δ является решением системы (1).

2°. Необходимый признак общего интеграла.

Теорема. Пусть $U(x, Y) = C$ — общий интеграл системы (1) в области (D) . Тогда для любого решения $Y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$ системы (1), график которого лежит в (D) , справедливо тождество

$$U(x, \varphi(x)) \equiv \text{const}, \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

► Пусть $Y = \tilde{\varphi}(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$ — произвольное решение системы (1), график которого лежит в (D) . У нас $U(x, Y) \in C^1(D)$, $\tilde{\varphi}(x) \in C^1(\langle a, b \rangle) \Rightarrow U(x, \tilde{\varphi}(x)) \in C^1(\langle a, b \rangle)$.

Мы покажем, что $U(x, \tilde{\varphi}(x)) \equiv \text{const}$, $x \in \langle a, b \rangle$, если установим, что

$$\frac{d}{dx} U(x, \tilde{\varphi}(x)) \equiv 0, \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

Для этого берем произвольную точку $x_0 \in \langle a, b \rangle$ и находим $\tilde{\varphi}(x_0) = Y_0$. Ясно, что точка $(x_0, Y_0) \in (D)$. Рассмотрим теперь векторное уравнение

$$U(x, Y) = U(x_0, Y_0).$$

По определению общего интеграла системы (1) это уравнение определяет единственную дифференцируемую вектор-функцию $Y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta$, такую, что $\varphi(x_0) = Y_0$, и которая при достаточно малом δ является решением системы (1).

Ясно, что для $x \in I_\delta$ будет

$$U(x, \varphi(x)) \equiv U(x_0, Y_0). \quad (8)$$

Имеем:

1) $Y = \tilde{\varphi}(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, — решение системы (1), такое, что $\tilde{\varphi}(x_0) = Y_0$;

2) $Y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta$, — решение системы (1), такое, что $\varphi(x_0) = Y_0$.

Видим, что оба эти решения удовлетворяют одному и тому же начальному условию

$$Y|_{x=x_0} = Y_0, \quad (x_0, Y_0) \in (D).$$

Так как (D) — область единственности системы (1), то $\tilde{\varphi}(x) \equiv \varphi(x)$, $x \in I_\delta$, по крайней мере, при достаточно малом δ . А тогда, в силу

$$(8), \quad U(x, \tilde{\varphi}(x)) \equiv U(x_0, Y_0), \quad x \in I_\delta \Rightarrow \frac{d}{dx} U(x, \tilde{\varphi}(x)) \equiv 0, \quad x \in I_\delta \Rightarrow \text{в}$$

$$\text{частности, } \left. \frac{d}{dx} U(x, \tilde{\varphi}(x)) \right|_{x=x_0} = 0.$$

У нас точка x_0 — любая из $\langle a, b \rangle$ ($\langle a, b \rangle$ — промежуток, на котором определено решение $Y = \tilde{\varphi}(x)$ системы (1)). Поэтому получаем

$$\frac{d}{dx} U(x, \tilde{\varphi}(x)) \equiv 0, \quad x \in \langle a, b \rangle. \quad \blacktriangleleft$$

Следствие. Если $U(x, Y) = \begin{pmatrix} u_1(x, Y) \\ u_2(x, Y) \\ \vdots \\ u_n(x, Y) \end{pmatrix} = C$ — общий интеграл

системы (1) в (D) , то для любого решения $Y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, системы (1) справедливы тождества

$$u_i(x, \varphi(x)) \equiv \text{const}, \quad x \in \langle a, b \rangle \quad (i = \overline{1, n}).$$

Определение. Скалярная функция $u(x, Y) \in C^1(D)$ называется интегралом системы (1) в (D) , если она тождественно обращается в постоянную на любом решении системы (1), график которого лежит в (D) .

Замечание. Любая скалярная функция $u(x, Y) \equiv \text{const}$ в (D) есть интеграл системы (1) в (D) (это — “тривиальные интегралы”; их мы рассматривать не будем).

3°. Критерий интеграла.

Теорема. Скалярная функция $u(x, Y) \in C^1(D)$ является интегралом системы (1) в (D) тогда и только тогда, когда справедливо тождество

$$\frac{\partial u(x, Y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, Y)}{\partial Y} \cdot F(x, Y) \equiv 0 \text{ в } (D). \quad (9)$$

(Здесь $\frac{\partial u(x, Y)}{\partial Y} = \left(\frac{\partial u}{\partial y_1}, \frac{\partial u}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial y_n} \right)$ — матрица-строка, $F(x, Y) =$

$$= \begin{pmatrix} f_1(x, Y) \\ f_2(x, Y) \\ \dots \\ f_n(x, Y) \end{pmatrix} \text{ — матрица-столбец, так что } \frac{\partial u(x, Y)}{\partial Y} \cdot F(x, Y) =$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial u(x, Y)}{\partial y_j} \cdot f_j(x, Y).$$

► *Необходимость.* Дано: $u(x, Y) \in C^1(D)$ является интегралом системы (1) в (D) . Требуется доказать, что в (D) имеет место тождество (9).

Возьмем любую точку $(x_0, Y_0) \in (D)$ и рассмотрим решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ системы (1), удовлетворяющее условию $Y|_{x=x_0} = Y_0$ ($\Rightarrow \varphi(x_0) = Y_0$). Станем рассматривать функцию $u(x, Y)$ в точках графика этого решения.

По определению интеграла системы (1), будем иметь

$$u(x, \varphi(x)) \equiv \text{const}, \quad x \in I_\delta. \quad (10)$$

Левая часть тождества (10) дифференцируема по x на I_δ , так как $u(x, Y) \in C^1(D)$, $\varphi(x) \in C^1(I_\delta)$. Дифференцируя по x тождество (10), получим

$$\frac{\partial u(x, \varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial u(x, \varphi(x))}{\partial Y} \cdot \varphi'(x) \equiv 0, \quad x \in I_\delta.$$

Но $\varphi'(x) \equiv F(x, \varphi(x))$, $x \in I_\delta$ (так как $Y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta$, — решение системы (1)). Поэтому будем иметь

$$\frac{\partial u(x, \varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial u(x, \varphi(x))}{\partial Y} \cdot F(x, \varphi(x)) \equiv 0, \quad x \in I_\delta.$$

Положим в последнем равенстве $x = x_0$ (тогда $\varphi(x_0) = Y_0$). Получим

$$\frac{\partial u(x_0, Y_0)}{\partial x} + \frac{\partial u(x_0, Y_0)}{\partial Y} \cdot F(x_0, Y_0) = 0.$$

У нас точка (x_0, Y_0) — любая, принадлежащая (D) . Поэтому

$$\frac{\partial u(x, Y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, Y)}{\partial Y} \cdot F(x, Y) \equiv 0 \text{ в } (D). \text{ Необходимость доказана.}$$

Достаточность. Имеет место тождество

$$\frac{\partial u(x, Y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, Y)}{\partial Y} \cdot F(x, Y) \equiv 0 \text{ в } (D). \quad (9)$$

Требуется доказать, что $u(x, Y)$ — интеграл системы (1) в (D) .

Берем произвольное решение системы (1) в (D) :

$$Y = \varphi(x), \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

Так как левая часть (9) тождественно равна нулю в (D) , то она равна нулю и на взятом решении, т.е.

$$\frac{\partial u(x, \varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial u(x, \varphi(x))}{\partial Y} \cdot F(x, \varphi(x)) \equiv 0, \quad x \in \langle a, b \rangle.$$

Так как $Y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, — решение системы (1) в (D) , то $F(x, \varphi(x)) \equiv \varphi'(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$. Следовательно, будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u(x, \varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial u(x, \varphi(x))}{\partial Y} \cdot \varphi'(x) \equiv 0, \quad x \in \langle a, b \rangle \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{du(x, \varphi(x))}{dx} \equiv 0, \quad x \in \langle a, b \rangle \Rightarrow u(x, \varphi(x)) \equiv C, \quad x \in \langle a, b \rangle. \end{aligned}$$

Последнее означает, что $u(x, Y)$ — интеграл системы (1) в (D) . ◀

Замечание. Допустим, что для системы (1) удалось построить в (D) n интегралов. Тогда можно построить вектор-функцию

$$U(x, Y) = \begin{pmatrix} u_1(x, Y) \\ u_2(x, Y) \\ \vdots \\ u_n(x, Y) \end{pmatrix}$$

и образовать соотношение $U(x, Y) = C$.

Вопрос: Будет ли соотношение $U(x, Y) = C$ общим интегралом системы (1) в (D) ?

Ответ: Не всегда.

4°. Понятие независимости интегралов. Пусть $u_1(x, Y)$, $u_2(x, Y)$, ..., $u_k(x, Y)$, $k > 1$ — интегралы системы (1) в (D) . Составим векторный интеграл

$$U^{[k]}(x, Y) = \begin{pmatrix} u_1(x, Y) \\ u_2(x, Y) \\ \vdots \\ u_k(x, Y) \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу Якоби для этого векторного интеграла

$$\frac{\partial U^{[k]}}{\partial(x, Y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \frac{\partial u_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y_1} & \frac{\partial u_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_k}{\partial x} & \frac{\partial u_k}{\partial y_1} & \frac{\partial u_k}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial u_k}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

Определение. Интегралы $u_1(x, Y)$, $u_2(x, Y)$, ..., $u_k(x, Y)$ системы (1) в (D) называются независимыми, если для любой точки $(x, Y) \in (D)$

$$\text{rang} \frac{\partial U^{[k]}}{\partial(x, Y)} = k.$$

Справедливо утверждение:

Пусть функции $u_1(x, Y)$, $u_2(x, Y)$, ..., $u_k(x, Y)$ являются интегралами системы (1) в (D) . Тогда $\text{rang} \frac{\partial U^{[k]}}{\partial(x, Y)} = \text{rang} \frac{\partial U^{[k]}}{\partial Y}$, $(x, Y) \in (D)$, где

$$\frac{\partial U^{[k]}}{\partial Y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \frac{\partial u_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y_1} & \frac{\partial u_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_k}{\partial y_1} & \frac{\partial u_k}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial u_k}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

► По условию функции $u_i(x, Y)$ ($i = \overline{1, k}$) являются интегралами системы (1) в (D) . Но тогда справедливы тождества:

$$\frac{\partial u_i(x, Y)}{\partial x} + \frac{\partial u_i(x, Y)}{\partial Y} \cdot F(x, Y) \equiv 0 \text{ в } (D) \quad (i = \overline{1, k}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_i(x, Y)}{\partial x} = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_i(x, Y)}{\partial y_j} \cdot f_j(x, Y), \text{ для любой точки } (x, Y) \in (D)$$

$$(i = \overline{1, k}).$$

Возьмем произвольную точку $(x, Y) \in (D)$ и закрепим ее. Предыдущее соотношение означает, что в закреплённой точке пер-

вый столбец матрицы $\frac{\partial U^{[k]}}{\partial(x, Y)}$ является линейной комбинацией остальных ее столбцов (числа $-f_1(x, Y)$, $-f_2(x, Y)$, ..., $-f_n(x, Y)$ выступают в качестве коэффициентов). Из этого и следует справедливость утверждения. ◀

Следствие. Система (1) имеет в области (D) не более чем n независимых интегралов.

► Это следует из того, что

$$\text{rang} \frac{\partial U^{[k]}}{\partial Y} = \text{rang} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \frac{\partial u_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y_1} & \frac{\partial u_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_k}{\partial y_1} & \frac{\partial u_k}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial u_k}{\partial y_n} \end{pmatrix}}_{\substack{k \text{ строк; } n \text{ столбцов}}} \leq n, \text{ при любом } k. \quad \blacktriangleleft$$

5°. Достаточный признак общего интеграла.

Теорема. Пусть $u_1(x, Y)$, $u_2(x, Y)$, ..., $u_n(x, Y)$ — интегралы

системы (1) в (D) . Пусть $U(x, Y) = \begin{pmatrix} u_1(x, Y) \\ u_2(x, Y) \\ \vdots \\ u_n(x, Y) \end{pmatrix}$. Тогда если интегра-

лы $u_1(x, Y)$, $u_2(x, Y)$, ..., $u_n(x, Y)$ — независимые в (D) , то соотношение

$$U(x, Y) = C \quad (11)$$

есть общий интеграл системы (1) в (D) .

► Покажем, что соотношение (11) удовлетворяет определению общего интеграла. Для этого берем произвольную точку $(x_0, Y_0) \in (D)$ и рассматриваем векторное уравнение

$$U(x, Y) = U(x_0, Y_0). \quad (12)$$

Перепишем (12) в виде

$$\frac{U(x, Y) - U(x_0, Y_0)}{= G(x, Y)} \approx 0 \quad (13)$$

(обозначение)

Имеем:

1) $G(x, Y) \in C^1(D)$ (так как $U(x, Y) \in C^1(D)$).

2) $G(x_0, Y_0) = 0$;

3) $\det \frac{\partial G}{\partial Y} \Big|_{(x_0, Y_0)} = \det \frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_{(x_0, Y_0)} \neq 0$ (так как интегралы $u_i(x, Y)$,

$i = \overline{1, n}$ — независимые в (D)).

Видим, что выполнены условия теоремы об однозначной разрешимости векторного уравнения (13) (см. теорию неявных функций). По этой теореме векторное уравнение (13) определяет единственную дифференцируемую вектор-функцию

$$Y = \varphi(x), \quad x \in I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

такую, что $\varphi(x_0) = Y_0$.

Покажем, что вектор-функция $Y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta$, является решением системы (1), по крайней мере, при достаточно малом δ ($\delta > 0$).

Так как вектор-функция $Y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta$, — неявная, дифференцируемая функция, определяемая уравнением (13), то она обращает (13) в тождество относительно x на интервале I_δ , т.е. $U(x, \varphi(x)) - U(x_0, Y_0) \approx 0$, $x \in I_\delta$. Дифференцируя по x это тождество, получим

$$\frac{\partial U(x, \varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial U(x, \varphi(x))}{\partial Y} \cdot \varphi'(x) \approx 0, \quad x \in I_\delta. \quad (14)$$

У нас $U(x, Y)$ — векторный интеграл системы в (D) . Значит, каждая его компонента $u_i(x, Y)$ ($i = \overline{1, n}$) удовлетворяет в (D) тождеству

$$\frac{\partial u_i(x, Y)}{\partial x} + \frac{\partial u_i(x, Y)}{\partial Y} \cdot F(x, Y) \equiv 0.$$

Эти n скалярных тождеств можно переписать в виде одного векторного тождества:

$$\frac{\partial U(x, Y)}{\partial x} + \frac{\partial U(x, Y)}{\partial Y} \cdot F(x, Y) \equiv 0 \text{ в } (D).$$

Так как это тождество имеет место всюду в (D) , то, в частности, оно выполняется на линии $Y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta$. Поэтому

$$\frac{\partial U(x, \varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial U(x, \varphi(x))}{\partial Y} \cdot F(x, \varphi(x)) \equiv 0, \quad x \in I_\delta. \quad (15)$$

Возьмем любое $x \in I_\delta$ и закрепим его. Рассмотрим при этом x линейную систему

$$\frac{\partial U(x, \varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial U(x, \varphi(x))}{\partial Y} \cdot Z \equiv 0, \text{ где } Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Определителем этой системы является $\det \frac{\partial U(x, \varphi(x))}{\partial Y}$. Он отли-

чен от нуля в силу независимости интегралов $u_1(x, Y)$, $u_2(x, Y)$, ..., $u_n(x, Y)$. Следовательно, система (16) имеет единственное решение. Но, как следует из (14) и (15), эта система имеет своими решениями векторы

$$Z = \varphi'(x) \text{ и } Z = F(x, \varphi(x)).$$

Так как система (16) имеет единственное решение, то получаем, что для взятого $x \in I_\delta$

$$\varphi'(x) = F(x, \varphi(x)).$$

У нас x — любое, принадлежащее I_δ . Поэтому будем иметь $\varphi'(x) \equiv F(x, \varphi(x))$, $x \in I_\delta$. Последнее означает, что $Y = \varphi(x)$, $x \in I_\delta$, — решение системы (1). ◀

Таким образом, показано, что соотношение (11) удовлетворяет определению общего интеграла системы (1) в (D) .

Замечание 1. Чтобы составить общий интеграл системы (1) в (D) , нужно найти n независимых интегралов этой системы.

Замечание 2. Пусть скалярная функция $u(x, Y) \in C^1(D)$ — интеграл системы (1) в (D) , отличный от тривиального (т.е. $u(x, Y) \neq \text{const}$ в (D)). Соотношение $u(x, Y) = C$ называется *первым интегралом* системы (1) в (D) . Отметим, что если

$$U(x, Y) = \begin{pmatrix} u_1(x, Y) \\ u_2(x, Y) \\ \vdots \\ u_n(x, Y) \end{pmatrix} = C \text{ — общий интеграл системы (1) в } (D), \text{ то}$$

$u_i(x, Y) = C_i$ ($i = \overline{1, n}$) — первые интегралы системы (1) в (D) .

6°. Примеры и задачи к §4.

Задача 1. Дана система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -z & (= f_1), \\ \frac{dz}{dx} = \frac{z^2 - x}{y} & (= f_2). \end{cases}$$

Проверить, будут ли функции: 1) $u = x^2 + 2yz$, 2) $u = y - xz^2$ интегралами данной системы.

Решение. Мы знаем (см. критерий интеграла), что функция $u(x, y, z) \in C^1(D)$ будет интегралом данной системы в области (D) тогда и только тогда, когда справедливо тождество

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} \cdot f_1 + \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} \cdot f_2 \equiv 0, \text{ в } (D).$$

У нас $f_1(x, y, z) = -z$; $f_2(x, y, z) = \frac{z^2 - x}{y}$; (D) — множество всех точек (x, y, z) ($y \neq 0$). Имеем:

$$1) \quad 2x + 2z(-z) + 2y \frac{z^2 - x}{y} = 2x - 2z^2 + 2z^2 - 2x \equiv 0;$$

$$2) \quad -z^2 + 1 \cdot (-z) - 2xz \frac{z^2 - x}{y} = -z^2 - z - 2xz \frac{z^2 - x}{y} \neq 0.$$

Вывод. Функция $u = x^2 + 2yz$ есть интеграл заданной системы уравнений, а функция $u = y - xz^2$ интегралом заданной системы не является.

Задача 2. Дана система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} & (= f_1), \\ \frac{dz}{dx} = \frac{2y^2 - xz}{x^2} & (= f_2). \end{cases}$$

Убедиться, что функции $u_1(x, y, z) = xy$, $u_2(x, y, z) = xz + y^2$ являются интегралами данной системы в области (D) ((D) — множество всех точек (x, y, z) , $x \neq 0$), и выяснить, независимы ли в (D) указанные интегралы.

Решение. Имеем:

$$1) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} f_1 + \frac{\partial u_1}{\partial z} f_2 = y + x \left(-\frac{y}{x} \right) = y - y \equiv 0 \text{ в } (D);$$

$$2) \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} f_1 + \frac{\partial u_2}{\partial z} f_2 = z + 2y \left(-\frac{y}{x} \right) + x \frac{2y^2 - xz}{x^2} = z - \frac{2y^2}{x} + \frac{2y^2}{x} - z \equiv 0 \text{ в } (D).$$

Следовательно, функции $u_1 = xy$ и $u_2 = xz + y^2$ — интегралы заданной системы. Чтобы выяснить, независимы ли эти интегралы в (D) , составим матрицу:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 2y & x \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен двум; следовательно, интегралы $u_1 = xy$, $u_2 = xz + y^2$ независимы в (D) .

Задача 3. Доказать, что функция $u(y, z) = y^2 + z^2 - 2 \ln |yz - 1|$ вдоль траектории любого решения системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + z - yz^2, \\ \frac{dz}{dx} = -y - z + y^2z \end{cases}$$

постоянна.

► **Решение.** Пусть $\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix}$ — решение заданной системы уравнений. Вдоль траектории этого решения функция

$$u(y(x), z(x)) = y^2(x) + z^2(x) - \ln(y(x)z(x) - 1)^2$$

Подставляя эти значения для $y_2, y_3, \dots, y_n$ в последнее уравнение системы (5), будем иметь

$$y_1^{(n)} = f(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}). \quad (7)$$

Получили, таким образом, одно дифференциальное уравнение n -го порядка относительно одной неизвестной функции. Интегрируя это уравнение, получим

$$y_1 = \Phi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (8)$$

(предполагается, что мы умеем находить общее решение уравнения (7)).

Теперь, дифференцируя полученную функцию (8) последовательно $(n-1)$ раз и подставляя значения $y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}$ в (6), получим

$$y_2 = \Phi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

$$y_3 = \Phi_3(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$y_n = \Phi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

которые вместе с ранее найденным $y_1 (= \Phi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n))$ составляют общее решение системы (1).

Замечание. В рассматриваемом случае процесс исключения можно вести и в ином порядке. Так, например, можно выразить $y_2, y_3, \dots, y_n$ через $x, y_1, y_1'', y_1''', \dots, y_1^{(n)}$ из последних $(n-1)$ уравнений системы (5) и подставить в первое.

Пример 1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -3x - 2y_1 + 3y_2 + 4y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = 1 - 7x - 6y_1 + 7y_2 + 6y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = x + y_1 - y_2 + y_3. \end{cases} \quad (\tilde{I})$$

► Продифференцируем по x первое уравнение из системы $(\tilde{I})$:

$$y_1'' = -3 - 2y_1' + 3y_2' + 4y_3'.$$

Подставляя здесь вместо y_1', y_2', y_3' их выражения из $(\tilde{I})$, получим

$$y_1'' = -11x - 10y_1 + 11y_2 + 14y_3. \quad (\tilde{2})$$

Полученное уравнение $(\tilde{2})$ дифференцируем по x :

$$y_1''' = -11 - 10y_1' + 11y_2' + 14y_3'. \quad (\tilde{3})$$

И здесь вместо y'_1, y'_2, y'_3 подставляем их выражения из (1̃). Получим

$$y'''_1 = -33x - 32y_1 + 33y_2 + 40y_3. \quad (4̃)$$

Рассматриваем теперь систему

$$\begin{cases} y'_1 = -3x - 2y_1 + 3y_2 + 4y_3, \\ y''_1 = -11x - 10y_1 + 11y_2 + 14y_3, \\ y'''_1 = -33x - 32y_1 + 33y_2 + 40y_3. \end{cases} \quad (5̃)$$

Из первых двух уравнений (5̃) выражаем y_2 и y_3 через x, y_1, y'_1, y''_1 :

$$\begin{cases} y_2 = 2y'_1 - 7y'_1 + 6y_1 + x, \\ y_3 = \frac{1}{2}(-3y''_1 + 11y'_1 - 8y_1). \end{cases} \quad (6̃)$$

Подставляем найденные значения для y_2 и y_3 в последнее уравнение (5̃). Получим

$$y'''_1 - 6y''_1 + 11y'_1 - 6y_1 = 0. \quad (7̃)$$

(7̃) — линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Составляем характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$$

Следовательно,

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}. \quad (8̃)$$

Теперь, дифференцируя (8̃) два раза и подставляя значения y_1, y'_1, y''_1 в (6̃), получаем

$$y_2 = x + C_1 e^x + 3C_3 e^{3x}, \quad y_3 = C_2 e^{2x} - C_3 e^{3x}.$$

Совокупность функций

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}, \\ y_2 &= x + C_1 e^x + 3C_3 e^{3x}, \\ y_3 &= C_2 e^{2x} - C_3 e^{3x} \end{aligned} \right\}$$

— общее решение системы (1̃). ◀

Пример 2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_3, \\ y_3' = y_1 + y_2. \end{cases} \quad (\tilde{I}_0)$$

► Дифференцируя по x первое уравнение системы $(\tilde{I}_0)$, получим

$$y_1'' = y_2' + y_3'.$$

Подставив здесь вместо y_2' , y_3' их выражения из $(\tilde{I}_0)$, будем иметь

$$y_1'' = 2y_1 + (y_2 + y_3). \quad (\tilde{2}_0)$$

Замечаем, что уравнения

$$\begin{aligned} y_1' &= (y_2 + y_3), \\ y_1'' &= 2y_1 + (y_2 + y_3) \end{aligned}$$

содержат y_2 и y_3 “одинаковым образом” и, следовательно, из этих уравнений они могут быть исключены сразу. В результате мы получим уравнение второго порядка для y_1 :

$$y_1'' - y_1' - 2y_1 = 0, \quad (\tilde{7}_0)$$

и в дальнейшем дифференцировании уравнения $(\tilde{2}_0)$ надобности нет. Интегрируя уравнение $(\tilde{7}_0)$, получим

$$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Найдем теперь y_3 из первого уравнения системы $(\tilde{I}_0)$: $y_3 = y_1' - y_2$ и подставим во второе уравнение этой системы. Будем иметь

$$y_2' = y_1 + y_1' - y_2 \Rightarrow y_2' = 3C_2 e^{2x} - y_2 \Rightarrow y_2' + y_2 = 3C_2 e^{2x}.$$

Мы получили уравнение первого порядка для y_2 . Решая его, находим: $y_2 = C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x}$. Остается найти y_3 , для чего можно использовать, например, второе уравнение системы $(\tilde{I}_0)$:

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2' - y_1 = 2C_2 e^{2x} - C_3 e^{-x} - C_1 e^{-x} - C_2 e^{2x} \Rightarrow \\ y_3 &= C_2 e^{2x} - (C_1 + C_3) e^{-x}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае нам пришлось интегрировать одно уравнение второго порядка и одно первого порядка. И вообще, следует отметить, что интегрирование нормальной системы порядка n методом исключения может свестись

Проинтегрировав это уравнение, найдем

$$y_n = \Phi_n(x, C_1, C_2, C_3, \dots, C_{n-1}, C_n).$$

Совокупность функций $\Phi_1(x, C_1), \Phi_2(x, C_1, C_2), \dots, \Phi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ является общим решением системы (1).

2°. Симметрическая форма нормальной системы. Нахождение интегрируемых комбинаций. Нормальную систему (1) можно записать в виде равенства отношений:

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \dots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \frac{dx}{1}. \quad (9)$$

Равенство отношений (9) называется симметрической формой нормальной системы (1). Такое название объясняется тем, что в (9) все переменные $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ равноправны: любую из них можно выбрать в качестве независимой. Последнее обстоятельство бывает иногда очень полезным в теории и практике интегрирования систем.

Мы видели, что задача построения общего решения нормальной системы порядка n равносильна нахождению n ее независимых интегралов. Общего способа построения интегралов не существует, но в отдельных случаях они могут быть сравнительно просто найдены. Для нахождения интегралов системы (9) либо берут пары отношений, допускающих разделение переменных, либо используют производные пропорции:

$$\frac{dx}{1} = \frac{\omega_0 dx + \omega_1 dy_1 + \omega_2 dy_2 + \dots + \omega_n dy_n}{\omega_0 + \omega_1 f_1 + \omega_2 f_2 + \dots + \omega_n f_n}. \quad (10)$$

Здесь $\omega_0(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \omega_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, \omega_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ — произвольные функции, и их выбирают так, чтобы числитель правой части был дифференциалом знаменателя, либо числитель был полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, а знаменатель был равен нулю, т.е. чтобы одновременно выполнялись два условия:

1. $\omega_0 + \omega_1 f_1 + \omega_2 f_2 + \dots + \omega_n f_n = 0$;
2. $\omega_0 dx + \omega_1 dy_1 + \omega_2 dy_2 + \dots + \omega_n dy_n = du(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Если эти условия оказываются выполненными, то из (10) получается $du = 0$, откуда видно, что функция $u(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ является интегралом данной системы.

Пример 3. Найти интегралы системы

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}}. \quad (11)$$

► (11) — система двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций, записанная в симметрическом виде. Области, в которых будем искать интегралы системы (11) — открытые координатные октанты $\mathbb{R}^3$ с введенной системой координат $Oxyz$.

Из первого равенства (11) $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz}$ находим $y = C_1 x$, или $\frac{y}{x} = C_1$. Соотношение $\frac{y}{x} = C_1$ является первым интегралом системы (11), а функция $u_1(x, y) = \frac{y}{x}$ — интегралом системы (11).

Из (11), воспользовавшись свойством равных отношений, находим

$$\begin{aligned} \frac{ydx + xdy}{2xyz} &= \frac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}} \Rightarrow \frac{1}{2} d(x \cdot y) = d\left(\sqrt{z^2+1}\right) \Rightarrow \\ d\left(\frac{xy}{2} - \sqrt{z^2+1}\right) &= 0 \Rightarrow u_2(x, y, z) = \frac{xy}{2} - \sqrt{z^2+1} = C_2. \end{aligned}$$

Это еще один первый интеграл системы (11).

Имеем

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{x}{2} \\ 0 & -\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \end{vmatrix} = -\frac{z}{x\sqrt{1+z^2}} \neq 0$$

во всех точках каждой из восьми областей, в которых рассматривается система (11). Значит, интегралы $u_1 = \frac{y}{x}$, $u_2 = \frac{xy}{2} - \sqrt{1+z^2}$ — независимые в каждом из восьми октантов системы координат $Oxyz$. Следовательно,

$$U(x, y, z) = \left(\frac{y}{x}, \frac{xy}{2} - \sqrt{1+z^2} \right) = C \quad \left(C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \right)$$

— общий интеграл системы (11). ◀

Пример 4. Найти интегралы системы

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y} = \frac{dt}{t}. \quad (12)$$

► (12) — система трех дифференциальных уравнений относительно трех неизвестных функций, записанная в симметрическом виде. Для отыскания интегралов системы (12) будем пользоваться свойством равных отношений.

Имеем, например,

$$\frac{dx - dy}{y - x} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \frac{d(x - y)}{x - y} + \frac{dt}{t} = 0 \Rightarrow (x - y)t = C_1. \quad (13)$$

Соотношение (13) является первым интегралом системы (12), а функция $u_1 = (x - y)t$ — интегралом системы (12).

Имеем, далее, из (12)

$$\frac{d(x + y + z)}{2(x + y + z)} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \frac{x + y + z}{t^2} = C_2. \quad (14)$$

Соотношение (14) является еще одним первым интегралом системы (12), а функция $u_2 = \frac{x + y + z}{t^2}$ — интегралом системы (12).

Из (12) находим еще

$$\frac{dx - dz}{z - x} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \frac{d(x - z)}{x - z} + \frac{dt}{t} = 0 \Rightarrow (x - z)t = C_3. \quad (15)$$

Соотношение (15) является первым интегралом системы (12), а функция $u_3 = (x - z)t$ — интегралом системы (12).

Имеем

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & -t & 0 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{1}{t^2} & \frac{1}{t^2} \\ t & 0 & -t \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad (t \neq 0)$$

$\Rightarrow$ интегралы $u_1(x, y, z, t)$, $u_2(x, y, z, t)$, $u_3(x, y, z, t)$ — независимые всюду, где определена система (12). ◀

§6. Интегрирование линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

1°. Общий вид линейного уравнения с частными производными первого порядка такой:

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot u = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1')$$

Здесь $x_1, x_2, \dots, x_n$ — независимые переменные, $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — неизвестная функция, $a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i = \overline{1, n}$), $b(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — известные, заранее заданные функции. (Неизвестная функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и все ее частные производные входят в уравнение (1') линейно.)

Общий вид квазилинейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка такой:

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x_1, x_2, \dots, x_n, u). \quad (2)$$

(В уравнение входят линейно лишь частные производные неизвестной функции; сама же неизвестная функция $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ входит в (2) через посредство $a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ ($i = \overline{1, n}$) и $b(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ любым образом.)

I. Рассмотрим сначала уравнение вида

$$a_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \quad (1)$$

Предполагается, что $a_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C(D)$, $i = \overline{1, n}$, и что в (D) $a(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$. Это — линейное *однородное* уравнение первого порядка с частными производными.

Построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \quad (3)$$

(3) называется системой обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующей уравнению (1). (3) — система $(n-1)$ обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема 1. Пусть $\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_1$ — первый интеграл системы (3) в (D) . Тогда функция $u = \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — решение уравнения (1) в (D) .

вдоль интегральной кривой системы (3), то в точках этой кривой

(В частности, (4) выполняется во взятой точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а она — любая из (D) .)

$$dx_2 = \frac{a_2(x_1, x_2, \dots, x_n)}{a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} dx_1, \quad \dots, \quad dx_n = \frac{a_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} dx_1.$$

Подставив эти выражения для $dx_2, \dots, dx_n$ в (4), получим в каждой точке $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (D)$

$$a_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \dots +$$

$$+ a_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ функция $u = \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — решение уравнения (1) в области (D) . $\blacktriangleleft$

$$\begin{aligned}\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= C_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= C_2, \\ &\vdots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= C_{n-1}\end{aligned}$$

есть $(n - 1)$ независимых первых интегралов системы (3). Тогда:

Но у системы (6) решения, отличные от чисто нулевого, существуют лишь тогда, когда определитель этой системы равен нулю, т.е. когда

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ существует зависимость $\tilde{\psi} = \psi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$. $\blacktriangleleft$

Замечание. Функцию $u = \psi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$, где ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, называют общим решением уравнения (1).

II. Рассмотрим теперь уравнение вида

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x_1, x_2, \dots, x_n, u). \quad (2)$$

Предполагается, что функции $a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ ($i = \overline{1, n}$) и $b(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \in C^1(D)$, $(D) \subset \mathbb{R}^{n+1}$; $a(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ в (D) . В (2) $x_1, x_2, \dots, x_n$ — независимые переменные, $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — неизвестная функция.

Введем в рассмотрение вспомогательное уравнение

$$\begin{aligned} & a_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_2} + \dots + \\ & + a_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_n} + b(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial v}{\partial u} = 0. \end{aligned} \quad (\tilde{2})$$

В $(\tilde{2})$ $x_1, x_2, \dots, x_n, u$ — независимые переменные, $v(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ — неизвестная функция.

Видим, что $(\tilde{2})$ — линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными относительно неизвестной функции $v(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$. (Уравнение такого вида было рассмотрено в пункте I.)

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующая уравнению $(\tilde{2})$, будет такой:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{a_1(x_1, \dots, x_n, u)} &= \frac{dx_2}{a_2(x_1, \dots, x_n, u)} = \dots = \\ &= \frac{dx_n}{a_n(x_1, \dots, x_n, u)} = \frac{du}{b(x_1, \dots, x_n, u)}. \end{aligned} \quad (\tilde{3})$$

($\tilde{3}$) — система n обыкновенных дифференциальных уравнений. Предполагается, что ($\tilde{3}$) задана в области $(D) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и что (D) — область единственности для ($\tilde{3}$).

Пусть $\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = C_1$ — первый интеграл системы ($\tilde{3}$) в (D) . Тогда (см. теорему 1) функция

$$v = \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$$

является решением вспомогательного уравнения ($\tilde{2}$). Следовательно,

$$\begin{aligned} a_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_2} + \dots + \\ + a_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_n} + b(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial v}{\partial u} = 0 \quad \text{в } (D). \end{aligned} \quad (\tilde{4})$$

Имеет место

Теорема 3. Неявная функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определяемая соотношением

$$\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0,$$

является решением уравнения (2).

► Пусть $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — неявная функция, определяемая соотношением $\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$. Тогда, как известно,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}}{\frac{\partial \psi_1}{\partial u}}; \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}}{\frac{\partial \psi_1}{\partial u}}; \quad \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = -\frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}}{\frac{\partial \psi_1}{\partial u}}.$$

Подставив эти выражения для $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u}{\partial x_2}$, ..., $\frac{\partial u}{\partial x_n}$ в уравнение (2), получаем

$$-a_1(x_1, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}}{\frac{\partial \psi_1}{\partial u}} - a_2(x_1, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}}{\frac{\partial \psi_1}{\partial u}} - \dots -$$

$$-a_n(x_1, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}}{\frac{\partial \psi_1}{\partial u}} - b(x_1, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial u}}{\frac{\partial \psi_1}{\partial u}} =$$

$$= -\frac{1}{\frac{\partial \psi_1}{\partial u}} \cdot \left[\underbrace{\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + b(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial \psi_1}{\partial u}}_{=0 \text{ в } (D), \text{ в силу } (\bar{A})} \right] = 0.$$

Видим, что неявная функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определяемая соотношением $\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$, действительно является решением уравнения (2). ◀

Пусть

$$\begin{aligned}\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) &= C_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) &= C_2, \\ &\vdots \\ \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) &= C_n\end{aligned}$$

— независимые первые интегралы системы (3̃). Тогда (см. теорему 2) функция

$$v = \psi(\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \dots, \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u)),$$

где ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, является решением вспомогательного уравнения (2).

Имеет место

Теорема 4. Неявная функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определяемая соотношением

$$\Psi(\Psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \Psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \dots, \Psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u)) = 0, \quad (5)$$

является решением уравнения (2).

► Пусть $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — неявная функция, определяемая соотношением (5): $\psi(\psi_1(x_1, \dots, x_n, u), \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_n, u)) = 0$.

Найдем $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$. Чтобы найти $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, продифферен-

цируем по x , обе части (5). Получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi}{\partial \psi_1} \cdot \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial \psi_2} \cdot \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \dots + \\ & + \frac{\partial \psi}{\partial \psi_n} \cdot \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_n}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_1} = & - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial \psi_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial \psi_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial \psi_n} \cdot \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1}}{\frac{\partial \psi}{\partial \psi_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial \psi_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial u} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial \psi_n} \cdot \frac{\partial \psi_n}{\partial u}} = - \frac{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x_1}}{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial u}}. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично находим

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = - \frac{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x_2}}{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial u}}, \quad \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = - \frac{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x_n}}{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial u}}.$$

Подставив эти выражения для $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u}{\partial x_2}$, ..., $\frac{\partial u}{\partial x_n}$ в уравнение (2), получаем

$$\begin{aligned} & -a_1(x_1, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x_1}}{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial u}} - a_2(x_1, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x_2}}{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial u}} - \dots - \\ & - a_n(x_1, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x_n}}{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial u}} - b(x_1, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial u}}{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial u}} = \\ & = - \frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial u}} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial \psi_j} \times \end{aligned}$$

$$\times \left[\underbrace{\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} + b(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial u}}_{=0 \text{ в } (D), j=\overline{1, n}} \right] = 0.$$

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} + b(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial u} = 0 \text{ для любого}$$

$j = \overline{1, n}$, так как $v = \psi_j(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ — решения уравнения (2),

$j = \overline{1, n}$.

Видим, что неявная функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определяемая соотношением (5), действительно является решением уравнения (2). ◀

Функцию $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определяемую соотношением (5), в котором ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, называют общим решением уравнения (2).

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$(x-z) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + (y-z) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 2z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

► $u = u(x, y, z)$ — неизвестная функция. Заданное уравнение — линейное однородное. Строим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую заданному уравнению:

$$\frac{dx}{x-z} = \frac{dy}{y-z} = \frac{dz}{2z}.$$

Пользуясь свойством равных отношений, найдем интегралы этой системы:

1) $\frac{dx}{x-z} = \frac{dy}{y-z} = \frac{2dz}{4z} \Rightarrow \frac{d(x+y+2z)}{x+y+2z} = \frac{dz}{2z} \Rightarrow \frac{(x+y+2z)^2}{z} = C_1$ — это первый интеграл системы.

2) $\frac{dx}{x-z} = \frac{d(-y)}{z-y} = \frac{dz}{2z} \Rightarrow \frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{dz}{2z} \Rightarrow \frac{(x-y)^2}{z} = C_2$ — это еще один первый интеграл системы.

Общее решение заданного уравнения будет таким:

$$u = \psi \left(\frac{(x+y+2z)^2}{z}, \frac{(x-y)^2}{z} \right).$$

Здесь ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. ◀

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$yz \frac{\partial z}{\partial x} - xz \frac{\partial z}{\partial y} = e^z. \quad (\tilde{1})$$

► $z = z(x, y)$ — неизвестная функция. Заданное уравнение (1) — квазилинейное. Вводим в рассмотрение вспомогательное уравнение

$$yz \frac{\partial v}{\partial x} - xz \frac{\partial v}{\partial y} + e^z \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (\tilde{2})$$

В (2) x, y, z — независимые переменные, $v(x, y, z)$ — неизвестная функция. Уравнение (2) — линейное однородное относительно неизвестной функции $v(x, y, z)$.

Составляем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую уравнению (2):

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{-xz} = \frac{dz}{e^z}. \quad (\tilde{3})$$

Найдем интегралы системы (3):

$$1) \frac{dx}{yz} = \frac{dy}{-xz} \Rightarrow \frac{x dx}{xyz} = \frac{y dy}{-xyz} \Rightarrow \frac{x dx + y dy}{0} = \frac{dz}{e^z} \Rightarrow$$

$x dx + y dy = 0 \Rightarrow d(x^2 + y^2) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = C_1$ — первый интеграл системы (3).

$$2) \frac{dx}{yz} = \frac{dz}{e^z}. \text{ Воспользуемся найденным первым интегралом.}$$

Будем иметь

$$\frac{dx}{\sqrt{C_1 - x^2}} = ze^{-z} dz \Rightarrow \arcsin \frac{x}{\sqrt{C_1}} + (z + 1)e^{-z} = C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + (z + 1)e^{-z} = C_2$$

-- это другой первый интеграл системы (3).

Общее решение вспомогательного уравнения (2) будет таким:

$$v = \psi \left(x^2 + y^2, (z+1)e^{-z} + \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right),$$

а значит, общее решение исходного уравнения (1) $z = z(x, y)$ есть неявная функция, определяемая соотношением

$$\psi \left(x^2 + y^2, (z+1)e^{-z} + \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0. \blacktriangleleft$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$(y+z) \frac{\partial u}{\partial x} + (z+x) \frac{\partial u}{\partial y} + (x+y) \frac{\partial u}{\partial z} = u. \quad (\tilde{4})$$

► $u = u(x, y, z)$ — неизвестная функция. Заданное уравнение (4) — линейное неоднородное. Вводим в рассмотрение вспомогательное уравнение

$$(y+z) \frac{\partial v}{\partial x} + (z+x) \frac{\partial v}{\partial y} + (x+y) \frac{\partial v}{\partial z} + u \frac{\partial v}{\partial u} = 0. \quad (\tilde{5})$$

(5) — линейное однородное уравнение относительно неизвестной функции $v = v(x, y, z, u)$. Составляем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующих уравнению (5):

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y} = \frac{du}{u}. \quad (\tilde{6})$$

Найдем интегралы системы (6):

$$1) \frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{z+x} = \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{d(x-y)}{y-x} = \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{du}{u} + \frac{d(x-y)}{x-y} = 0 \Rightarrow u(x-y) = C_1;$$

$$2) \frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y} = \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{d(y-z)}{z-y} = \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{du}{u} + \frac{d(y-z)}{y-z} = 0 \Rightarrow u(y-z) = C_2;$$

$$3) \text{ из } (\tilde{6}): \frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)} = \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{x+y+z}{u^2} = C_3.$$

Общее решение вспомогательного уравнения (5) будет таким:

$$v = \psi \left(u(x-y), u(y-z), \frac{x+y+z}{u^2} \right).$$

Значит, общее решение исходного уравнения (4) есть неявная функция $u = u(x, y, z)$, определяемая соотношением

$$\psi\left(u(x-y), u(y-z), \frac{x+y+z}{u^2}\right) = 0,$$

где ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. ◀

2°. Понятие о характеристиках. Рассмотрим простейший пример. Пусть требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

удовлетворяющее условию

$$u(x, t)|_{t=0} = f(x), \quad (7)$$

где $f(x)$ — известная функция. (6) — (7) — задача Коши.

Обыкновенное дифференциальное уравнение, соответствующее уравнению (6), будет таким:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dt}{1}.$$

Решая его, находим $x = t + C \Rightarrow x - t = C$. Это есть первый интеграл дифференциального уравнения. Но тогда $u = \psi(x - t)$, где ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, является общим решением уравнения (6). Для определения функции u используем условие (7)

$$\psi(x - t)|_{t=0} = f(x) \Rightarrow \psi(x) = f(x) \Rightarrow \psi = f.$$

Следовательно, $u = f(x - t)$ является решением задачи (6) — (7).

Замечание. В рассмотренном примере, исходя лишь из данного уравнения (6) и условия (7), мы можем на оси абсцисс (т.е. при $t = 0$) определить формально все частные производные от функции $u(x, t)$ по переменным x и t .

Действительно, из (7) находим $\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{t=0} = f'(x)$. Затем из (6)

получаем $\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = -\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{t=0} = -f'(x)$. Потом находим $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{t=0} = f''(x)$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\bigg|_{t=0} = -f''(x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{t=0} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\bigg|_{t=0} = f''(x)$, и т. д.

В таком случае, когда, исходя лишь из (6) и (7), удастся определить формально на линии $t = 0$ все частные производные от функции $u(x, t)$ по переменным x и t , будем говорить, что задача Коши (6) — (7) поставлена правильно. В противном случае мы сказали бы, что задача Коши поставлена неправильно.

Рассмотрим теперь задачу Коши для уравнения (6) и кривой (I) , заданной уравнением $\omega(x, t) = 0$. Предполагается при этом, что $\omega(x, t) \in C^1(D)$ и что $(\omega'_x)^2 + (\omega'_t)^2 \neq 0$ в $(D) \subset \mathbb{R}^2$.

Упомянутая задача Коши формулируется так: требуется найти решение уравнения (6), удовлетворяющее условию

$$u|_{(I)} = f(M). \quad (\tilde{7})$$

Выясним, когда задача Коши (6) — $(\tilde{7})$ оказывается поставленной правильно и когда — нет. Иначе, выясним, когда мы сможем и когда не сможем, исходя лишь из (6) и $(\tilde{7})$, определить на (I) формально все интересующие нас частные производные от функции $u(x, t)$.

Для этого вводим в рассмотрение новые переменные ξ и η по формулам

$$\begin{cases} \xi = \omega(x, t), \\ \eta = t. \end{cases}$$

Тогда $u(x, t) \leftrightarrow u(\xi, \eta)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_{=\frac{\partial \omega}{\partial x}} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{=0} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial t}}_{=\frac{\partial \omega}{\partial t}} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial t}}_{=1} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Уравнение (6) в новых переменных станет таким:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad (\tilde{6})$$

а начальное условие $(\tilde{7})$ примет вид

$$u|_{\xi=0} = f_1(\eta). \quad (\tilde{7})$$

Из (6) и (7) видим:

1) если $\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial t} \neq 0$ на кривой (I), то задача Коши (6) — (7)

поставлена правильно;

2) если $\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$ на кривой (I), то задача Коши (6) — (7)

поставлена неправильно.

В первом случае кривую (I) называют *нехарактеристической* или *свободной* для уравнения (6), во втором случае — *характеристической* (или просто *характеристикой*).

Итак, получили:

Кривая (I), заданная уравнением $\omega(x, t) = 0$, — характеристическая для уравнения (6), если на (I)

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0. \quad (8)$$

(8) — уравнение для характеристик уравнения (6).

Пусть требуется определить семейство характеристик для уравнения (6). Для этого берем уравнение (8) и составляем соответствующее ему обыкновенное дифференциальное уравнение

$\frac{dx}{1} = \frac{dt}{1} \Rightarrow x - t = C$ — первый интеграл этого уравнения. Утверждаем, что линии, определяемые соотношением $x - t = C$, образуют семейство характеристик для уравнения (6). Действительно, по теореме 1 предыдущего параграфа, функция $\omega(x, t) = x - t$ является решением уравнения (8). Значит, линии определяемые соотношением $x - t = C$, образуют семейство характеристик для уравнения (6) (рис. 5.1).

Если в качестве кривой (I) взять любую линию из семейства

$x - t = C$, то коэффициент при $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ в уравнении (6) на каждой такой линии будет равен нулю и, следовательно, мы не сможем,

исходя из (6) и (7), определить на (I) все частные производные функции u . Значит, задача Коши для уравнения (6) и такой кривой (I) будет поставлена неправильно.

Замечание. Во всех точках каждой прямой из семейства $x - t = C$ решение $u = f(x - t)$ задачи (6) — (7) имеет свое, но одно и то же значение.

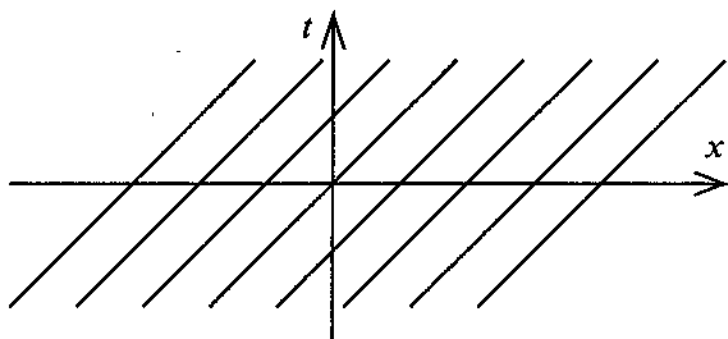


Рис. 5.1

Станем рассматривать теперь более общие примеры.

1. Пусть имеется уравнение вида

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y). \quad (9)$$

Пусть имеется кривая (I) , заданная уравнением $\omega(x, y) = 0$. Предполагается, что $\omega(x, y) \in C^1(D)$ и $(\omega'_x)^2 + (\omega'_y)^2 \neq 0$ в $(D) \subset \mathbb{R}^2$.

Задача: найти решение уравнения (9), удовлетворяющее условию

$$u|_{(I)} = f(M), \quad (10)$$

где $f(M)$ — известная функция.

Выясним, когда задача Коши (9) — (10) будет поставленной правильно и когда — нет, т.е. выясним, когда мы сможем и когда не сможем, исходя лишь из (9) и (10), определить формально на (I) все интересующие нас частные производные функции $u(x, y)$.

Для этого вводим в рассмотрение новые переменные ξ и η по формулам:

$$\begin{cases} \xi = \omega(x, y), \\ \eta = y. \end{cases}$$

Тогда $u(x, y) \rightarrow u(\xi, \eta)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

В новых переменных уравнение (9) станет таким:

$$\left(a \frac{\partial \omega}{\partial x} + b \frac{\partial \omega}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta} = c, \quad (9)$$

а условие (10) примет вид

$$u|_{\xi=0} = \tilde{f}(\eta). \quad (10)$$

Из (9) и (10) видим, что :

1) если на (I) коэффициент при $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ не равен нулю, то задача Коши (9) — (10) поставлена правильно и, следовательно, кривая (I) — нехарактеристическая;

2) если же на (I) $a(x, y) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} + b(x, y) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$, то задача Коши (9) — (10) поставлена неправильно и, следовательно, кривая (I) — характеристическая.

Соотношение

$$a(x, y) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} + b(x, y) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

есть уравнение для характеристик уравнения (9).

Пусть требуется определить семейство характеристик для уравнения (9).

Для этого берем уравнение (11) и составляем соответствующее ему обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{b(x, y)}.$$

Пусть

$$\psi(x, y) = C \quad (12)$$

— первый интеграл этого уравнения. Утверждаем, что кривые, определяемые соотношением (12), образуют семейство характеристик для уравнения (9). Действительно, по теореме 1 предыдущего параграфа, функция $\omega = \psi(x, y)$ является решением уравнения (11).

Следовательно, $a(x, y) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + b(x, y) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$. Значит, кривые, определяемые соотношением (12), образуют семейство характеристик уравнения (9).

2. Пусть имеется уравнение вида

$$a_1(x_1, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_n} = c(x_1, \dots, x_n). \quad (13)$$

В этом случае вместо кривой (I) задается уже поверхность (σ). Пусть $\omega(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ — уравнение поверхности (σ). Предполагается, что

$$a_i(x_1, \dots, x_n) \in C^1(D) \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$c(x_1, \dots, x_n) \in C^1(D),$$

$$a(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0) \text{ в } (D),$$

$$\omega(x_1, \dots, x_n) \in C^1(D),$$

$$(\omega'_{x_1})^2 + (\omega'_{x_2})^2 + \dots + (\omega'_{x_n})^2 \neq 0 \text{ в } (D).$$

Задача. Найти решение уравнения (13), удовлетворяющее условию

$$u|_{\sigma} = f(M), \quad (14)$$

где $f(M)$ — известная, заранее заданная функция.

Заметим, что (13) — (14) — задача Коши на поверхности (σ). Выясним, когда задача Коши (13) — (14) будет поставлена правильно и когда — нет, т.е. выясним, когда мы сможем и когда не сможем, исходя лишь из (13) и (14), определить (формально) на (σ) все интересующие нас частные производные от функции u . Для этого вводим в рассмотрение новые переменные ξ_i ($i = \overline{1, n}$) по формулам:

$$\begin{cases} \xi_1 = \omega(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \xi_2 = x_2, \\ \dots \\ \xi_n = x_n. \end{cases}$$

Тогда $u(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow u(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}}_{=0} + \dots + \frac{\partial u}{\partial \xi_n} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi_n}{\partial x_1}}_{=0} = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}}_{=1} + \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi_3}{\partial x_2}}_{=0} + \dots + \frac{\partial u}{\partial \xi_n} \cdot \underbrace{\frac{\partial \xi_n}{\partial x_2}}_{=0} = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial \xi_2}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_3} + \frac{\partial u}{\partial \xi_3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_n} + \frac{\partial u}{\partial \xi_n}.$$

Уравнение (13) в новых переменных запишется так:

$$\left(a_1 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + a_2 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \dots + a_n \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + a_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi_2} + \dots + a_n \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi_n} = c. \quad (15)$$

Начальное условие (14) в новых переменных станет таким:

$$u|_{\xi_1=0} = f_1(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n). \quad (16)$$

Из (15) и (16) видим, что:

1) если на (σ) коэффициент при $\frac{\partial u}{\partial \xi_1}$ в (15) не равен нулю, то задача Коши (15) — (16) поставлена правильно и, следовательно, поверхность (σ) — нехарактеристическая;

2) если на (σ)

$$a_1 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + a_2 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \dots + a_n \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_n} = 0, \quad (17)$$

то задача Коши (15) — (16) поставлена неправильно и, следовательно, поверхность (σ) — характеристическая.

Соотношение (17) является уравнением для характеристических поверхностей уравнения (13).

Пусть требуется определить семейства характеристических поверхностей для уравнения (13). Для этого берем уравнение (17) и составляем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую уравнению (17):

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \dots, x_n)}. \quad (18)$$

Пусть

$$\psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_i \quad (i = \overline{1, n-1}) \quad (19)$$

— независимые первые интегралы системы (18). Утверждаем, что поверхности, определяемые соотношениями (19), образуют семейства характеристических поверхностей для уравнения (13).

В самом деле, по теореме 1 предыдущего параграфа, функции $\omega = \psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i = \overline{1, n-1}$) являются решениями уравнения (17). Следовательно,

$$a_1 \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + a_2 \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \dots + a_n \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} = 0 \quad (i = \overline{1, n-1}).$$

Значит, поверхности, определяемые соотношениями (19), образуют семейства характеристических поверхностей для уравнения (13).

Пример 4. Найти решение уравнения $2\sqrt{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, удовлетворяющее условию $z(x, y)|_{x=1} = y^2$.

► Заданное уравнение — линейное однородное. Составляем соответствующее ему обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{dy}{-y}, \text{ откуда } ye^{\sqrt{x}} = C \text{ — первый интеграл уравнения.}$$

Значит, $z = \psi(ye^{\sqrt{x}})$, где ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, есть общее решение заданного уравнения.

В этом примере задача Коши поставлена правильно, так как функция $\omega = x - 1$ не является решением уравнения $2\sqrt{x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} -$

$-y \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$ и, следовательно, линия (I), определяемая уравнением

$\omega = 0$ (т.е. уравнением $x = 1$), нехарактеристическая.

Для определения вида функции ψ используем начальное

условие $z(x, y)|_{x=1} = y^2$. Имеем: $\psi(ye^{\sqrt{x}})|_{x=1} = y^2$, т.е. $\psi(ye) = y^2$

$(= \frac{(ye)^2}{e^2})$. Значит, $\psi(ye^{\sqrt{x}}) = \frac{(ye^{\sqrt{x}})^2}{e^2}$ и, следовательно,

$$z(x, y) = \frac{y^2 e^{2\sqrt{x}}}{e^2} = y^2 e^{2(\sqrt{x}-1)}. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 5. Найти решение уравнения

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + xy \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

удовлетворяющее условию $u(x, y, z)|_{z=0} = x^2 + y^2$.

► Заданное уравнение — линейное однородное. Составляем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующих заданному уравнению в частных производных:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy}.$$

1) $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$, откуда $\frac{y}{x} = C_1$ — первый интеграл системы;

2) $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{xy}$, откуда $dx = \frac{dz}{y}$ или, принимая во внимание, что

$$y = C_1 x, \quad C_1 x dx = dz \Rightarrow z = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \Rightarrow z = \frac{y}{x} \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 \Rightarrow z - \frac{xy}{2} = C_2$$

— это еще один первый интеграл системы.

Значит, $u = \psi\left(\frac{y}{x}, z - \frac{xy}{2}\right)$, где ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, есть общее решение заданного уравнения.

В этом примере задача Коши поставлена правильно, так как функция $\omega = z$ не является решением уравнения

$$x \frac{\partial \omega}{\partial x} + y \frac{\partial \omega}{\partial y} + xy \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0,$$

и, следовательно, поверхность (σ) , определяемая уравнением $\omega = 0$ (т.е. уравнением $z = 0$), — нехарактеристическая.

Для определения вида функции ψ используем условие

$$u(x, y, z)|_{z=0} = x^2 + y^2.$$

Имеем $\psi\left(\frac{y}{x}, z - \frac{xy}{2}\right)\Big|_{z=0} = x^2 + y^2$, т.е. $\psi\left(\frac{y}{x}, -\frac{xy}{2}\right) = x^2 + y^2$.

Поверхность (σ) (в нашем случае плоскость $z = 0$) можно

считать заданной параметрическими уравнениями
$$\begin{cases} x = x \\ y = y, \quad x, y — \\ z = 0 \end{cases}$$

параметры.

Подставим эти выражения для x , y , z в найденные первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно, в соотношения: $\frac{y}{x} = C_1$ и $z - \frac{xy}{2} = C_2$. Получим

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = C_1 \\ -\frac{xy}{2} = C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = C_1 x \\ -\frac{C_1}{2} x^2 = C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = -\frac{2C_2}{C_1} \\ y^2 = -2C_1 C_2 \end{cases}.$$

У нас $\psi(C_1, C_2)|_{z=0} = x^2 + y^2 = -\frac{2C_2}{C_1} - 2C_1 C_2 = -\frac{2C_2}{C_1}(1 + C_1^2)$. Итак, получили: $\psi(C_1, C_2) = -\frac{2C_2}{C_1}(1 + C_1^2)$.

Подставив теперь здесь вместо C_1 и C_2 соответственно $\frac{y}{x}$ и $z - \frac{xy}{2}$, находим

$$\psi\left(\frac{y}{x}, z - \frac{xy}{2}\right) = -2 \frac{\left(z - \frac{xy}{2}\right) \cdot x}{y} \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = \frac{xy - 2z}{xy} (x^2 + y^2).$$

Следовательно, $u(x, y, z) = (xy - 2z)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$. ◀

Пример 6. Найти решение уравнения

$$z \frac{\partial z}{\partial x} + (z^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial y} + x = 0,$$

удовлетворяющее условию $z(x, y)|_{y=x^2} = 2x$.

► Заданное уравнение — квазилинейное. Рассматриваем вспомогательное уравнение

$$z \frac{\partial v}{\partial x} + (z^2 - x^2) \frac{\partial v}{\partial y} - x \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Составляем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую этому вспомогательному уравнению:

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{z^2 - x^2} = \frac{dz}{-x}.$$

1) $\frac{dx}{z} = \frac{dz}{-x} \Rightarrow x dx + z dz = 0 \Rightarrow z^2 + x^2 = C_1$ — первый интеграл системы;

2) $\frac{dx + dz}{z - x} = \frac{dy}{(z - x)(z + x)} \Rightarrow (z + x) d(z + x) = dy \Rightarrow \frac{(z + x)^2}{2} = y + C_2 \Rightarrow \frac{(z + x)^2}{2} - y = C_2$ — первый интеграл системы.

$v = \psi \left(z^2 + x^2, \frac{(z + x)^2}{2} - y \right)$ — общее решение вспомогательного уравнения.

Соотношение $\psi \left(z^2 + x^2, \frac{(z + x)^2}{2} - y \right) = 0$, где ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, дает общее решение исходного уравнения. Последнее соотношение может быть записано в виде $\frac{(z + x)^2}{2} - y = f(z^2 + x^2)$, где f — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Задача Коши в этом примере поставлена правильно, так как функция $\omega = y - x^2$ не является решением уравнения $z \frac{\partial \omega}{\partial x} + (z^2 - x^2) \frac{\partial \omega}{\partial y} - x \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$ и, следовательно, линия (I), определяемая уравнением $\omega = 0$ (т.е. уравнением $y = x^2$), нехарактеристическая.

Для определения вида функции f используем условие $z(x, y)|_{y=x^2} = 2x$. Имеем

$$f(z^2 + x^2)|_{y=x^2} = \left[\frac{(z + x)^2}{2} - y \right]_{y=x^2}.$$

Так как $z|_{y=x^2} = 2x$, то последнее соотношение запишется в виде

$$f(5x^2) = \frac{9x^2}{2} - x^2 = \frac{7}{2}x^2 \Rightarrow f(5x^2) = \frac{7}{10}(5x^2).$$

Значит, $f(z^2 + x^2) = \frac{7}{10}(z^2 + x^2)$, и, следовательно, будем иметь

$$\frac{7}{10}(z^2 + x^2) = \frac{(z + x)^2}{2} - y \Rightarrow (z^2 + x^2) = 5(xz - y). \blacktriangleleft$$

§7. Продолжение решений. Нелокальные свойства решений

Пусть имеется нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y). \quad (1)$$

Считаем, что $F(x, Y) \in C(D)$, $(D) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(D)$ — локально. Рассмотрим произвольное решение системы (1)

$$Y = \varphi(x), \quad x \in I = \langle a, b \rangle. \quad (2)$$

Определение. Если существует решение системы (1)

$$Y = \varphi_1(x), \quad x \in I_1 = \langle a_1, b_1 \rangle, \quad (3)$$

такое, что

$$1) \quad I \subset I_1, \quad I \neq I_1, \text{ и}$$

$$2) \quad \varphi_1(x) \equiv \varphi(x), \quad x \in I,$$

то решение (2) называется *продолжимым*, а решение (3) называется *продолжением* решения (2) на промежуток I_1 .

Если промежуток I_1 является расширением промежутка I лишь вправо, то решение (2) называется *продолжимым вправо*, а решение (3) называется *продолжением вправо*.

Если промежуток I_1 является расширением промежутка I лишь влево, то решение (2) называется *продолжимым влево*, а решение (3) называется *продолжением влево*.

Теорема 1 (о продолжимости решения, определенного на сегменте или полусегменте). Пусть $Y = \varphi(x)$, $x \in I$, — решение системы (1). Тогда:

1) если $I = [a, b]$, то решение $Y = \varphi(x)$ продолжимо в обе стороны;

2) если $I = [a, b)$, то решение $Y = \varphi(x)$ продолжимо влево;

3) если $I = (a, b]$, то решение $Y = \varphi(x)$ продолжимо вправо.

► Пусть для определенности $Y = \varphi(x)$ — решение системы (1), определенное на $I = (a, b]$. Покажем, что это решение продолжимо вправо. Пусть $\varphi(b) = C$. По определению решения, точка $(b, \varphi(b))$, т.е. точка $(b, C) \in (D)$.

Так как точка $(b, C) \in (D)$, то существует решение системы (1), проходящее через эту точку. Пусть таковым решением является

$$Y = \psi(x), \quad x \in [b-h, b+h], \quad h > 0, \quad \psi(b) = C.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in I = (a, b], \\ \psi(x), & x \in [b, b+h]. \end{cases}$$

Отметим, что $\varphi_1(x)$ определена и непрерывна на $I_1 = (a, b+h]$. Покажем, что она является решением системы на промежутке $(a, b+h] = I_1$.

Имеем: 1) для любого $x \in I_1$ точка $(x, \varphi_1(x)) \in (D)$.

Имеем, далее:

$$\text{для } x \in (a, b) \quad \varphi_1'(x) = \varphi'(x) = F(x, \varphi(x)) = F(x, \varphi_1(x));$$

$$\text{для } x \in (b, b+h] \quad \varphi_1'(x) = \psi'(x) = F(x, \psi(x)) = F(x, \varphi_1(x)).$$

$\varphi(x)$ имеет в точке b левостороннюю производную $\Rightarrow \varphi_1(x)$ имеет в точке b левостороннюю производную, причем

$$\varphi_1'(b-0) = \varphi'(b-0) = F(b, \varphi(b)) = F(b, C).$$

$\psi(x)$ имеет в точке b правостороннюю производную $\Rightarrow \varphi_1(x)$ имеет в точке b правостороннюю производную, причем

$$\varphi_1'(b+0) = \psi'(b+0) = F(b, \psi(b)) = F(b, C).$$

Видим, что существуют $\varphi_1'(b-0)$ и $\varphi_1'(b+0)$, причем $\varphi_1'(b-0) = \varphi_1'(b+0) = F(b, C) \Rightarrow$ существует $\varphi_1'(b)$, причем

$$\varphi_1'(b) = F(b, C) = F(b, \varphi_1(b)).$$

Таким образом, для $x \in I_1$ существует $\varphi_1'(x)$, причем $\varphi_1'(x) = F(x, \varphi_1(x))$.

Вывод: вектор-функция $Y = \varphi_1(x)$, $x \in I_1 = (a, b+h]$, есть решение системы (1). Это решение определено на промежутке I_1 , который является расширением вправо промежутка I . Так как $\varphi_1(x) \equiv \varphi(x)$, $x \in I$, то заключаем, что $\varphi_1(x)$, $x \in I_1$, — продолжение вправо решения $\varphi(x)$, $x \in I$.

Следствие. Решение системы (1), определенное на некотором сегменте или полусегменте, всегда может быть продолжено на некоторый интервал.

► Для определенности рассмотрим опять решение $Y = \varphi(x)$ системы (1), определенное на $I = (a, b]$. По теореме 1 это решение имеет продолжение $\varphi_1(x)$, $x \in I_1 = (a, b_1]$, где $b_1 = b+h$, $h > 0$. По теореме 1 решение $\varphi_1(x)$ имеет продолжение $\varphi_2(x)$, $x \in I_2 = (a, b_2]$, где $b_2 = b_1+h_1$, $h_1 > 0$.

Очевидно, что решение $\varphi_2(x)$, $x \in I_2$, является продолжением исходного решения $\varphi(x)$, $x \in I$. Продолжая этот процесс аналогичным образом, получим бесконечную последовательность продолжений исходного решения $\varphi(x)$, $x \in I$:

$$\varphi_n(x), \quad x \in I_n = (a, b_n], \quad b_n = b_{n-1} + h_{n-1}, \quad h_{n-1} > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Здесь $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — монотонно возрастающая числовая последовательность. Следовательно, $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \tilde{b}$ ($\tilde{b} \leq +\infty$).

Рассмотрим теперь вектор-функцию:

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi_n(x), \quad x \in I_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Эта функция определена на любом I_n и, следовательно, определена на $\tilde{I} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = (a, \tilde{b})$. При этом для любого $x \in \tilde{I}$ существует n ,

такое, что $x \in (a, b_n)$, и, следовательно,

$$\tilde{\varphi}'(x) = \varphi'_n(x) = F(x, \varphi_n(x)) = F(x, \tilde{\varphi}(x)).$$

Это означает, что функция

$$Y = \tilde{\varphi}(x), \quad x \in \tilde{I} = (a, \tilde{b})$$

есть решение системы (1). Ясно, что она — продолжение исходного решения вправо.

Таким образом, любое решение системы (1) мы можем считать определенным на некотором интервале.

Теорема 2 (об условиях продолжимости решения, заданного на интервале). Пусть

$$Y = \varphi(x), \quad x \in I = (a, b) \quad (*)$$

— решение системы (1) (считаем, что $b < +\infty$). Тогда:

I. если решение (*) удовлетворяет условиям:

$$1) \text{ существует } \lim_{x \rightarrow b-0} \varphi(x) = C,$$

$$2) \text{ точка } (b, C) \in (D),$$

то решение (*) продолжимо вправо на некоторый интервал $I_1 = (a, b_1)$, где $b_1 > b$,

и наоборот,

II. если решение (*) продолжимо вправо на некоторый интервал $I_1 = (a, b_1)$, где $b_1 > b$, то существует $\lim_{x \rightarrow b-0} \varphi(x) = C$ и точка $(b, C) \in (D)$.

Замечание. В предположении, что $a > -\infty$, аналогичные утверждения имеют место для продолжимости решения (*) влево.

► I. Рассмотрим вектор-функцию

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in I = (a, b), \\ C, & x = b. \end{cases}$$

Эта функция определена на промежутке $I_1 = (a, b]$ и, согласно условию 1) теоремы, $\varphi_1(x) \in C(I_1)$. Покажем, что $\varphi_1(x)$, $x \in I_1$, является решением системы (1) на промежутке I_1 .

Имеем:

1) для $x \in (a, b]$ точка $(x, \varphi_1(x)) \in (D)$.

В самом деле, для $x \in (a, b)$ $\varphi_1(x) = \varphi(x)$, а точка $(x, \varphi(x)) \in (D)$; для $x = b$ точка $(b, C) \in (D)$.

Имеем, далее,

2) для $x \in (a, b)$

$$\varphi'_1(x) = \varphi'(x) = F(x, \varphi(x)) = F(x, \varphi_1(x)).$$

Устремим в этом равенстве x к $b - 0$. Получим

$$\varphi'_1(x) = F(x, \varphi(x)) = \xrightarrow{x \rightarrow b-0} F(b, C)$$

$\Rightarrow \varphi_1(x)$ в точке $x = b$ имеет левостороннюю производную, причем $\varphi'_1(b - 0) = F(b, C)$.

Видим, таким образом, что $\varphi_1(x)$ — решение системы (1), определенное на $I_1 = (a, b]$. Ясно, что $\varphi_1(x)$, $x \in I_1$, — продолжение решения (*) на промежуток $(a, b]$.

По следствию к теореме 1, $\varphi_1(x)$, $x \in I_1$, можно продолжить на некоторый интервал $I_2 = (a, b_1)$, где $b_1 > b$. Обозначим это продолжение через

$$\varphi_2(x), \quad x \in I_2.$$

Ясно, что $\varphi_2(x)$, $x \in I_2$, — продолжение решения (*) на I_2 . Утверждение I теоремы доказано.

II. По условию, решение (*) имеет продолжение вправо: $\varphi_1(x)$, $x \in I_1 = (a, b_1)$, где $b_1 > b \Rightarrow$ существует $\lim_{x \rightarrow b} \varphi_1(x) = \varphi_1(b)$. Но тогда

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} \varphi_1(x) = \varphi_1(b) = C, \text{ т.е. } \lim_{x \rightarrow b-0} \varphi(x) \text{ существует.}$$

Имеем, далее: точка $(b, C) = (b, \varphi_1(b)) \in (D)$ как точка графика решения $Y = \varphi_1(x)$ системы (1). Видим, что утверждение II теоремы доказано. ◀

Теорема 3 (об условиях существования предела у решения $\varphi(x)$, заданного на интервале). Пусть $Y = \varphi(x)$ — решение системы (1), определенное на интервале $I = (a, b)$ ($b < +\infty$). Пусть точка $x_0 \in (a, b)$. Если вектор-функция $F(x, \varphi(x))$, $x \in [x_0, b)$, ограничена по норме, т.е. если существует $M > 0$, такое, что $\|F(x, \varphi(x))\| \leq M$, $x \in [x_0, b)$, то существует $\lim_{x \rightarrow b-0} \varphi(x)$.

► У нас $\varphi(x)$, $x \in I$ — решение системы (1). Следовательно, справедливо тождество

$$\varphi'(x) \equiv F(x, \varphi(x)), \quad x \in I.$$

Проинтегрируем это тождество по отрезку $[x_0, x] \subset [x_0, b)$. Получим

$$\varphi(x) \equiv \varphi(x_0) + \int_{x_0}^x F(x, \varphi(x)) dx, \quad x \in [x_0, b). \quad (*)$$

Возьмем теперь последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — любую, но такую, что $x_n \in [x_0, b)$ и $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$. Рассмотрим соответствующую последовательность значений функции

$$\{\varphi(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}. \quad (\Delta)$$

Покажем, что она фундаментальная. Для этого возьмем $\varepsilon > 0$ — любое. У нас последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — сходящаяся. ($x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$) $\Rightarrow$ взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N , такой, что для любых $n_1, n_2 > N$:

$|x_{n_1} - x_{n_2}| < \frac{\varepsilon}{M}$. В тождестве (*) положим сначала $x = x_{n_1}$, а затем $x = x_{n_2}$. Получим два соотношения. Вычтем из второго соотношения соответствующие части первого. Будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi(x_{n_2}) - \varphi(x_{n_1}) &= \int_{x_{n_1}}^{x_{n_2}} F(x, \varphi(x)) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \|\varphi(x_{n_2}) - \varphi(x_{n_1})\| &\leq \left\| \int_{x_{n_1}}^{x_{n_2}} F(x, \varphi(x)) dx \right\| \leq M \cdot |x_{n_2} - x_{n_1}| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Видим, что взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер N , такой, что для любых $n_1, n_2 > N$ $\|\varphi(x_{n_2}) - \varphi(x_{n_1})\| < \varepsilon$. Последнее означает, что $\{\varphi(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ — фундаментальная. А из фундаментальности следует существование $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n)$.

Итак, для любой последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, такой, что $x_n \in [x_0, b)$ и $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$, оказывается, что соответствующая последовательность $\{\varphi(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ имеет конечный предел (важно подчеркнуть, что этот предел не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$). Значит, существует $\lim_{x \rightarrow b-0} \varphi(x)$. ◀

Замечание. Обозначим $\lim_{x \rightarrow b-0} \varphi(x) = C$. Следует иметь в виду, что точка (b, C) может принадлежать, а может и не принадлежать (D) .

Следствие. Пусть $\varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$ ($b < +\infty$), — решение системы (1). Пусть существует ограниченная замкнутая область $(\bar{D}_1) \subset (D)$ такая, что при некотором $x_0 \in (a, b)$ оказывается: точки $(x, \varphi(x)) \in (\bar{D}_1)$, $x \in [x_0, b)$. Тогда решение $\varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, продолжимо вправо на $I_1 = (a, b_1)$ ($b_1 > b$).

► Так как $(\bar{D}_1)$ — ограниченная замкнутая и $(\bar{D}_1) \subset (D)$, то $F(x, Y)$ — ограниченная на $(\bar{D}_1)$. По условию, точки $(x, \varphi(x)) \in (\bar{D}_1)$, $x \in [x_0, b) \Rightarrow F(x, \varphi(x))$, $x \in [x_0, b)$ — ограниченная. Тогда по теореме 3 существует $\lim_{x \rightarrow b-0} \varphi(x) = C$. У нас точки $(x, \varphi(x)) \in (\bar{D}_1)$, $x \in [x_0, b)$. Но тогда и предельная точка $(b, C) \in (\bar{D}_1) \subset (D)$. Видим, что выполнены условия теоремы 2 $\Rightarrow$ решение $\varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, продолжимо на интервал I_1 вправо. ◀

Определение. Пусть

$$Y = \varphi(x), \quad x \in I = (a, b), \quad (2)$$

— решение системы

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y). \quad (1)$$

Пусть (2) продолжимо на некоторый интервал $I^* = (\alpha, \beta)$, но не продолжимо ни на какой более широкий промежуток. Тогда I^* называют *максимальным интервалом существования решения* (2).

Если решение (2) продолжимо на $\tilde{I}^* = \langle a, \beta \rangle$, но не продолжимо вправо ни на какой более широкий интервал, то $\tilde{I}^*$ называют *максимальным вправо интервалом существования решения* (2).

Если решение (2) продолжимо на $\tilde{I}^* = \langle \alpha, b \rangle$, но не продолжимо влево ни на какой более широкий интервал, то $\tilde{I}^*$ называют *максимальным влево интервалом существования решения* (2).

Теорема 4 (о существовании максимального интервала существования решения). Любое решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I$, системы (1) имеет максимальный интервал существования $I^* = \langle \alpha, \beta \rangle$.

► Из следствия к теореме 1 следует, что решение $Y = \varphi(x)$ системы (1) можно считать заданным на некотором интервале $I = (a, b)$. Докажем сначала, что для $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, существует интервал существования решения $\tilde{I}^*$ — максимальный вправо. Могут иметь место два случая.

1 случай: $I = (a, +\infty)$. В этом случае интервал $(a, +\infty)$ уже является максимальным вправо.

2 случай: $I = (a, b)$, $b < +\infty$. В этом случае станем рассматривать промежуток $[b, +\infty)$. Все числа этого промежутка разобьем на два класса A и B по следующему правилу:

берем произвольное число c из промежутка $[b, +\infty)$; если решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, продолжимо на $(a, c]$, то c отправляем в класс A ;

если решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, непродолжимо на $(a, c]$, то c отправляем в класс B .

Могут реализоваться следующие возможности:

1) $A = \emptyset$, т.е. для любого $c \in [b, +\infty)$ решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, непродолжимо на $(a, c]$. Это означает, что решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, непродолжимо вправо. Значит, (a, b) — является максимальным вправо интервалом существования решения $Y = \varphi(x)$.

2) $B = \emptyset$, т.е. для любого $c \in [b, +\infty)$ решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, продолжимо на $(a, c]$. Это означает, что решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, продолжимо на $(a, +\infty)$. Следовательно, $I^* = (a, +\infty)$ — максимальный вправо интервал существования решения $Y = \varphi(x)$.

3) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. Так как любое число $c \in [b, +\infty)$ попадает либо только в A , либо только в B , и так как $c_1 < c_2$, если c_1 — любое из A , а c_2 — любое из B , то существует число $\beta = A|B$, осуществляющее сечение $[b, +\infty)$. Отметим, что $\beta \in B$ (если бы было $\beta \notin B$, то $\beta \in A$, причем $\beta = \max A \Rightarrow$ решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, было бы продолжимо вправо на $I_1 = (a, \beta]$, а следовательно, по теореме 1 оно было бы продолжимо на промежуток $(a, \beta + h]$, где $h > 0 \Rightarrow \beta + h \in A \Rightarrow \beta$ не есть $\max A$).

Таким образом, в случае 3) будем иметь:

для любого $c \in [b, \beta)$ решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, продолжимо на $(a, c]$; значит, оно продолжимо на (a, β) , а

для любого $c \in [\beta, +\infty)$ решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, не-продолжимо на $(a, c]$.

Вывод. Решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, продолжимо на $\tilde{I}^* = (a, \beta)$ и непродолжимо ни на какой более широкий интервал вправо.

Совершенно аналогично устанавливается, что для решения $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, имеется интервал существования $\tilde{I}^* = (\alpha, b)$ — максимальный влево.

Общий вывод. Решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, имеет максимальный интервал существования $I^* = (\alpha, \beta)$. ◀

Теорема 5 (нелокальная теорема единственности). Пусть имеется система

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y). \quad (1)$$

Пусть $F(x, Y) \in C(D)$; $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(D)$ — локально, $(D) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда любые два решения системы (1), имеющие общую точку, совпадают на общем промежутке их существования.

► Пусть $Y = \varphi_1(x)$, $x \in I_1 = (a_1, b_1)$, и $Y = \varphi_2(x)$, $x \in I_2 = (a_2, b_2)$, — два решения системы (1) — любые, но такие, что существует точка $x_0 \in I_1 \cap I_2$, в которой

$$\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) = Y_0.$$

Пусть $I = I_1 \cap I_2 = (a, b)$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что

$$\varphi_2(x) \equiv \varphi_1(x), \quad x \in I.$$

Будем доказывать это тождество для промежутка $I^+ = [x_0, b)$ (для промежутка $I^- = (a, x_0]$ доказательство аналогичное).

От противного. Допустим, что $\varphi_2(x) \neq \varphi_1(x)$, $x \in [x_0, b)$. Но тогда существует число $\tilde{b} \in [x_0, b)$, такое, что

$$1) \varphi_2(x) = \varphi_1(x), \quad x \in [x_0, \tilde{b}],$$

$$2) \varphi_2(x) \neq \varphi_1(x), \quad x \in [x_0, \tilde{b} + \delta), \text{ для любого } \delta > 0.$$

В точке $\tilde{b}$ оба решения определены, причем

$$\varphi_2(\tilde{b}) = \varphi_1(\tilde{b}) = \tilde{C}.$$

Тогда точка $(\tilde{b}, \tilde{C}) \in (D)$ (это — общая точка графиков наших решений).

Теперь можем применить локальную теорему единственности. Так как решения $Y = \varphi_1(x)$ и $Y = \varphi_2(x)$ проходят через точку $(\tilde{b}, \tilde{C})$, то существует число $\tilde{\delta} > 0$, такое, что

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x), \quad x \in (\tilde{b} - \tilde{\delta}, \tilde{b} + \tilde{\delta}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_2(x) = \varphi_1(x), \quad x \in [x_0, \tilde{b} + \tilde{\delta}).$$

А это противоречит тому, что $\varphi_2(x) \neq \varphi_1(x)$, $x \in [x_0, \tilde{b} + \delta)$, для любого $\delta > 0$. Значит, предположение, что $\varphi_2(x) \neq \varphi_1(x)$, $x \in [x_0, b)$, неверно.

Вывод: $\varphi_2(x) \equiv \varphi_1(x)$, $x \in [x_0, b)$. ◀

Следствие (из теоремы 5). Если решение $Y = \varphi(x)$, $x \in I = (a, b)$, продолжимо на интервал I_1 , то это его продолжение на I_1 — единственное.

► В самом деле, пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — любые два продолжения решения $Y = \varphi(x)$, $x \in I$, на промежуток I_1 . Но тогда оба эти решения определены на I_1 и совпадают на I . Значит, по теореме 5, они совпадают на I_1 . ◀

Теорема 6 (нелокальная теорема существования решения). Пусть имеется система

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y). \quad (1)$$

Пусть $F(x, Y) \in C(D)$; $F(x, Y) \in \text{Lip}_Y(D)$ — локально, где $(D) = \{(x, Y), a < x < b, \|Y\| < +\infty\}$. Пусть $\|F(x, Y)\| \leq p(x) \cdot \|Y\| + q(x)$, $(x, Y) \in (D)$, $p(x), q(x) \in C((a, b))$, $p(x), q(x) \geq 0$, $x \in (a, b)$. Тогда любое решение $Y = \varphi(x)$ системы (1) продолжимо на интервал (a, b) .

► Пусть $Y = \varphi(x)$ — произвольное решение системы (1). Пусть $I = (\alpha, \beta)$ — максимальный интервал существования этого решения. Покажем, что $I = (\alpha, \beta) = (a, b)$.

Допустим, что это не так. Пусть, например, $\beta < b$ ($\alpha = a$) ($\Rightarrow (\alpha, \beta) \subset (a, b)$; $(\alpha, \beta) \neq (a, b)$). Пусть $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Рассмотрим решение $Y = \varphi(x)$ на промежутке $[x_0, \beta]$. Покажем, что решение $Y = \varphi(x)$ — ограниченное на $[x_0, \beta]$.

Действительно, у нас $\varphi'(x) = F(x, \varphi(x))$, $x \in [x_0, \beta]$. Проинтегрируем это тождество по промежутку $[x_0, x] \subset [x_0, \beta]$. Получим

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^x F(t, \varphi(t)) dt, \quad x \in [x_0, \beta].$$

Оценим по норме:

$$\|\varphi(x)\| \leq \|\varphi(x_0)\| + \int_{x_0}^x (p(t) \cdot \|\varphi(t)\| + q(t)) dt, \quad x \in [x_0, \beta].$$

У нас $[x_0, \beta] \subset (a, b)$. Поэтому $p(t), q(t) \in C([x_0, \beta]) \Rightarrow$ существует $M > 0$ такое, что $p(t) \leq M$, $q(t) \leq M$, $t \in [x_0, \beta]$. А тогда

$$\|\varphi(x)\| \leq \underbrace{\|\varphi(x_0)\| + M \cdot (\beta - x_0)}_{= \lambda = \text{const} > 0} + M \cdot \int_{x_0}^x \|\varphi(t)\| dt, \quad x \in [x_0, \beta].$$

Видим, что $\|\varphi(x)\| = f(x)$ (обозначение) удовлетворяет на $[x_0, \beta]$ условиям леммы Гронуола $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \|\varphi(x)\| \leq \lambda e^{M \cdot (x - x_0)} \leq \underbrace{\lambda e^{M \cdot (\beta - x_0)}}_{= M_1 = \text{const}} = M_1, \quad x \in [x_0, \beta].$$

Рассмотрим теперь $(\bar{D}_1) = \left\{ \begin{array}{l} x_0 \leq x \leq \beta, \\ \|Y\| \leq M_1. \end{array} \right.$ Видим, что $(\bar{D}_1)$ —

ограниченная замкнутая область, такая, что $(\bar{D}_1) \subset (D)$. Из изло-

женного выше следует: существует точка $x_0 \in (\alpha, \beta)$, такая, что для любого x из промежутка $[x_0, \beta)$ оказывается: точка $(x, \varphi(x)) \in (\bar{D}_1)$. Но тогда по следствию к теореме 3 решение $\varphi(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$, продолжимо вправо, а это не так (у нас по условию промежуток (α, β) — максимальный вправо интервал существования решения $\varphi(x)$). Значит, наше предположение, что $(\alpha, \beta) \neq (a, b)$, неверно. Следовательно, $(\alpha, \beta) = (a, b)$. ◀

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§1. Некоторые сведения из теории матриц

1) Матрицу A , имеющую n строк и k столбцов, будем обозначать либо символом $A = \{a_{ij}\}$ ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, k}$; $i, j \in \mathbb{N}$), a_{ij} — числа (вещественные или комплексные), либо символом

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_k), \text{ где } a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \quad (j = \overline{1, k}).$$

2) Пусть α — определенное число. Тогда, как известно,

$$\alpha \cdot A = A \cdot \alpha = \{\alpha \cdot a_{ij}\};$$

$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$ (A и B — матрицы одинакового строения).

3) Пусть $A = \{a_{il}\}$ ($i = \overline{1, n}$; $l = \overline{1, k}$), $B = \{b_{lj}\}$ ($l = \overline{1, k}$; $j = \overline{1, m}$). По определению считают

$$A \cdot B = \left\{ \sum_{l=1}^k a_{il} \cdot b_{lj} \right\} \quad (i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}).$$

Отметим, что

$$A \cdot B = A \cdot (b_1, b_2, \dots, b_m) = (A \cdot b_1, A \cdot b_2, \dots, A \cdot b_m).$$

4) **Определение.** Нормой матрицы $A = \{a_{ij}\}$ ($i = \overline{1, n}; j = \overline{1, k}$)

называют число $\max_{\substack{i=\overline{1, n} \\ j=\overline{1, k}}} |a_{ij}| = \|A\|$.

Легко убедиться, что выполняются соотношения

$\|A\| \geq 0$ для любой A , причем $(\|A\| = 0) \Leftrightarrow (A = 0)$;

$\|\alpha \cdot A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$;

$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (A и B — матрицы одинакового строения).

Отметим следующее свойство нормы произведения матриц.

Пусть $A = \{a_{il}\}$ ($i = \overline{1, n}; l = \overline{1, k}$), $B = \{b_{lj}\}$ ($l = \overline{1, k}; j = \overline{1, m}$).

Тогда $\|A \cdot B\| \leq k \cdot \|A\| \cdot \|B\|$.

► В самом деле, имеем

$$\|A \cdot B\| \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\substack{i=\overline{1, n} \\ j=\overline{1, m}}} \left| \sum_{l=1}^k a_{il} \cdot b_{lj} \right| \leq \max_{\substack{i=\overline{1, n} \\ j=\overline{1, m}}} \left(\sum_{l=1}^k |a_{il}| \cdot |b_{lj}| \right) \leq \sum_{l=1}^k \|A\| \cdot \|B\| = k \cdot \|A\| \cdot \|B\|. \blacktriangleleft$$

Рассмотрим теперь матрицу

$$A(x) = \{a_{ij}(x)\} \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, k}),$$

в которой $a_{ij}(x)$ — функции вещественного аргумента x , определенные в некотором промежутке $I = \langle a, b \rangle$. $A(x)$ называют *матрицей-функцией* аргумента x .

5) Говорят, что $A(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in I$, если в этой точке оказываются непрерывными одновременно функции $a_{ij}(x)$ ($i = \overline{1, n}; j = \overline{1, k}$).

$A(x)$ непрерывна на промежутке I , если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

6) Производная матрицы функции $A(x)$ определяется соотношением

$$\frac{dA(x)}{dx} = \left\{ \frac{da_{ij}(x)}{dx} \right\} \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, k}).$$

$\frac{dA(x)}{dx}$ существует, если существуют одновременно $\frac{da_{ij}(x)}{dx}$ ($i = \overline{1, n}; j = \overline{1, k}$).

Справедливы следующие утверждения.

Пусть матрицы-функции $A(x)$ и $B(x)$ одинакового строения, определенные и дифференцируемые на I . Тогда $\frac{d}{dx}(A(x) + B(x)) = \frac{dA(x)}{dx} + \frac{dB(x)}{dx}$, $x \in I$.

Пусть $A(x)$ определена и дифференцируема на I , α — постоянное число. Тогда $\frac{d}{dx}(\alpha \cdot A(x)) = \alpha \cdot \frac{dA(x)}{dx}$, $x \in I$.

Пусть $A(x) = \{a_{il}(x)\}$ ($i = \overline{1, n}$; $l = \overline{1, k}$) определена и дифференцируема на I , $B(x) = \{b_{lj}(x)\}$ ($l = \overline{1, k}$; $j = \overline{1, m}$) определена и дифференцируема на I . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(A(x) \cdot B(x)) &= \left\{ \frac{d}{dx} \sum_{l=1}^k a_{il}(x) \cdot b_{lj}(x) \right\} = \\ &= \left\{ \sum_{l=1}^k (a'_{il}(x) \cdot b_{lj}(x) + a_{il}(x) \cdot b'_{lj}(x)) \right\} = \\ &= \frac{dA(x)}{dx} \cdot B(x) + A(x) \cdot \frac{dB(x)}{dx}, \quad x \in I. \end{aligned}$$

Замечание. Пусть $A(x)$ — квадратная матрица-функция, определенная и дифференцируемая на I . Тогда

$$\frac{d}{dx}(A^2(x)) = A'(x) \cdot A(x) + A(x) \cdot A'(x), \quad x \in I.$$

Следует помнить, что, вообще говоря, $\frac{d}{dx}(A^2(x)) \neq 2A(x) \cdot A'(x)$, $x \in I$, ибо матрицы $A'(x)$ и $A(x)$ часто оказываются некоммутирующими.

7) Пусть $A(x) \in C(I)$, $I = [a, b]$. $\int_a^b A(x) dx$ определяется соотношением

$$\int_a^b A(x) dx = \left\{ \int_a^b a_{ij}(x) dx \right\} \quad (i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, k}).$$

В частности, для любого $x \in [a, b]$ имеем

$$\int_a^x A(t) dt = \left\{ \int_a^x a_{ij}(t) dt \right\} \quad (i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, k}).$$

Обозначим $A(x) \cdot Y + F(x) = \mathcal{F}(x, Y)$. Ясно, что $\mathcal{F}(x, Y) \in C(D)$, где

$$(D) = \left\{ \begin{array}{l} a < x < b, \\ \|Y\| < +\infty. \end{array} \right. \text{ Имеем}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}(x, Y)}{\partial Y} = A(x) \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{F}(x, Y)}{\partial Y} \in C(D).$$

Значит, (D) — область существования и единственности решений системы (1).

Положим $p(x) = \max_{i,j=1,n} |a_{ij}(x)|$, $q(x) = \max_{i=1,n} |f_i(x)|$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(x, Y)\| &= \|A(x) \cdot Y + F(x)\| \leq \|A(x) \cdot Y\| + \|F(x)\| \leq \\ &\leq p(x) \cdot n \cdot \|Y\| + q(x) = \tilde{p}(x) \cdot \|Y\| + q(x), \end{aligned}$$

где $\tilde{p}(x) = p(x) \cdot n$.

Видим, что выполнены условия нелокальной теоремы существования решения. По этой теореме *любое решение $Y = \varphi(x)$ линейной системы (1) продолжимо на интервал (a, b)* .

Справедливо также утверждение: *любые два решения линейной системы (1), проходящие через одну и ту же точку, совпадают на всем интервале (a, b)* .

Действительно, по указанной выше теореме, любые два решения системы (1) продолжимы на интервал (a, b) . Но тогда, по нелокальной теореме единственности, они совпадают на (a, b) .

Если в системе (1) $F(x) \equiv 0$, $x \in I$, то вместо (1) будем иметь

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y. \quad (1_0)$$

(1₀) называют линейной *однородной* системой дифференциальных уравнений. Отметим следующие простейшие свойства решений системы (1₀).

1. $Y = 0$, $x \in I$ — решение системы (1₀) (очевидно).

2. Если вектор-функции $Y = \varphi_1(x)$, $x \in I$, и $Y = \varphi_2(x)$, $x \in I$, — решения линейной однородной системы (1₀), то вектор-функция $Y = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, $x \in I$, — решение системы (1₀).

► В самом деле, так как $Y = \varphi_1(x)$, $x \in I$, и $Y = \varphi_2(x)$, $x \in I$, — решения системы (1₀), то

$$\frac{d\varphi_1(x)}{dx} - A(x) \cdot \varphi_1(x) \equiv 0, \quad x \in I,$$

$$\frac{d\varphi_2(x)}{dx} - A(x) \cdot \varphi_2(x) \equiv 0, \quad x \in I.$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) - A(x) \cdot (\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = \\ &= \frac{d\varphi_1(x)}{dx} + \frac{d\varphi_2(x)}{dx} - A(x) \cdot \varphi_1(x) - A(x) \cdot \varphi_2(x) = \\ &= \underbrace{\left(\frac{d\varphi_1(x)}{dx} - A(x) \cdot \varphi_1(x) \right)}_{\equiv 0, \quad x \in I} + \underbrace{\left(\frac{d\varphi_2(x)}{dx} - A(x) \cdot \varphi_2(x) \right)}_{\equiv 0, \quad x \in I} \equiv 0, \quad x \in I \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow Y = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, $x \in I$, — решение системы (l_0) . ◀

3. Если $Y = \varphi(x)$, $x \in I$, — решение системы (l_0) , а C — постоянная скалярная величина, то $Y = C \cdot \varphi(x)$, $x \in I$, — решение системы (l_0) .

► Действительно, по условию $Y = \varphi(x)$, $x \in I$, — решение системы $(l_0) \Rightarrow \frac{d\varphi(x)}{dx} - A(x) \cdot \varphi(x) \equiv 0$, $x \in I$. Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}(C \cdot \varphi(x)) - A(x) \cdot (C \cdot \varphi(x)) = C \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} - C \cdot A(x) \cdot \varphi(x) = \\ &= C \cdot \underbrace{\left(\frac{d\varphi(x)}{dx} - A(x) \cdot \varphi(x) \right)}_{\equiv 0, \quad x \in I} \equiv 0, \quad x \in I \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow Y = C \cdot \varphi(x)$, $x \in I$, — решение системы (l_0) . ◀

Следствие. Если $Y = \varphi_1(x)$, $x \in I$; $Y = \varphi_2(x)$, $x \in I$; ...; $Y = \varphi_m(x)$, $x \in I$, — решения линейной однородной системы (l_0) , а $C_1, C_2, \dots, C_m$ — произвольные постоянные числа, то вектор-функция

$$Y = C_1 \cdot \varphi_1(x) + C_2 \cdot \varphi_2(x) + \dots + C_m \cdot \varphi_m(x)$$

— решение системы (l_0) .

Замечание. Если $m = n$, то вектор-функция

$$Y = C_1 \cdot \varphi_1(x) + C_2 \cdot \varphi_2(x) + \dots + C_n \cdot \varphi_n(x), \quad x \in I, \quad (2)$$

будет решением системы (l_0) , зависящим от x и от $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Вопрос: будет ли (2) общим решением системы (l_0) ?

Ответ: не всегда.

Выясним, какими должны быть решения $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ системы (l_0) , чтобы вектор-функция (2) была общим решением этой системы.

**§3. Линейная зависимость
и линейная независимость вектор-функций.
Признаки линейной независимости решений
линейной однородной системы**

Пусть

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (1)$$

— вектор-функции, определенные на некотором $I = (a, b)$.

Определение. Если существуют числа $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, среди которых есть отличные от нуля, такие, что

$$\gamma_1 \cdot \varphi_1(x) + \gamma_2 \cdot \varphi_2(x) + \dots + \gamma_n \cdot \varphi_n(x) \equiv 0, \quad x \in I, \quad (2)$$

то вектор-функции (1) называются линейно зависимыми на $I = (a, b)$.

Если же тождество (2) имеет место лишь тогда, когда $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_n = 0$, то вектор-функции (1) называются линейно независимыми на I .

Пусть вектор-функции (1) являются решениями линейной однородной системы

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y. \quad (l_0)$$

Образуем матрицу

$$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)). \quad (3)$$

$\Phi(x)$ называют матрицей решений системы (l_0) .

Определитель матрицы $\Phi(x)$ обозначают через $W(x)$ и называют вронскианом, составленным для решений системы (l_0) . Таким образом, по определению,

$$W(x) = \det \Phi(x), \quad x \in I.$$

Теорема 1 (необходимый признак линейной зависимости n решений системы (l_0)). Если решения $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$, $x \in I$, системы (l_0) линейно зависимы на $I = (a, b)$, то их вронскиан

$$W(x) \equiv 0, \quad x \in I.$$

► По условию, решения (1) системы (1_0) — линейно зависи-

мые на $I = (a, b) \Rightarrow$ существует (постоянный) вектор $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix} \neq 0$,

такой, что

$$\Phi(x) \cdot C \equiv 0, \quad x \in I. \quad (4)$$

Это означает, что для $x \in I$ линейная алгебраическая система (4) с матрицей коэффициентов $\Phi(x)$ и с неизвестными $C_1, C_2, \dots, C_n$ имеет решение, отличное от чисто нулевого. Но это возможно лишь тогда, когда $\det \Phi(x) = 0$ для $x \in I$. ◀

Следствие (достаточный признак линейной независимости n решений системы (1_0)). Если существует точка $x_0 \in I$, такая, что $W(x_0) \neq 0$, то решения $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$, $x \in I$, системы (1_0) линейно независимы на I .

► Рассуждаем от противного. Допускаем, что решения (1) системы (1_0) — линейно зависимые на I . Но тогда по теореме 1 получаем, что $W(x) \equiv 0$, $x \in I \Rightarrow$ в частности, $W(x_0) = 0$, а это не так.

Теорема 2 (достаточный признак линейной зависимости n решений системы (1_0)). Пусть вектор-функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$, $x \in I$, — решения системы (1_0) . Пусть $W(x)$ — их вронскиан. Если существует точка $x_0 \in I$, такая, что $W(x_0) = 0$, то решения (1) системы (1_0) — линейно зависимые на $I = (a, b)$.

► Введем в рассмотрение линейную алгебраическую систему

$$\Phi(x_0) \cdot C = 0, \quad (5)$$

где $\Phi(x)$ — матрица, составленная из решений (1) системы (1_0) ,

а $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix}$ — неизвестный вектор. По условию,

$\det \Phi(x_0) = W(x_0) = 0 \Rightarrow$ система (5) имеет ненулевое решение

$$C^{(0)} = \begin{pmatrix} C_1^{(0)} \\ C_2^{(0)} \\ \dots \\ C_n^{(0)} \end{pmatrix} \quad (C^{(0)} \neq 0).$$

Рассмотрим решение системы (l_0)

$$Y = C_1^{(0)} \cdot \varphi_1(x) + C_2^{(0)} \cdot \varphi_2(x) + \dots + C_n^{(0)} \cdot \varphi_n(x) = \Phi(x) \cdot C^{(0)}. \quad (6)$$

Это решение, в силу (5), удовлетворяет начальному условию

$$Y|_{x=x_0} = 0 \quad (7)$$

(ибо, в силу (5), $\Phi(x_0) \cdot C^{(0)} = 0$). Но начальному условию (7) удовлетворяет также решение $Y \equiv 0$, $x \in I$, системы (l_0) . Мы знаем, что для линейной системы любые два решения, проходящие через одну и ту же точку, совпадают на всем интервале $I = (a, b)$. Следовательно, будем иметь

$$\Phi(x) \cdot C^{(0)} = 0, \quad x \in I.$$

Так как $C^{(0)} \neq 0$, то последнее соотношение означает, что решения $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, $x \in I$, системы (l_0) — линейно зависимые на $I = (a, b)$. ◀

Следствие (необходимый признак линейной независимости n решений системы (l_0)). Если решения $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, $x \in I$, системы (l_0) — линейно независимые на I , то

$$W(x) \neq 0 \text{ для } x \in I.$$

► В самом деле, допустим, что имеется хотя бы одна точка $x_0 \in I$, такая, что $W(x_0) = 0$. Но тогда по теореме 2 получаем, что решения $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, $x \in I$, — линейно зависимые на I , а это не так. ◀

Определение. Пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, $x \in I = (a, b)$, — решения системы (l_0) , $\Phi(x)$ — матрица, составленная из этих решений. Если решения $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, $x \in I$, — линейно независимые на I , то матрицу $\Phi(x)$ называют *фундаментальной матрицей* решений системы (l_0) ($\Phi(x)$ — ф. м. р. с. (l_0)).

Если существует точка $x_0 \in I$, такая, что $\Phi(x_0) = E$, то $\Phi(x)$ — ф. м. р. с. (l_0) , нормированная в точке x_0 . Здесь и всюду в дальнейшем E — единичная матрица.

§4. Теорема о составлении общего решения линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Теорема. Пусть $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ — ф. м. р. с.

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y. \quad (l_0)$$

Тогда

$$Y = \Phi(x) \cdot C, \quad (1)$$

где C — произвольный постоянный вектор, есть общее решение

$$\text{системы } (1_0) \text{ в } (D) = \begin{cases} a < x < b, \\ \|\dot{Y}\| < +\infty. \end{cases}$$

► 1) Берем произвольную точку $(x_0, Y_0) \in (D)$ и рассматриваем векторное уравнение

$$Y_0 = \Phi(x_0) \cdot C. \quad (2)$$

(2) представляет собой алгебраическую систему линейных уравнений относительно компонентов вектора C . Определителем этой системы является $\det \Phi(x_0) \neq 0$. Следовательно, (2) однозначно разрешимо относительно C :

$$C^{(0)} = \Phi^{-1}(x_0) \cdot Y_0.$$

2) Подставив в (1) $C^{(0)}$ вместо C , будем иметь

$$Y = \Phi(x) \cdot C^{(0)} = C_1^{(0)} \cdot \varphi_1(x) + C_2^{(0)} \cdot \varphi_2(x) + \dots + C_n^{(0)} \cdot \varphi_n(x). \quad (3)$$

Вектор-функция (3) представляет собой линейную комбинацию решений $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$, $x \in I$, системы $(1_0) \Rightarrow (3)$ — решение системы (1_0) на $I = (a, b)$. Таким образом, показано, что

(1) удовлетворяет определению общего решения системы (1_0) . ◀

Замечание. Формула (3) может быть записана в виде

$$Y = \Phi(x) \cdot \Phi^{-1}(x_0) \cdot Y_0. \quad (\tilde{3})$$

($\tilde{3}$) — общее решение системы (1_0) в форме Коши. В частности, если $\Phi(x_0) = E$, то ($\tilde{3}$) принимает вид

$$Y = \Phi(x) \cdot Y_0.$$

Замечание (об общем виде фундаментальной матрицы решений системы (1_0)).

1) Пусть $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ — ф. м. р. с. (1_0) . Пусть C — постоянная, произвольная, неособенная матрица порядка n . Тогда

$$\Psi(x) = \Phi(x) \cdot C \quad (4)$$

— тоже ф. м. р. с. (1_0) .

В самом деле, имеем

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \Phi(x) \cdot C = \Phi(x) \cdot (C_1, C_2, \dots, C_n) = \\ &= (\underbrace{\Phi(x) \cdot C_1}_{=\Psi_1(x)}, \underbrace{\Phi(x) \cdot C_2}_{=\Psi_2(x)}, \dots, \underbrace{\Phi(x) \cdot C_n}_{=\Psi_n(x)}).\end{aligned}$$

Так как $\Psi_1(x) = \Phi(x) \cdot C_1$, $\Psi_2(x) = \Phi(x) \cdot C_2$, ..., $\Psi_n(x) = \Phi(x) \cdot C_n$ являются решениями системы (I_0) на $I = (a, b)$, то $\Psi(x) = (\Psi_1(x), \Psi_2(x), \dots, \Psi_n(x))$ — матрица решений системы (I_0) .

Имеем, далее,

$$\det \Psi(x) = \underbrace{\det \Phi(x)}_{\neq 0, x \in I} \cdot \underbrace{\det C}_{\neq 0} \neq 0, \quad x \in I \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Psi(x)$ — ф. м. р. с., (I_0) .

2) Пусть $\Phi(x)$ — ф. м. р. с., (I_0) . Пусть $\Psi(x)$ — любая другая ф. м. р. с., (I_0) . Тогда обязательно существует неособенная, постоянная матрица C , такая, что

$$\Psi(x) = \Phi(x) \cdot C$$

(т.е. любая ф. м. р. с., (I_0) содержится при некоторой неособенной матрице C в выражении $\Phi(x) \cdot C$).

В самом деле, пусть $\Psi(x) = (\Psi_1(x), \Psi_2(x), \dots, \Psi_n(x))$ — произвольная ф. м. р. с. $(I_0) \Rightarrow Y = \Psi_j(x)$ ($j = \overline{1, n}$) — решение системы (I_0) . По теореме об общем решении системы (I_0) заключаем: существует постоянный вектор C_j ($j = \overline{1, n}$), такой, что

$$\Psi_j(x) = \Phi(x) \cdot C_j \quad (j = \overline{1, n}).$$

Получаем, таким образом,

$$\Psi(x) = (\Phi(x) \cdot C_1, \Phi(x) \cdot C_2, \dots, \Phi(x) \cdot C_n) \equiv \Phi(x) \cdot C,$$

где $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$.

Остается показать, что $\det C \neq 0$. Имеем

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \Phi(x) \cdot C \Rightarrow C = \Phi^{-1}(x) \cdot \Psi(x) \Rightarrow \\ \det C &= \underbrace{\det \Phi^{-1}(x)}_{\neq 0, x \in I} \cdot \underbrace{\det \Psi(x)}_{\neq 0, x \in I} \neq 0.\end{aligned}$$

Отметим, в частности, что если $\Phi(x_0) = E$, то $C = \Psi(x_0)$.

§5. Формула Остроградского — Лиувилля

Пусть имеется линейная однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y. \quad (1_0)$$

Пусть $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ — матрица решений системы (1_0) (не обязательно фундаментальная). Пусть $W(x) = \det \Phi(x)$ — вронскиан. Тогда

$$W(x) = W(x_0) \cdot \exp \left(\int_{x_0}^x \sum_{i=1}^n a_{ii}(t) dt \right), \text{ для любого } x \in (a, b)$$

($x_0 \in (a, b)$ фиксированное, любое).

► Имеем

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underbrace{\varphi_{n1}(x)}_{\varphi_{n1}(x)} & \underbrace{\varphi_{n2}(x)}_{\varphi_{n2}(x)} & \dots & \underbrace{\varphi_{nn}(x)}_{\varphi_{nn}(x)} \end{vmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow W'(x) &= \begin{vmatrix} \varphi'_{11}(x) & \varphi'_{12}(x) & \dots & \varphi'_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi'_{21}(x) & \varphi'_{22}(x) & \dots & \varphi'_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} + \\ &+ \dots + \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi'_{n1}(x) & \varphi'_{n2}(x) & \dots & \varphi'_{nn}(x) \end{vmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{i-1,1}(x) & \varphi_{i-1,2}(x) & \dots & \varphi_{i-1,n}(x) \\ \varphi'_{i,1}(x) & \varphi'_{i,2}(x) & \dots & \varphi'_{i,n}(x) \\ \varphi_{i+1,1}(x) & \varphi_{i+1,2}(x) & \dots & \varphi_{i+1,n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

У нас вектор-функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ являются решениями системы (1_0) . Поэтому

$$\varphi'_{i1}(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \cdot \varphi_{j1}(x), \quad \varphi'_{i2}(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \cdot \varphi_{j2}(x), \quad \dots,$$

$$\varphi'_{in}(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \cdot \varphi_{jn}(x).$$

А тогда

$$W'(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left| \begin{array}{cccc} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \cdot \varphi_{j1}(x) & \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \cdot \varphi_{j2}(x) & \dots & \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \cdot \varphi_{jn}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{array} \right| \left. \vphantom{\sum_{i=1}^n} \right\} \begin{array}{l} i\text{-я} \\ \text{строка} \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W'(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \cdot \left| \begin{array}{cccc} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{j1}(x) & \varphi_{j2}(x) & \dots & \varphi_{jn}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{array} \right| \left. \vphantom{\sum_{i=1}^n} \right\} \begin{array}{l} i\text{-я} \\ \text{строка} \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W'(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(x) \cdot W(x) = W(x) \cdot \sum_{i=1}^n a_{ii}(x).$$

Видим, что для $W(x)$ получено обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Решая это уравнение с начальным условием

$$W(x)|_{x=x_0} = W(x_0) \quad (x_0 \in (a, b)),$$

получаем $W(x) = W(x_0) \cdot \exp \left(\int_{x_0}^x \left(\sum_{i=1}^n a_{ii}(t) \right) dt \right)$, $x \in (a, b)$. Таким об-

разом, формула Остроградского — Лиувилля установлена. ◀

**§6. Теорема о составлении общего решения
линейной неоднородной системы
обыкновенных дифференциальных уравнений**

Теорема. Пусть имеется линейная неоднородная система

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y + F(x). \quad (1)$$

Введем в рассмотрение систему

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y \quad (1_0)$$

((1₀) — линейная однородная система, соответствующая неоднородной системе (1)). Пусть $\Phi(x) = (\Phi_1(x); \Phi_2(x); \dots; \Phi_n(x))$ — ф. м. р. с. (1₀). (Тогда $\tilde{Y} = \Phi(x) \cdot C$, где C — произвольный постоянный вектор, есть общее решение системы (1₀) в (D).)

Пусть вектор-функция $Y_*(x) = \psi(x)$, $x \in I$, — какое-нибудь решение неоднородной системы (1). Тогда

$$Y = \Phi(x) \cdot C + \psi(x) \quad (2)$$

есть общее решение системы (1) в (D).

► 1) Берем произвольную точку $(x_0, Y_0) \in (D)$ и рассматриваем векторное уравнение

$$\begin{aligned} Y_0 &= \Phi(x_0) \cdot C + \psi(x_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \Phi(x_0) \cdot C &= Y_0 - \psi(x_0). \end{aligned} \quad (3)$$

(3) — алгебраическая система линейных уравнений относительно компонентов вектора C . Определителем этой системы является $\det \Phi(x_0) \neq 0$. Следовательно, (3) имеет, и притом единственное, решение $C^{(0)} = \Phi^{-1}(x_0) \cdot (Y_0 - \psi(x_0))$.

2) Подставим в (2) $C^{(0)}$ вместо C . Получим

$$Y = \Phi(x) \cdot C^{(0)} + \psi(x). \quad (4)$$

Убедимся, что (4) является решением системы (1). Имеем

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx} [\Phi(x) \cdot C^{(0)} + \psi(x)] - A(x) \cdot [\Phi(x) \cdot C^{(0)} + \psi(x)] = \\ &= \frac{d}{dx} [\Phi(x) \cdot C^{(0)}] + \frac{d\psi(x)}{dx} - A(x) \cdot [\Phi(x) \cdot C^{(0)}] - A(x) \cdot \psi(x) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\frac{d}{dx} [\Phi(x) \cdot C^{(0)}] - A(x) \cdot [\Phi(x) \cdot C^{(0)}]}_{\equiv 0, \ x \in I} + \\
&+ \underbrace{\frac{d\psi(x)}{dx} - A(x) \cdot \psi(x)}_{\equiv F(x), \ x \in I} = F(x), \quad x \in I.
\end{aligned}$$

Показано, таким образом, что (2) удовлетворяет определению общего решения системы (1). ◀

**§7. Метод вариации произвольных постоянных
для нахождения решения $Y_*(x) = \psi(x)$
линейной неоднородной системы
обыкновенных дифференциальных уравнений**

Пусть имеется линейная неоднородная система

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y + F(x). \quad (1)$$

Тогда

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y \quad (1_0)$$

— линейная однородная система, соответствующая линейной неоднородной системе (1). Пусть $\Phi(x)$ — ф. м. р. с. $(1_0) \Rightarrow Y = \Phi(x) \cdot C$, где C — произвольный постоянный вектор, — общее решение системы (1_0) .

Станем искать решение $Y_*(x) = \psi(x)$ системы (1) в виде

$$Y_*(x) = \Phi(x) \cdot C(x), \quad (2)$$

где $C(x) = \begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \\ \dots \\ C_n(x) \end{pmatrix}$ — неизвестная (пока) вектор-функция. Хотим,

чтобы вектор-функция (2) была решением системы (1). Но тогда должно быть справедливо тождество

$$\begin{aligned}
&\Phi'(x) \cdot C(x) + \Phi(x) \cdot C'(x) \equiv A(x) \cdot \Phi(x) \cdot C(x) + F(x), \quad x \in I \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \underbrace{[\Phi'(x) - A(x) \cdot \Phi(x)] \cdot C(x)}_{\equiv 0, \ x \in I} + \Phi(x) \cdot C'(x) \equiv F(x), \quad x \in I \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \Phi(x) \cdot C'(x) \equiv F(x), \quad x \in I \Leftrightarrow C'(x) \equiv \Phi^{-1}(x) \cdot F(x), \quad x \in I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C(x) = \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t) \cdot F(t) dt$$

(произвольный постоянный вектор, который получается в результате интегрирования, можно считать равным 0). Здесь точки $x_0, x \in I = (a, b)$, — любые.

Видим, таким образом, что если в (2) в качестве $C(x)$ брать $C(x) = \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t) \cdot F(t) dt$, то вектор-функция

$$Y_*(x) = \Phi(x) \cdot \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t) \cdot F(t) dt, \quad x \in I,$$

будет решением системы (1).

Замечание. Общее решение линейной неоднородной системы (1) может быть записано, следовательно, в виде

$$Y = \Phi(x) \cdot C + \Phi(x) \cdot \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t) \cdot F(t) dt, \quad x \in I. \quad (3)$$

Пусть требуется найти решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию

$$Y|_{x=x_0} = Y_0 \text{ (точка } (x_0, Y_0) \in (D) \text{)}. \quad (4)$$

Подстановка в (3) начальных данных (4) дает

$$Y_0 = \Phi(x_0) \cdot C \Rightarrow C = \Phi^{-1}(x_0) \cdot Y_0.$$

Следовательно, решение задачи Коши (1) — (4) может быть записано в виде

$$Y = \Phi(x) \cdot \Phi^{-1}(x_0) \cdot Y_0 + \Phi(x) \cdot \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t) \cdot F(t) dt. \quad (5)$$

В частном случае, когда $\Phi(x_0) = E$, последняя формула принимает вид

$$Y = \Phi(x) \cdot Y_0 + \Phi(x) \cdot \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t) \cdot F(t) dt.$$

Прежде чем приступить к изложению метода интегрирования линейных систем с постоянными коэффициентами, продолжим обзор некоторых сведений из теории матриц, используемых в дальнейшем.

§8. Матричные последовательности и ряды

Пусть имеется последовательность матриц

$$\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \quad (1)$$

(в (1) $A_k = \{a_{ij}^{(k)}\}$ ($i, j = \overline{1, n}$)). Пусть имеется матрица $A = \{a_{ij}\}$ ($i, j = \overline{1, n}$).

Определение. Говорят, что последовательность матриц (1) сходится к матрице A при $k \rightarrow \infty$, и пишут $A_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A$ (или $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$), если $\|A_k - A\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Итак, по определению

$$\left(A_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A\right) \Leftrightarrow \left(\|A_k - A\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0\right).$$

Мы знаем, что $\|A_k - A\| = \max_{i, j = \overline{1, n}} |a_{ij}^{(k)} - a_{ij}|$. Поэтому

$$\left(\|A_k - A\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0\right) \Leftrightarrow \left(|a_{ij}^{(k)} - a_{ij}| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad i, j = \overline{1, n}\right).$$

Следовательно,

$$\left(A_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A\right) \Leftrightarrow \left(a_{ij}^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}\right),$$

т.е. сходимость последовательности матриц (1) эквивалентна одновременной сходимости n^2 числовых последовательностей.

Отметим следующие свойства сходящихся последовательностей матриц.

- 1) Если $A_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A$, то $\|A_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \|A\|$.
- 2) Если $A_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A$, $B_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} B$, то $A_k + B_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A + B$.
- 3) Если $A_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A$, $B_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} B$, то $A_k \cdot B_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A \cdot B$.

Установим, например, свойство 3.

► Имеем

$$\begin{aligned} A_k B_k - AB &= A_k B_k - A_k B + A_k B - AB = \\ &= A_k \cdot (B_k - B) + (A_k - A) \cdot B \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \|A_k B_k - AB\| \leq \|A_k \cdot (B_k - B)\| + \|(A_k - A) \cdot B\| \leq \\
&\leq n \cdot \underbrace{\|A_k\|}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \|A\|} \cdot \underbrace{\|B_k - B\|}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0} + n \cdot \underbrace{\|A_k - A\|}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0} \cdot \|B\| \Rightarrow \\
&\Rightarrow \|A_k B_k - AB\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow A_k B_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} AB. \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

Определение. Пусть $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — последовательность матриц. Выражение

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 + A_2 + \dots + A_k + \dots \quad (2)$$

называется матричным рядом.

Положим

$$\begin{aligned}
S_1 &= A_1, \\
S_2 &= A_1 + A_2, \\
&\dots \dots \dots \\
S_l &= A_1 + A_2 + \dots + A_l, \\
&\dots \dots \dots
\end{aligned}$$

(S_l — l -я частичная сумма матричного ряда (2)). Ясно, что $\{S_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ — последовательность частичных сумм ряда (2).

Если последовательность $\{S_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ сходится к матрице S при $l \rightarrow \infty$, то матричный ряд (2) называется сходящимся, а матрицу S называют суммой матричного ряда (2).

Пишут: $S = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$.

Отметим, что S_l есть матрица с элементами

$$\sum_{k=1}^l a_{ij}^{(k)} \quad (i, j = \overline{1, n}).$$

Следовательно, сходимость матричного ряда (2) означает сходимость n^2 обычных числовых рядов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)} \quad (i, j = \overline{1, n}).$$

Справедливо утверждение: пусть имеются два сходящихся матричных ряда

$$(I) \sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{ и } (II) \sum_{k=1}^{\infty} B_k$$

и пусть A и B — суммы рядов (I) и (II) соответственно. Тогда ряд

$$(III) \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + B_k) \text{ тоже сходится и имеет сумму } (A + B).$$

► В самом деле, пусть $S_l^{(I)}, S_l^{(II)}, S_l^{(III)}$ — l -е частичные суммы рядов (I), (II) и (III) соответственно. Имеем: $S_l^{(III)} = (S_l^{(I)} + S_l^{(II)})$
 $\Rightarrow S_l^{(III)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (A + B).$ ◀

§9. Матричные степенные ряды

Пусть имеется скалярный степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (1)$$

Пусть r — радиус сходимости, $f(x)$ — сумма ряда (1). Пусть A — произвольная квадратная матрица порядка n . Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \quad (2)$$

($A^0 = E$). Ряд (2) называется степенным рядом от матрицы A . Если ряд сходится, то его сумму условливаемся обозначать через $f(A)$.

Теорема (об условиях сходимости матричного степенного ряда). Пусть имеется скалярный степенной ряд (1):

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Пусть r — радиус сходимости, $f(x)$ — сумма этого ряда. Рассмотрим

ряд (2): $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$, где A — произвольная квадратная матрица

порядка n . Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — собственные числа матрицы A . Тогда:

1) если $|\lambda_j| < r$, для любого $j = \overline{1, m}$, то ряд (2) сходится;

2) если имеется хотя бы одно j_0 такое, что $|\lambda_{j_0}| > r$, то ряд (2) расходится.

► I. Рассмотрим сначала случай, когда матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_m \end{pmatrix},$$

где матрица A_j ($j = \overline{1, m}$) имеет размеры $(n_j \times n_j)$ и $\sum_{j=1}^m n_j = n \Rightarrow$

$A = \text{diag}[A_1, A_2, \dots, A_m]$. Наряду с рядом (2): $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ рассмотрим ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A_j^k \quad (j = \overline{1, m}). \quad (3)$$

Покажем, что ряд (2) сходится лишь тогда, когда сходится каждый из рядов (3) (причем, в случае сходимости: если $f(A)$ — сумма ряда (2), а $f(A_j)$ ($j = \overline{1, m}$) — суммы рядов (3), то $f(A) = \text{diag}[f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_m)]$). Для этого рассмотрим l -ю частичную сумму ряда (2). Имеем:

$$S_l = \sum_{k=0}^l a_k A^k = \sum_{k=0}^l a_k \cdot \begin{pmatrix} A_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2^k & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_m^k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^l a_k A_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^l a_k A_2^k & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sum_{k=0}^l a_k A_m^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_l(A_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_l(A_2) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_l(A_m) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f(A) = \lim_{l \rightarrow \infty} S_l(A) = \begin{pmatrix} \lim_{l \rightarrow \infty} S_l(A_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lim_{l \rightarrow \infty} S_l(A_2) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lim_{l \rightarrow \infty} S_l(A_m) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f(A_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(A_2) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(A_m) \end{pmatrix} = \text{diag}[f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_m)].$$

II. Допустим, что матрица A_j имеет вид ($j = \overline{1, m}$):

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_j & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_j \end{pmatrix} \text{ — клетка Жордана.}$$

Покажем, что если $|\lambda_j| < r$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A_j^k$ сходится, если же

$|\lambda_j| > r$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A_j^k$ расходится.

Вычислим матрицу A_j^k (для произвольного k). Для этого представим ее в виде

$$A_j = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{pmatrix}}_{=\lambda_j \cdot E} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=E_1} = \lambda_j E + E_1.$$

Отметим, что матрица $\lambda_j \cdot E$ коммутирует с любой матрицей (в частности, с матрицей E_1). Поэтому сумму $\lambda_j E + E_1$ можно возводить в степень по формуле бинорма Ньютона. Значит,

$$A_j^k = (\lambda_j E + E_1)^k = \lambda_j^k \cdot E + k \cdot \lambda_j^{k-1} \cdot E_1 + \\ + \frac{k(k-1)}{2} \cdot \lambda_j^{k-2} \cdot E_1^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots 1}{k!} E_1^k.$$

Подсчитаем различные степени матрицы E_1 . Имеем

$$E_1^2 = E_1 \cdot E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— имеет две первые нулевые строки и два последних нулевых столбца,

$$E_1^3 = E_1 \cdot E_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— имеет три первые нулевые строки и три последних нулевых столбца, и т. д. А тогда

$$A_j^k = (\lambda_j E + E_1)^k = \begin{pmatrix} \lambda_j^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ k\lambda_j^{k-1} & \lambda_j^k & 0 & \dots & 0 \\ \frac{k(k-1)}{2!} \lambda_j^{k-2} & k\lambda_j^{k-1} & \lambda_j^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_k^{n_j-1} \lambda_j^{k-(n_j-1)} & \dots & \dots & \dots & \lambda_j^k \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \lambda_j^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{(\lambda_j^k)'}{1!} & \lambda_j^k & 0 & \dots & 0 \\ \frac{(\lambda_j^k)''}{2!} & \frac{(\lambda_j^k)'}{1!} & \lambda_j^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(\lambda_j^k)^{(n_j-1)}}{(n_j-1)!} & \dots & \dots & \dots & \lambda_j^k \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$S_l(A_j) = \sum_{k=0}^l a_k A_j^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^l a_k \lambda_j^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\left(\sum_{k=0}^l a_k \lambda_j^k\right)'}{1!} & \sum_{k=0}^l a_k \lambda_j^k & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\left(\sum_{k=0}^l a_k \lambda_j^k\right)''}{2!} & \frac{\left(\sum_{k=0}^l a_k \lambda_j^k\right)'}{1!} & \sum_{k=0}^l a_k \lambda_j^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\left(\sum_{k=0}^l a_k \lambda_j^k\right)^{(n_j-1)}}{(n_j-1)!} & \dots & \dots & \dots & \sum_{k=0}^l a_k \lambda_j^k \end{pmatrix}.$$

Пусть $|\lambda_j| < r$. Тогда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_j^k$ — сходящийся. Пусть $f(\lambda_j)$ — сумма этого ряда. Но тогда существует

$$\lim_{l \rightarrow \infty} S_l(A_j) = f(A_j) = \begin{pmatrix} f(\lambda_j) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{f'(\lambda_j)}{1!} & f(\lambda_j) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{f''(\lambda_j)}{2!} & \frac{f'(\lambda_j)}{1!} & f(\lambda_j) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{f^{(n_j-1)}(\lambda_j)}{(n_j-1)!} & \dots & \dots & \dots & f(\lambda_j) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A_j^k$ сходится.

Пусть $|\lambda_j| > r$. Тогда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_j^k$ расходится $\Rightarrow$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A_j^k$ расходится.

III. Пусть теперь A — произвольная матрица размера $n \times n$, J — жорданова форма матрицы A , т.е. $J = \text{diag}[J_1, J_2, \dots, J_m]$, где

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_j & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_j \end{pmatrix} \quad (j = \overline{1, m}).$$

Пусть матрица S такая, что $A = SJS^{-1}$ ($\det S \neq 0$, S — матрица подобия; матрицы A и J имеют одинаковые собственные числа). Пусть собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ матрицы A удовлетворяют условию $|\lambda_j| < r$, $j = \overline{1, m}$. Но тогда, по доказанному, сходится ряд

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k J_j^k$ при любом $j = \overline{1, m}$, причем этот ряд имеет своей суммой

$$f(J_j) = \begin{pmatrix} f(\lambda_j) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{f'(\lambda_j)}{1!} & f(\lambda_j) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{f^{(n_j-1)}(\lambda_j)}{(n_j-1)!} & \dots & \dots & \dots & f(\lambda_j) \end{pmatrix} \quad (j = \overline{1, m}).$$

Следовательно, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k J^k$ сходится и имеет своей суммой матрицу:

$$f(J) = \text{diag}[f(J_1), f(J_2), \dots, f(J_m)].$$

Но тогда сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ и имеет своей суммой

$f(A) = S f(J) S^{-1}$. Допустим теперь, что имеется j_0 , такое, что

$|\lambda_{j_0}| > r$. Тогда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k J_{j_0}^k$ расходится (по доказанному) $\Rightarrow$ расхо-

дится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k J^k \Rightarrow$ расходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$, так как матрица A

подобна матрице J . ◀

§10. Экспонента от матрицы

Рассмотрим скалярный степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \quad (1)$$

Мы знаем, что радиус сходимости ряда (1) $r = +\infty$ и что сумма ряда (1) $f(x) = e^x$. Рассмотрим матрицу A размером $n \times n$ ($n \geq 1$) и матричный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \quad (2)$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — собственные числа матрицы A . Очевидно, что $|\lambda_j| < r$, $j = \overline{1, m}$. Следовательно, ряд (2) сходится для любой матрицы A .

Положим, по определению,

$$e^A e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \quad (3)$$

Найдем поэлементную структуру матрицы e^A .

Пусть $A = SJS^{-1}$, где $J = \text{diag}[J_1, J_2, \dots, J_m]$ — жорданова форма матрицы A ;

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_j & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_j \end{pmatrix} \quad (j = \overline{1, m}).$$

Имеем

$$e^A = e^{SJS^{-1}} = S e^J S^{-1} = S \cdot \text{diag}[e^{J_1}, \dots, e^{J_m}] \cdot S^{-1}.$$

Имеем, далее,

$$e^{J_j} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_j} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{e^{\lambda_j}}{1!} & e^{\lambda_j} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{e^{\lambda_j}}{2!} & \frac{e^{\lambda_j}}{1!} & e^{\lambda_j} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{e^{\lambda_j}}{(n_j-1)!} & \dots & \dots & \dots & e^{\lambda_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{1!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(n_j-1)!} & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_j}.$$

Отметим, что собственными числами матрицы e^A являются числа $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_m} \Rightarrow$ матрица e^A — неособенная для любой матрицы A .

§11. Матрица-функция e^{Ax}

Пусть A — произвольная матрица размера $n \times n$ ($n \geq 1$), x — скалярная величина. Тогда $A \cdot x$ — матрица размера $n \times n \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ax)^k}{k!}. \quad (1)$$

Найдем поэлементную структуру матрицы e^{Ax} . $A = SJS^{-1}$, где $J = \text{diag}[J_1, J_2, \dots, J_m]$; J_j ($j = \overline{1, m}$) — клетка Жордана. Тогда $e^{Ax} = e^{SJS^{-1}x} = e^{S \cdot Jx \cdot S^{-1}} = Se^{Jx}S^{-1}$, где $e^{Jx} = \text{diag}[e^{J_1x}, e^{J_2x}, \dots, e^{J_mx}]$.

Найдем поэлементную структуру матрицы e^{J_jx} . Имеем

$$e^{J_jx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(J_jx)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} J_j^k, \quad (2)$$

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_j & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

Составляем частичную сумму ряда (2):

$$S_l(e^{J_jx}) = \sum_{k=0}^l \frac{x^k}{k!} J_j^k = \sum_{k=0}^l \frac{x^k}{k!} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_j^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{(\lambda_j^k)'}{1!} & \lambda_j^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{(\lambda_j^k)^{(n_j-1)}}{(n_j-1)!} & \dots & \dots & \dots & \lambda_j^k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^l \frac{(\lambda_j x)^k}{k!} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\left(\sum_{k=0}^l \frac{(\lambda_j x)^k}{k!}\right)' \lambda_j}{1!} & \sum_{k=0}^l \frac{(\lambda_j x)^k}{k!} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\left(\sum_{k=0}^l \frac{(\lambda_j x)^k}{k!}\right)^{(n_j-1)} \lambda_j}{(n_j-1)!} & \dots & \dots & \dots & \sum_{k=0}^l \frac{(\lambda_j x)^k}{k!} \end{pmatrix}.$$

Переходя к пределу при $l \rightarrow +\infty$, получим

$$e^{J_j x} = \lim_{l \rightarrow \infty} S_l(e^{J_j x}) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_j x} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x \cdot e^{\lambda_j x}}{1!} & e^{\lambda_j x} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x^{n_j-1} \cdot e^{\lambda_j x}}{(n_j-1)!} & \dots & \dots & e^{\lambda_j x} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Итак, $e^{Jx} = \text{diag}[e^{J_1 x}, e^{J_2 x}, \dots, e^{J_m x}]$, где $e^{J_j x}$ ($j = \overline{1, m}$) — матрица размера $n_j \times n_j$, имеющая вид (3).

Найдем выражение для производной от матрицы-функции e^{Ax} . Имеем, по определению:

$$e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ax)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{A^k}{k!}}_{\substack{= B_k \\ \text{(обозн.)}}} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (B_k)_{ij} x^k \right\}.$$

Видим, что элементами матрицы e^{Ax} являются степенные ряды $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{de^{Ax}}{dx} = \left\{ \left(\sum_{k=0}^{\infty} (B_k)_{ij} x^k \right)' \right\} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k (B_k)_{ij} x^{k-1} \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{A^k}{k!} x^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{(k-1)!} x^{k-1} = A \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} x^{k-1}}_{= e^{Ax}} = A \cdot e^{Ax}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

§12. Умножение матричных рядов

Пусть имеется матричный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k. \quad (1)$$

Пусть имеется числовой положительный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k. \quad (2)$$

Если $\|A_k\| \leq a_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), то говорят, что ряд (1) *мажорируется* рядом (2).

Справедливо утверждение: если матричный ряд (1) мажорируется сходящимся числовым рядом (2), то матричный ряд (1) сходится.

► Рассмотрим l -ю частичную сумму матричного ряда (1):

$$S_l = \sum_{k=0}^l A_k = \left\{ \sum_{k=0}^l a_{ij}^{(k)} \right\}.$$

$\sum_{k=0}^l a_{ij}^{(k)}$ представляет собой произвольный элемент матрицы S_l

($i, j = \overline{1, n}$). $\sum_{k=0}^l a_{ij}^{(k)}$ является l -й частичной суммой числового ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)} \quad (i, j = \overline{1, n}). \quad (3)$$

По условию имеем

$$|a_{ij}^{(k)}| \leq \|A_k\| \leq a_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots; \quad i, j = \overline{1, n}).$$

Видим, что каждый из n^2 рядов (3) мажорируется сходящимся положительным числовым рядом (2) $\Rightarrow$ каждый из n^2 рядов (3) сходится.

ся, т.е. $\sum_{k=0}^l a_{ij}^{(k)} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} a_{ij}$ (a_{ij} — определенное число, $i, j = \overline{1, n}$) $\Rightarrow$
 $S_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \{a_{ij}\} = A$ ($i, j = \overline{1, n}$) $\Rightarrow$ матричный ряд (1) сходится. ◀

Определение. Пусть имеются матричные ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \quad (4)$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k \quad (5)$$

(A_k, B_k — квадратные матрицы порядка n). Матричный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k, \quad (6)$$

где

$$C_k = A_0 B_k + A_1 B_{k-1} + \dots + A_k B_0,$$

называется произведением рядов (4) и (5).

Теорема. Если матричные ряды (4) и (5) мажорируются сходящимися положительными числовыми рядами, то их можно перемножать, т.е. ряд (6) в этом случае сходится, причем если A, B, C — суммы рядов (4), (5) и (6) соответственно, то

$$C = A \cdot B.$$

► Пусть матричные ряды (4) и (5) мажорируются соответственно положительными числовыми рядами

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad (\tilde{4})$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k. \quad (\tilde{5})$$

Пусть a — сумма ряда $(\tilde{4})$, b — сумма ряда $(\tilde{5})$. Так как $(\tilde{4})$ и $(\tilde{5})$ — положительные сходящиеся ряды, то их можно почленно перемножать, т.е. ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k, \quad (\tilde{6})$$

где $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0$, сходится, а его сумма c выражается через суммы рядов $(\tilde{4})$ и $(\tilde{5})$ по формуле

$$c = a \cdot b.$$

1) Покажем сначала, что матричный ряд (6) сходится. Имеем для любого $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}\|C_k\| &= \|A_0 B_k + A_1 B_{k-1} + \dots + A_k B_0\| \leq \\ &\leq \|A_0 B_k\| + \|A_1 B_{k-1}\| + \dots + \|A_k B_0\| \leq \\ &\leq n(a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0) = n \cdot c_k\end{aligned}$$

(здесь n — определенное число). У нас ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ сходится $\Rightarrow$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} n c_k$ — сходится. Видим, что матричный ряд (6) мажорируется числовым положительным сходящимся рядом $\sum_{k=0}^{\infty} n c_k \Rightarrow$ матричный ряд (6) сходится.

2) Покажем теперь, что $C = A \cdot B$. Обозначим через $S_l^{(4)}$, $S_l^{(5)}$ и $S_l^{(6)}$ — l -е частичные суммы матричных рядов (4), (5) и (6) соответственно. Имеем

$$\begin{array}{l} S_l^{(4)} \cdot S_l^{(5)} = \begin{array}{c} \textcircled{A_0 B_0} + \textcircled{A_0 B_1} + \textcircled{A_0 B_2} + \dots + \textcircled{A_0 B_l} + \\ C_0 + \textcircled{A_1 B_0} + \textcircled{A_1 B_1} + \textcircled{A_1 B_2} + \dots + \textcircled{A_1 B_l} + \\ C_1 + \textcircled{A_2 B_0} + \textcircled{A_2 B_1} + \textcircled{A_2 B_2} + \dots + \textcircled{A_2 B_l} + \\ C_2 + \dots + \dots + \dots + \\ \dots + \textcircled{A_l B_0} + \textcircled{A_l B_1} + \textcircled{A_l B_2} + \dots + \textcircled{A_l B_l} \end{array} \\ C_l \end{array}$$

Видим, что

$$S_l^{(6)} = \sum_{k=0}^l C_k = S_l^{(4)} \cdot S_l^{(5)} - \Delta_l. \quad (7)$$

Здесь Δ_l — матрица порядка n ;

$$\Delta_l = A_1 B_l + A_2 B_{l-1} + \dots + A_l B_1 + A_2 B_l + \dots + A_l B_2 + \dots + A_l B_l$$

(Δ_l — сумма всех матриц, стоящих под диагональю в выражении для $S_l^{(4)} \cdot S_l^{(5)}$).

Обозначим через $S_l^{(4)}$, $S_l^{(5)}$, $S_l^{(6)}$ l -е частичные суммы числовых рядов (4), (5), (6) соответственно. Эти частичные суммы связаны соотношением

$$S_l^{(6)} = S_l^{(4)} \cdot S_l^{(5)} - \tilde{\Delta}_l, \quad (8)$$

где

$$\tilde{\Delta}_l = a_1 b_l + a_2 b_{l-1} + \dots + a_l b_1 + a_2 b_l + \dots + a_l b_2 + \dots + a_l b_l.$$

Перейдем в (8) к пределу при $l \rightarrow \infty$. Получим $c = a \cdot b - \lim_{l \rightarrow \infty} \tilde{\Delta}_l$.

Так как $c = ab$, то $\lim_{l \rightarrow \infty} \tilde{\Delta}_l = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\Delta_l\| &\leq \|A_1 B_l\| + \|A_2 B_{l-1}\| + \dots + \|A_l B_1\| + \|A_2 B_l\| + \dots + \\ &\quad + \|A_l B_2\| + \dots + \|A_l B_l\| \leq \end{aligned}$$

$$\leq n(a_1 b_l + a_2 b_{l-1} + \dots + a_l b_1 + a_2 b_l + \dots + a_l b_2 + \dots + a_l b_l) = n \cdot \tilde{\Delta}_l$$

(n — определенное число)

$$\Rightarrow \|\Delta_l\| \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \Delta_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0.$$

Перейдем теперь к пределу при $l \rightarrow \infty$ в соотношении (7). Получим $\lim_{l \rightarrow \infty} S_l^{(6)} = A \cdot B - 0 \Rightarrow C = A \cdot B$. ◀

Следствие. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка n . Если матрицы A и B коммутируют, то $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$.

► По определению имеем

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \quad (9)$$

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}, \quad (10)$$

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!}. \quad (11)$$

1) Покажем, что ряды (9) и (10) можно перемножать. Для этого достаточно убедиться, что каждый из них мажорируется сходящимся положительным числовым рядом. Имеем при любом $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| &= \frac{1}{k!} \|A \cdot A^{k-1}\| \leq \frac{n}{k!} \|A\| \cdot \|A^{k-1}\| = \frac{n}{k!} \|A\| \cdot \|A \cdot A^{k-2}\| \leq \\ &\leq \frac{n^2}{k!} \|A\|^2 \cdot \|A^{k-2}\| \leq \dots \leq \frac{n^{k-1}}{k!} \|A\|^k \leq \frac{(n\|A\|)^k}{k!}.\end{aligned}$$

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\|A\|)^k}{k!}$ — числовой, положительный, сходящийся; его

сумма равна $e^{n\|A\|}$. Он — мажорантный по отношению к матричному ряду (9).

Совершенно аналогично убеждаемся, что матричный ряд (10) мажорируется числовым положительным сходящимся рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\|B\|)^k}{k!} \quad (= e^{n\|B\|}).$$

Значит, ряды (9) и (10) можно перемножать. Перемножив матричные ряды (9) и (10), получим

$$e^A \cdot e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{A^0 B^k}{k!} + \frac{A^1}{1!} \cdot \frac{B^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \frac{B^1}{1!} + \frac{A^k}{k!} \cdot B^0 \right)}_{= C_k}.$$

(12)

Рассмотрим теперь общий член ряда (11). Так как матрицы A и B коммутируют, то

$$\begin{aligned}\frac{(A+B)^k}{k!} &= \frac{1}{k!} \left(A^k + kA^{k-1} \cdot B^1 + \frac{k(k-1)}{2!} A^{k-2} \cdot B^2 + \dots + B^k \right) = \\ &= \frac{A^k}{k!} \cdot B^0 + \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \frac{B^1}{1!} + \dots + A^0 \cdot \frac{B^k}{k!} = C_k.\end{aligned}$$

Видим, что когда матрицы A и B коммутируют, то ряды (11) и (12) совпадают. Следовательно, $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$. ◀

Частный случай. Пусть $B = -A$. Так как матрицы A и $-A$ коммутируют, то $e^A \cdot e^{-A} = e^{A+(-A)} = e^0 = E \Rightarrow (e^A)^{-1} = e^{-A}$.

§13. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

Пусть имеется система

$$\frac{dY}{dx} = A \cdot Y, \quad (1)$$

где $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$, $A = \{a_{ij}\} \ (i, j = \overline{1, n})$, a_{ij} — постоянные веще-

ственные числа; $x \in (-\infty, +\infty)$.

Теорема. Матрица-функция

$$\Phi(x) \equiv e^{Ax}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (2)$$

является фундаментальной матрицей решений системы (1).

► 1) Покажем сначала, что $\Phi(x) \equiv e^{Ax} = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ является матрицей решений системы (1). В самом деле, имеем

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} \equiv \frac{d}{dx} e^{Ax} \equiv A \cdot e^{Ax} \equiv A \cdot \Phi(x). \quad (3)$$

Из (3) следует, что тождественно равны соответствующие элементы матриц $\frac{d\Phi(x)}{dx}$ и $A \cdot \Phi(x)$, а следовательно, тождественно равны соответствующие столбцы этих матриц, т.е.

$$\frac{d\varphi_j(x)}{dx} \equiv A \cdot \varphi_j(x), \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad (j = \overline{1, n}).$$

Это означает, что $Y = \varphi_j(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ ($j = \overline{1, n}$), — решение системы (1), а матрица-функция $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ — матрица решений системы (1).

2) Покажем теперь, что $\Phi(x) \equiv e^{Ax} = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ — фундаментальная матрица решений системы (1). Для этого вычислим $\det \Phi(x)$ в точке $x = 0$. Имеем

$$\det \Phi(0) = \det e^0 = \det E = 1 \quad (\neq 0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ линейно независимы в $(-\infty; +\infty)$. Значит, $\Phi(x) = e^{Ax}$ — ф. м. р. с. (1). $\blacktriangleleft$

Следствие 1. Пусть точка x_0 — любая из $(-\infty; +\infty)$. Матрица-функция $\tilde{\Phi}(x) = e^{A(x-x_0)}$ есть ф. м. р. с. (1), нормированная в точке $x = x_0$.

► Действительно, имеем: матрица-функция $\Phi(x) = e^{Ax}$ — ф. м. р. с. (1). Матрица $C = e^{-Ax_0}$ — постоянная, неособая. Следовательно, $\tilde{\Phi}(x) = \Phi(x) \cdot C = e^{Ax} \cdot e^{-Ax_0}$ — ф. м. р. с. (1). Матрицы Ax и $-Ax_0$ коммутируют. Поэтому $e^{Ax} \cdot e^{-Ax_0} = e^{Ax-Ax_0} = e^{A(x-x_0)} \Rightarrow \tilde{\Phi}(x) = e^{A(x-x_0)}$ — ф. м. р. с. (1).

Имеем, далее, $\tilde{\Phi}(x_0) = e^0 = E$, т.е. $\tilde{\Phi}(x)$ — нормированная в точке $x = x_0$. $\blacktriangleleft$

Следствие 2. Пусть дана система $\frac{dY}{dx} = A \cdot Y$ и дано начальное условие

$$Y|_{x=x_0} = Y_0, \quad (4)$$

где x_0 — любое из $\mathbb{R}$, Y_0 — любой из $\mathbb{R}^n$. Решение задачи Коши (1) — (4) дается формулой

$$Y = e^{A(x-x_0)} \cdot Y_0. \quad (5)$$

► Матрица-функция $e^{A(x-x_0)}$ — ф. м. р. с. (1), Y_0 — постоянный вектор. Следовательно, $Y = e^{A(x-x_0)} \cdot Y_0$ — решение системы (1). Имеем: $Y(x_0) = e^0 \cdot Y_0 = E \cdot Y_0 = Y_0$. Видим, что (5) — решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию (4). $\blacktriangleleft$

Замечание 1. Формула (5) называется общим решением системы (1) в форме Коши.

Замечание 2 (о группах решений системы (1), соответствующих клеткам Жордана нормальной формы матрицы A). Пусть J — жорданова форма матрицы A :

$$J = \text{diag}[J_1, J_2, \dots, J_m], \text{ где } J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_j & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_j \end{pmatrix} \quad (j = \overline{1, m}).$$

Пусть S — неособенная матрица, такая, что

$$A = SJS^{-1}.$$

Было доказано, что

$$\Phi(x) = e^{Ax} = e^{SJS^{-1}x} = S \cdot e^{Jx} \cdot S^{-1}$$

— ф. м. р. с. (1). Но тогда

$$\Psi(x) = \Phi(x) \cdot S = S \cdot e^{Jx}$$

— тоже ф. м. р. с. (1). Имеем

$$\Psi(x) = S \cdot e^{Jx} = S \cdot \begin{pmatrix} e^{J_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_2 x} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underbrace{0}_{n_1} & \underbrace{0}_{n_2} & \dots & \underbrace{e^{J_m x}}_{n_g} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(S \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e^{J_1 x} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}}_{n_1 \text{ столбцов}}; S \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ e^{J_2 x} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}}_{n_2 \text{ столбцов}}; \dots; S \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ e^{J_m x} \end{pmatrix}}_{n_m \text{ столбцов}} \right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ из всех решений системы (1), входящих в матрицу $\Psi(x)$, группа решений, соответствующая клетке Жордана J_j , имеет вид

$$S \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ e^{J_j x} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (j = \overline{1, m}).$$

Выпишем эти группы решений в явном виде.

Для $j = 1$

$$S \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e^{J_1 x} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{(Здесь } n_1 \text{ решений)}} = (S_1; S_2; \dots; S_n) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x^{n_1-1}}{(n_1-1)!} & \dots & \dots & \dots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_1 x}$$

($S_1, S_2, \dots, S_n$ — постоянные векторы). Тогда

$$\psi_1(x) = \left(S_1 + S_2 \cdot x + S_3 \cdot \frac{x^2}{2!} + \dots + S_{n_1} \cdot \frac{x^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \right) \cdot e^{\lambda_1 x} = \gamma_1(x) \cdot e^{\lambda_1 x},$$

$$\psi_2(x) = \left(S_2 + S_3 \cdot x + \dots + S_{n_1} \cdot \frac{x^{n_1-2}}{(n_1-2)!} \right) \cdot e^{\lambda_1 x} = \gamma'_1(x) \cdot e^{\lambda_1 x},$$

.....

$$\psi_{n_1}(x) = S_{n_1} \cdot e^{\lambda_1 x} = \gamma_1^{(n_1-1)}(x) \cdot e^{\lambda_1 x}$$

(6₁)

((6₁) — первая группа решений).

Для $j = 2$

$$S \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ e^{J_2 x} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{(Здесь } n_2 \text{ решений)}} = (S_1; S_2; \dots; S_n) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x^{n_2-1}}{(n_2-1)!} & \dots & \dots & \dots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_2 x}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Psi_{n_1+1}(x) &= \left(S_{n_1+1} + S_{n_1+2} \cdot x + S_{n_1+3} \cdot \frac{x^2}{2!} + \dots + S_{n_1+n_2} \cdot \frac{x^{n_2-1}}{(n_2-1)!} \right) \cdot e^{\lambda_2 x} = \gamma_2(x) \cdot e^{\lambda_2 x}, \\ \Psi_{n_1+2}(x) &= \left(S_{n_1+2} + S_{n_1+3} \cdot x + \dots + S_{n_1+n_2} \cdot \frac{x^{n_2-2}}{(n_2-2)!} \right) \cdot e^{\lambda_2 x} = \gamma_2'(x) \cdot e^{\lambda_2 x}, \\ &\dots \dots \dots \\ \Psi_{n_1+n_2}(x) &= S_{n_1+n_2} \cdot e^{\lambda_2 x} = \gamma_2^{(n_2-1)}(x) \cdot e^{\lambda_2 x}\end{aligned}\quad (6_2)$$

((6₂) — вторая группа решений), и так далее.

Для $j = m$

$$\underbrace{S \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ e^{\lambda_m x} \end{pmatrix}}_{\text{(Здесь } n_m \text{ решений)}} = (S_1; S_2; \dots; S_n) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x^{n_m-1}}{(n_m-1)!} & \dots & \dots & \dots & x & 1 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_m x},$$

откуда

$$\begin{aligned}\Psi_{n_1+\dots+n_{m-1}+1}(x) &= \gamma_m(x) \cdot e^{\lambda_m x}, \\ \Psi_{n_1+\dots+n_{m-1}+2}(x) &= \gamma_m'(x) \cdot e^{\lambda_m x}, \\ &\dots \dots \dots \\ \Psi_n(x) &= \gamma_m^{(n_m-1)}(x) \cdot e^{\lambda_m x}.\end{aligned}\quad (6_m)$$

$$\text{Здесь } \gamma_m(x) = \left(S_{n_1+\dots+n_{m-1}+1} + S_{n_1+\dots+n_{m-1}+2} \cdot x + \dots + S_n \cdot \frac{x^{n_m-1}}{(n_m-1)!} \right); (6_m) —$$

m -я группа решений.

§14. Лине́йные неоднородные системы с постоянными коэффициентами

Пусть имеется система

$$\frac{dY}{dx} = A \cdot Y + F(x), \quad (1)$$

где $A = \{a_{ij}\}$ ($i, j = \overline{1, n}$; a_{ij} — постоянные вещественные числа);

$Y(x)$, $F(x)$ — вектор-функции. Считаем, что $F(x) \in C((a, b))$.

В качестве фундаментальной матрицы решений линейной однородной системы, соответствующей нашей неоднородной системе, берем матрицу-функцию

$$\Phi(x) = e^{Ax}. \quad (2)$$

Общее решение линейной неоднородной системы записывается, как мы знаем, в виде

$$Y = \Phi(x) \cdot C + \Phi(x) \cdot \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t) F(t) dt. \quad (3)$$

Поэтому будем иметь

$$\begin{aligned} Y &= e^{Ax} \cdot C + e^{Ax} \cdot \int_{x_0}^x (e^{At})^{-1} \cdot F(t) dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow Y = e^{Ax} \cdot C + e^{Ax} \cdot \int_{x_0}^x e^{-At} \cdot F(t) dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow Y = e^{Ax} \cdot C + \int_{x_0}^x e^{Ax} \cdot e^{-At} \cdot F(t) dt = e^{Ax} \cdot C + \int_{x_0}^x e^{A(x-t)} \cdot F(t) dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Замечание. Если дано начальное условие

$$Y|_{x=x_0} = Y_0, \quad (5)$$

где x_0 — любое из (a, b) , Y_0 — любой из R^n , то решение задачи Коши (1) — (5) дается формулой

$$Y = e^{A(x-x_0)} \cdot Y_0 + \int_{x_0}^x e^{A(x-t)} \cdot F(t) dt. \quad (6)$$

В самом деле, подставив начальные данные (5) в (4), получим $Y_0 = e^{Ax_0} \cdot C \Rightarrow C = e^{-Ax_0} \cdot Y_0$. Подставив это выражение для вектора C в (4), получим (6).

Формула (6) называется общим решением линейной неоднородной системы (1) в форме Коши.

§15. Примеры и задачи к главе 6

Задача 1. Решить систему уравнений: $\frac{dY}{dx} = A \cdot Y$,

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Из уравнения

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -4 & 0 \\ 1 & -2 - \lambda & 2 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 2)(\lambda - 2)^2 = 0$$

находим собственные числа матрицы A : $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Жорданова форма матрицы A имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ищем неособенную матрицу S , такую, что $A = S \cdot J \cdot S^{-1}$. Матрица S получается такой:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка: должно быть $A \cdot S = S \cdot J$;

$$A \cdot S = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$S \cdot J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу S^{-1} . Она получается такой:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Проверка: должно быть $S \cdot S^{-1} = E$.

$$S \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$e^{Jx} = \begin{pmatrix} e^{-2x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x} & 0 \\ 0 & xe^{2x} & e^{2x} \end{pmatrix} = e^{2x} \cdot \begin{pmatrix} e^{-4x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= e^{Ax} = S \cdot e^{Jx} \cdot S^{-1} = e^{2x} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-4x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} \cdot S^{-1} = \\ &= e^{2x} \begin{pmatrix} 2e^{-4x} & 1+2x & 2 \\ 3e^{-4x} & x & 1 \\ -e^{-4x} & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \\ &= e^{2x} \begin{pmatrix} 1+2x & \frac{1}{2}e^{-4x} - 2x - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}e^{-4x} - 2x + \frac{1}{2} \\ x & \frac{3}{4}e^{-4x} - x + \frac{1}{4} & -\frac{3}{4}e^{-4x} - x + \frac{3}{4} \\ x & -\frac{1}{4}e^{-4x} - x + \frac{1}{4} & \frac{1}{4}e^{-4x} - x + \frac{3}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\Phi(x)$ — фундаментальная матрица решений заданной системы. $Y = \Phi(x) \cdot C$, где C — произвольный постоянный вектор, есть общее решение заданной системы (в матричной форме). Было доказано, что $\Psi(x) = \Phi(x) \cdot S$ — тоже ф. м. р. с. Имеем

$$\Psi(x) = S e^{Jx} = (\vec{s}_1 \ \vec{s}_2 \ \vec{s}_3) \begin{pmatrix} e^{J_1 x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{J_2 x} \end{pmatrix}.$$

1 столбец 2 столбец

Здесь $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{s}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} e^{J_1 x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2x}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ e^{J_2 x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} e^{2x}.$$

Имеем, следовательно,

$$\psi_1(x) = \vec{s}_1 e^{-2x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2x};$$

$$\psi_2(x) = (\vec{s}_2 + \vec{s}_3 x) e^{2x} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x \right] e^{2x} = \begin{pmatrix} 1+2x \\ x \\ x \end{pmatrix} e^{2x};$$

$$\psi_3(x) = \vec{s}_3 e^{2x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}.$$

А тогда

$$Y = C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2 + C_3 \psi_3 = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2x} + C_2 \begin{pmatrix} 1+2x \\ x \\ x \end{pmatrix} e^{2x} + C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}$$

— общее решение заданной системы (в векторной форме). В скалярной форме общее решение заданной системы запишется так:

$$\begin{aligned}y_1(x) &= 2C_1 e^{-2x} + C_2(1+2x)e^{2x} + 2C_3 e^{2x}, \\y_2(x) &= 3C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 e^{2x}, \\y_3(x) &= -C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 e^{2x}.\end{aligned}$$

Задача 2. Найти решение системы $\frac{dY}{dx} = A \cdot Y + F(x)$,

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin x.$$

Решение. Так как в заданной системе уравнений матрица A та же, что и в задаче 1, то используем результаты решения задачи 1. В качестве фундаментальной матрицы решений линейной однородной системы, соответствующей заданной неоднородной системе, берем матрицу-функцию $\Phi(x) = e^{Ax}$. Общее решение линейной неоднородной системы записывается в виде

$$Y = \Phi(x) \cdot C + \Phi(x) \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t) \cdot F(t) dt = e^{Ax} \cdot C + \int_{x_0}^x e^{A(x-t)} \cdot F(t) dt.$$

У нас

$$e^{A(x-t)} F(t) = \begin{pmatrix} 1+2(x-t) \\ x-t \\ x-t \end{pmatrix} e^{2(x-t)} \sin t.$$

Возьмем $x_0 = 0$ (здесь в качестве x_0 можно брать любое число).

Будем иметь

$$\begin{aligned}Y_*(x) &= \int_0^x \begin{pmatrix} 1+2(x-t) \\ x-t \\ x-t \end{pmatrix} e^{2(x-t)} \sin t dt = \\&= \frac{1}{25} \left[\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} x e^{2x} + \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \sin x + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cos x \right].\end{aligned}$$

Следовательно, общее решение заданной линейной неоднородной системы будет таким: $Y = \bar{Y}(x) + Y_*(x)$, где $\bar{Y}$ — общее решение соответствующей однородной системы.

Задача 3. Решить систему уравнений: $\frac{dY}{dx} = A \cdot Y$, где

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -15 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Находим собственные числа матрицы A из уравнения:

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 & 1 \\ -5 & 3-\lambda & 1 \\ -15 & 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Жорданова форма матрицы A имеет вид

$$J = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Ищем неособенную матрицу S , такую, что $A = SJS^{-1}$. Она получается такой:

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверка: должно быть $A \cdot S = S \cdot J$.

$$A \cdot S = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -15 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \\ 15 & 15 & 0 \end{pmatrix};$$

$$S \cdot J = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \\ 15 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу S^{-1} . Она получается такой:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2/5 & 3/15 \\ 0 & 0 & 1/15 \\ 0 & 1/5 & -1/15 \end{pmatrix}.$$

Проверка: должно быть $S \cdot S^{-1} = E$;

$$S \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2/5 & 3/15 \\ 0 & 0 & 1/15 \\ 0 & 1/5 & -1/15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$e^{Jx} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^x.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi(x) = e^{Ax} &= S e^{Jx} S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2/5 & 3/15 \\ 0 & 0 & 1/15 \\ 0 & 1/5 & -1/15 \end{pmatrix} e^x = \\ &= \begin{pmatrix} -1+5x & 5 & 2 \\ 5x & 5 & 5 \\ 15x & 15 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2/5 & 3/15 \\ 0 & 0 & 1/15 \\ 0 & 1/5 & -1/15 \end{pmatrix} e^x = \begin{pmatrix} 1-5x & 2x & x \\ -5x & 2x+1 & x \\ -15x & 6x & 3x+1 \end{pmatrix} e^x. \end{aligned}$$

$\Phi(x)$ — фундаментальная матрица решений заданной системы.

$Y = \Phi(x) \cdot C$, где C — произвольный постоянный вектор, есть общее решение заданной системы (в матричной форме). Заметим, что

$\Psi(x) = \Phi(x) \cdot S$ — тоже ф. м. р. с. Имеем

$$\Psi(x) = S \cdot e^{Jx} \Rightarrow \Psi(x) = (\vec{s}_1 \quad \vec{s}_2 \quad \vec{s}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^x,$$

$$\text{где } \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}, \vec{s}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Psi_1(x) = (\vec{s}_1 + \vec{s}_2 x) e^x = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} x \right] e^x = \begin{pmatrix} 5x-1 \\ 5x \\ 15x \end{pmatrix} e^x,$$

$$\psi_2(x) = \vec{s}_2 e^x = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} e^x, \quad \psi_3(x) = \vec{s}_3 e^x = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} e^x;$$

$$Y = C_1 \psi_1(x) + C_2 \psi_2(x) + C_3 \psi_3(x) = C_1 \begin{pmatrix} 5x-1 \\ 5x \\ 15x \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} e^x + C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} e^x.$$

Это — общее решение заданной системы (в векторной форме). В скалярной форме общее решение заданной системы запишется так:

$$y_1(x) = C_1(5x-1)e^x + 5C_2e^x + 2C_3e^x,$$

$$y_2(x) = 5C_1xe^x + 5C_2e^x + 5C_3e^x,$$

$$y_3(x) = 15C_1xe^x + 15C_2e^x.$$

Задача 4. Решить систему уравнений $\frac{dY}{dx} = A \cdot Y$, где

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Находим собственные числа матрицы A из уравнения

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 & 3 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Находим жорданову форму матрицы A . Она будет такой:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ищем неособенную матрицу S такую, что $A = S \cdot J \cdot S^{-1}$. Она получается такой:

$$S = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка: должно быть $AS = SJ$;

$$A \cdot S = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S \cdot J = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(убеждаемся, что S и J найдены правильно). Находим матрицу S^{-1} . Она получается такой:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка: должно быть $S \cdot S^{-1} = E$;

$$S \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(убеждаемся, что матрица S^{-1} найдена правильно). Имеем

$$e^{Jx} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ \frac{x^2}{2} & x & 1 \end{pmatrix} e^x.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi(x) = e^{Ax} &= S \cdot e^{Jx} \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ \frac{x^2}{2} & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^x = \\ &= e^x \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} + x - 3 & x + 1 & 1 \\ x - 2 & 1 & 0 \\ \frac{x^2}{2} & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= e^x \begin{pmatrix} -\frac{x^2}{2} - 3x + 1 & \frac{x^2}{2} + 4x & \frac{x^2}{2} + 3x \\ -x & x + 1 & x \\ -\frac{x^2}{2} - 2x & \frac{x^2}{2} + 3x & \frac{x^2}{2} + 2x + 1 \end{pmatrix}.$$

$\Phi(x)$ — фундаментальная матрица решений заданной системы.
 $Y = \Phi(x) \cdot C$, где C — произвольный постоянный вектор, есть общее решение заданной системы (в матричной форме). Заметим, что $\Psi(x) = \Phi(x) \cdot S = S \cdot e^{Jx}$ — тоже ф. м. р. е.:

$$\Psi(x) = (\vec{s}_1 \quad \vec{s}_2 \quad \vec{s}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ \frac{x^2}{2} & x & 1 \end{pmatrix} e^x, \text{ где } \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \left(\vec{s}_1 + \vec{s}_2 x + \vec{s}_3 \frac{x^2}{2} \right) e^x = \\ &= \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{x^2}{2} \right] e^x = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} + x - 3 \\ x - 2 \\ \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} e^x, \\ \psi_2(x) &= (\vec{s}_2 + \vec{s}_3 x) e^x = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x \right] e^x = \begin{pmatrix} x + 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} e^x, \\ \psi_3(x) &= \vec{s}_3 e^x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= C_1 \psi_1(x) + C_2 \psi_2(x) + C_3 \psi_3(x) = \\ &= C_1 \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} + x - 3 \\ x - 2 \\ \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} x + 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} e^x + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x. \end{aligned}$$

Это — общее решение заданной системы (в векторной форме). В скалярной форме общее решение заданной системы имеет вид:

$$\begin{aligned}y_1(x) &= C_1 \left(\frac{x^2}{2} + x - 3 \right) e^x + C_2(x+1)e^x + C_3 e^x, \\y_2(x) &= C_1(x-2)e^x + C_2 e^x, \\y_3(x) &= C_1 \frac{x^2}{2} e^x + C_2 x e^x + C_3 e^x.\end{aligned}$$

Задача 5. Решить систему уравнений $\frac{dY}{dx} = A \cdot Y$, где

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 8 \\ 2 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Находим собственные числа матрицы A из уравнения:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & 8 \\ 2 & -3-\lambda & 6 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+5) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= 1, \\ \lambda_2 &= 2+i, \\ \lambda_3 &= 2-i. \end{aligned}$$

Находим жорданову форму матрицы A . Она будет такой:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(см.: Д.К. Фаддеев. Лекции по алгебре. 1984, с. 343). Ищем неособенную матрицу S , такую, что $A = S \cdot J \cdot S^{-1}$. Она получается такой:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Проверка: должно быть $AS = SJ$;

$$A \cdot S = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 8 \\ 2 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$S \cdot J = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(убеждаемся, что матрицы S и J найдены правильно). Находим матрицу S^{-1} . Она получается такой:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка: должно быть $S \cdot S^{-1} = E$;

$$S \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу e^{Jx} . Для этого вычислим сначала матрицу e^{Bx} , где

$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Представим матрицу B в виде $B = \alpha E + \beta \tilde{J}$, где

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Так как матрица αE коммутирует с матрицей $\beta \tilde{J}$, то

$$e^{Bx} = e^{\alpha E x} e^{\beta \tilde{J} x}.$$

Но $e^{\alpha E x} = e^{\alpha x E}$. Поэтому $e^{Bx} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta \tilde{J} x}$. Найдем матрицу $e^{\tilde{J} x}$.

По определению матричной экспоненты имеем

$$e^{\tilde{J} x} = E + \tilde{J} x + \frac{\tilde{J}^2 x^2}{2!} + \frac{\tilde{J}^3 x^3}{3!} + \frac{\tilde{J}^4 x^4}{4!} + \dots;$$

$$\tilde{J}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{J}^3 = \tilde{J}^2 \tilde{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\tilde{J};$$

$$\tilde{J}^4 = \tilde{J}^3 \tilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Таким образом, получаем

$$\tilde{J}^{2k} = (-1)^k E, \quad \tilde{J}^{2k+1} = (-1)^k \tilde{J}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Поэтому

$$\begin{aligned} e^{\tilde{J}x} &= E + \tilde{J}x - E \frac{x^2}{2!} - \tilde{J} \frac{x^3}{3!} + E \frac{x^4}{4!} + \dots = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{x^2}{2!} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{x^3}{3!} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{x^4}{4!} + \dots = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\ -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Но тогда $e^{\beta \tilde{J}x} = \begin{pmatrix} \cos \beta x & \sin \beta x \\ -\sin \beta x & \cos \beta x \end{pmatrix}$ и, следовательно,

$$e^{Bx} = e^{\alpha x} e^{\beta \tilde{J}x} = \begin{pmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ -e^{\alpha x} \sin \beta x & e^{\alpha x} \cos \beta x \end{pmatrix}.$$

В нашей задаче $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $B = 2E + \tilde{J}$. Поэтому $e^{Bx} =$

$= \begin{pmatrix} e^{2x} \cos x & e^{2x} \sin x \\ -e^{2x} \sin x & e^{2x} \cos x \end{pmatrix}$. Таким образом, получаем

$$e^{Jx} = \begin{pmatrix} e^x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{Bx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x} \cos x & e^{2x} \sin x \\ 0 & -e^{2x} \sin x & e^{2x} \cos x \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Phi(x) = e^{Ax} = Se^{Jx}S^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x} \cos x & e^{2x} \sin x \\ 0 & -e^{2x} \sin x & e^{2x} \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^x & 4e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x & 4e^{2x} \sin x - 2e^{2x} \cos x \\ 2e^x & 3e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x & 3e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x \\ e^x & e^{2x} \cos x - 2e^{2x} \sin x & e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -e^x + e^{2x} \cdot 2(\cos x + \sin x) & 2e^x - e^{2x}(2\cos x + 4\sin x) & -2e^x + e^{2x}(2\cos x + 6\sin x) \\ -2e^x + e^{2x} \cdot 2\cos x & 4e^x - e^{2x}(3\cos x + \sin x) & -4e^x + e^{2x}(4\cos x + 2\sin x) \\ -e^x + e^{2x}(\cos x - \sin x) & 2e^x + e^{2x}(\sin x - 2\cos x) & -2e^x + e^{2x}(3\cos x - \sin x) \end{pmatrix}$$

$\Phi(x) = e^{Ax}$ — фундаментальная матрица решений заданной системы. $Y = \Phi(x) \cdot C$, где C — произвольный постоянный вектор, есть общее решение заданной системы (в матричной форме). Имеем

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} -e^x + 2e^{2x}(\cos x + \sin x) \\ -2e^x + 2e^{2x} \cos x \\ -e^x + e^{2x}(\cos x - \sin x) \end{pmatrix}, \quad Y_2(x) = \begin{pmatrix} 2e^x - e^{2x}(2\cos x + 4\sin x) \\ 4e^x - e^{2x}(3\cos x + \sin x) \\ 2e^x + e^{2x}(\sin x - 2\cos x) \end{pmatrix},$$

$$Y_3(x) = \begin{pmatrix} -2e^x + e^{2x}(2\cos x + 6\sin x) \\ -4e^x + e^{2x}(4\cos x + 2\sin x) \\ -2e^x + e^{2x}(3\cos x - \sin x) \end{pmatrix}$$

— линейно независимые решения системы. Следовательно, $Y(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + C_3 Y_3(x)$ — общее решение заданной системы (в векторной форме). В скалярной форме общее решение заданной системы имеет вид:

$$\begin{aligned}
y_1(x) = & C_1[-e^x + 2e^{2x}(\cos x + \sin x)] + \\
& + C_2[2e^x - e^{2x}(2\cos x + 4\sin x)] + \\
& + C_3[-2e^x + e^{2x}(2\cos x + 6\sin x)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2(x) = & C_1[-2e^x + 2e^{2x}\cos x] + \\
& + C_2[4e^x - e^{2x}(3\cos x + \sin x)] + \\
& + C_3[-4e^x + e^{2x}(4\cos x + 2\sin x)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_3(x) = & C_1[-e^x + e^{2x}(\cos x - \sin x)] + \\
& + C_2[2e^x + e^{2x}(\sin x - 2\cos x)] + \\
& + C_3[-2e^x + e^{2x}(3\cos x - \sin x)].
\end{aligned}$$

ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§1. Логарифмы матриц

Определение. Пусть A — квадратная матрица порядка n . Матрицу B называют логарифмом матрицы A и пишут $B = \ln A$, если $A = e^B$.

Справедливы следующие утверждения:

1) если $A = \text{diag}[A_1, A_2, \dots, A_m]$ и если существуют $B_j = \ln A_j$, $j = \overline{1, m}$, то существует $B = \ln A$, причем $B = \ln A = \text{diag}[\ln A_1, \ln A_2, \dots, \ln A_m]$;

2) если $A = SJS^{-1}$ ($\det S \neq 0$) и если существует $\ln J$, то существует $\ln A$, причем $\ln A = S \cdot \ln J \cdot S^{-1}$;

3) если матрицы A и B коммутируют, т.е. $A \cdot B = B \cdot A$, и если существуют $\ln A$ и $\ln B$, то существует $\ln(A \cdot B)$, причем $\ln(A \cdot B) = \ln A + \ln B$.

Теорема. Пусть A — неособенная квадратная матрица порядка n . Тогда $B = \ln A$ существует.

► Пусть J — жорданова форма матрицы A . Тогда $A = S \cdot J \cdot S^{-1}$ ($\det S \neq 0$). Мы докажем, что $\ln A$ существует, если покажем, что существует $\ln J$ (см. утверждение 2).

I. Рассмотрим сначала случай, когда $J = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$. Отметим, что $\lambda_j \neq 0$ ($j = \overline{1, n}$), ибо собственные числа матриц A и J совпадают, а матрица A — неособенная. Следовательно, $\ln \lambda_j$ ($j = \overline{1, n}$) существуют, а значит, существует $\ln J$ (см. утверждение 1), причем

$$\ln J = \text{diag}[\ln \lambda_1, \ln \lambda_2, \dots, \ln \lambda_n].$$

II. Рассмотрим теперь более общий случай, а именно случай, когда $J = \text{diag}[J_1, J_2, \dots, J_m]$, где J_j ($j = \overline{1, m}$) — клетки Жордана. Мы докажем, что $\ln J$ существует и что

$$\ln J = \text{diag}[\ln J_1, \ln J_2, \dots, \ln J_m],$$

если докажем существование $\ln J_j$ для любого $j = \overline{1, m}$. Имеем

$$\begin{aligned} J_j &= \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_j & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_j \end{pmatrix} = \\ &= \lambda_j \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=E_{n_j} \text{ (обозначение)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=B_{n_j} \text{ (обозначение)}} = \\ &= \lambda_j E_{n_j} + B_{n_j} = \lambda_j E_{n_j} \left(E_{n_j} + \frac{1}{\lambda_j} B_{n_j} \right). \end{aligned}$$

Отметим, что матрица $\lambda_j E_{n_j}$ коммутирует с любой матрицей, в частности, она коммутирует с матрицей $E_{n_j} + \frac{1}{\lambda_j} B_{n_j}$. По пункту I:

$\ln(\lambda_j E_{n_j})$ существует. Следовательно, существование $\ln J_j$ будет доказано, если показать, что существует $\ln\left(E_{n_j} + \frac{1}{\lambda_j} B_{n_j}\right)$, ибо в этом случае $\ln J_j = \ln(\lambda_j E_{n_j}) + \ln\left(E_{n_j} + \frac{1}{\lambda_j} B_{n_j}\right)$.

Убедимся, что имеет место равенство

$$\ln\left(E_{n_j} + \frac{1}{\lambda_j} B_{n_j}\right) = \frac{B_{n_j}}{\lambda_j} - \frac{1}{2\lambda_j^2} B_{n_j}^2 + \frac{1}{3\lambda_j^3} B_{n_j}^3 - \frac{1}{4\lambda_j^4} B_{n_j}^4 + \dots + (-1)^{n_j-2} \cdot \frac{1}{(n_j-1)\lambda_j^{n_j-1}} B_{n_j}^{n_j-1} + \dots \quad (1)$$

Обозначим через $S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)$ сумму ряда, стоящего в правой части (1).

Равенство (1) будет установлено, если удастся показать, что ряд, стоящий в правой части (1), сходится и что $e^{S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)} = E_{n_j} + \frac{1}{\lambda_j} B_{n_j}$.

Имеем

$$B_{n_j}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{n_j}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad B_{n_j}^{n_j} = 0.$$

Следовательно, в ряде (1) член $(-1)^{n_j-2} \cdot \frac{1}{(n_j-1)\lambda_j^{n_j-1}} B_{n_j}^{n_j-1}$ — последний, отличный от нулевой матрицы. Значит, ряд, стоящий в правой части (1), сходится. Принимая во внимание выражения для B_{n_j} , $B_{n_j}^2$, $B_{n_j}^3$, ..., легко находим, что

$$S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\lambda_j} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\lambda_j^2} & \frac{1}{\lambda_j} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3\lambda_j^3} & -\frac{1}{2\lambda_j^2} & \frac{1}{\lambda_j} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(-1)^{n_j-2}}{(n_j-1)\lambda_j^{n_j-1}} & \dots & \dots & \dots & \dots & -\frac{1}{2\lambda_j^2} & \frac{1}{\lambda_j} & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем, далее,

$$\begin{aligned} e^{S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right) \right]^k = \\ &= \left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right) \right]^0 + \frac{1}{1!} \left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right) \right] + \frac{1}{2!} \left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right) \right]^2 + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{(n_j-1)!} \left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right) \right]^{(n_j-1)} + 0, \end{aligned}$$

ибо

$$\left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right) \right]^k = 0 \text{ для } k = n_j, n_j + 1, \dots$$

У матрицы $S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)$ чисто нулевые первая строка и последний

столбец; у матрицы $\left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)\right]^2$ чисто нулевые две первые строки

и два последних столбца, и т. д. У матрицы $\left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)\right]^{n_j}$ уже все

элементы равны нулю. После простых, но трудоемких вычислений устанавливается, что

$$\frac{1}{1!}\left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)\right] + \frac{1}{2!}\left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)\right]^2 + \dots + \frac{1}{(n_j-1)!}\left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)\right]^{(n_j-1)} = \frac{B_{n_j}}{\lambda_j}.$$

Так как $\left[S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)\right]^0 = E_{n_j}$, то получаем

$$e^{S\left(\frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)} = E_{n_j} + \frac{B_{n_j}}{\lambda_j}.$$

Таким образом, приходим к выводу, что соотношение (1) верно.

Следовательно, $\ln\left(E_{n_j} + \frac{B_{n_j}}{\lambda_j}\right)$ существует, а значит, существует

$\ln J_j$ ($j = \overline{1, m}$). ◀

§2. Лине́йные однородные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

Пусть имеется система

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$, $A(x)$ — матрица-функция размера $(n \times n)$,

периодическая с периодом ω , т.е. $A(x + \omega) \equiv A(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Отметим, что

$$A(x + \omega) \equiv A(x), \quad x \in (-\infty, +\infty) \Leftrightarrow a_{ij}(x + \omega) \equiv a_{ij}(x), \\ x \in (-\infty, +\infty), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Теорема 1. Любая фундаментальная матрица $\Phi(x)$ решений системы (1) представима в виде

$$\Phi(x) = p(x) \cdot e^{xR}, \quad (2)$$

где $p(x)$ — периодическая квадратная матрица порядка n с тем же периодом ω , а R — постоянная квадратная матрица порядка n .

► Пусть $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ — произвольная ф. м. р. с. (1) $\Rightarrow$ Каждая вектор-функция $Y = \varphi_j(x)$, $j = \overline{1, n}$ — решение системы (1). Покажем, что

$$\Phi(x + \omega) = (\varphi_1(x + \omega), \varphi_2(x + \omega), \dots, \varphi_n(x + \omega))$$

— тоже ф. м. р. с. (1).

В самом деле, так как $Y = \varphi_j(x)$ — решение системы (1), то $\varphi_j'(x + \omega) \equiv A(x + \omega) \cdot \varphi_j(x + \omega)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. У нас $A(x)$ — периодическая с периодом $\omega \Rightarrow A(x + \omega) \equiv A(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Поэтому предыдущее соотношение запишется в виде

$$\varphi_j'(x + \omega) \equiv A(x) \cdot \varphi_j(x + \omega), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Последнее означает, что вектор-функция $Y = \varphi_j(x + \omega)$ — решение системы (1). Таким образом, если мы составим матрицу

$$\Phi(x + \omega) = (\varphi_1(x + \omega), \varphi_2(x + \omega), \dots, \varphi_n(x + \omega)),$$

то ее столбцы являются решениями системы (1). Значит, $\Phi(x + \omega)$ — матрица решений системы (1).

По условию, $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x)$ — линейно независимые в промежутке $(-\infty, +\infty) \Rightarrow \Phi_1(x+\omega), \Phi_2(x+\omega), \dots, \Phi_n(x+\omega)$ — линейно независимые в $(-\infty, +\infty) \Rightarrow \Phi(x+\omega) = \Phi(x) \cdot C$.
Итак, имеем: $\Phi(x)$ и $\Phi(x+\omega)$ — две фундаментальные матрицы решений системы (1). Но тогда, как мы знаем, существует неособенная постоянная матрица C , такая, что $\Phi(x+\omega) = \Phi(x) \cdot C$.

Матрицу C называют *матрицей монодромии*.

Так как C — неособенная матрица, то существует $\ln C$. Введем в рассмотрение матрицу $R = \frac{1}{\omega} \ln C \Rightarrow C = e^{\omega R}$. Положим далее

$$p(x) = \Phi(x) \cdot e^{-xR}. \quad (3)$$

Из (3) находим $\Phi(x) = p(x) \cdot e^{xR}$. Остается показать теперь, что матрица $p(x)$ — периодическая с периодом ω . Имеем

$$p(x+\omega) \stackrel{(3)}{=} \Phi(x+\omega) \cdot e^{-(x+\omega)R} = \Phi(x) \cdot C \cdot e^{-\omega R} \cdot e^{-xR},$$

ибо матрицы $-\omega R$ и $-xR$ коммутируют.

Так как $Ce^{-\omega R} = e^{\omega R} \cdot e^{-\omega R} = e^0 = E$, то получаем

$$p(x+\omega) = \Phi(x) \cdot e^{-xR} \stackrel{(2)}{=} p(x), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Значит, матрица $p(x)$ — периодическая с периодом ω . ◀

Заметим еще, что из (3) следует:

- 1) матрица $p(x)$ — неособенная, ибо $\det p(x) \neq 0$;
- 2) матрица $p(x)$ — непрерывно дифференцируемая.

§3. Мультипликаторы

Пусть имеется линейная однородная система

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y, \quad (1)$$

где $A(x)$ — периодическая матрица-функция с периодом ω . Пусть $\Phi_1(x)$ — какая-нибудь ф. м. р. с. (1). Выше было показано, что $\Phi_1(x+\omega)$ — тоже ф. м. р. с. (1). Но тогда

$$\Phi_1(x + \omega) = \Phi_1(x) \cdot C_1 \quad (2)$$

(C_1 — матрица монодромии, $\det C_1 \neq 0$). Пусть $\Phi(x)$ — некоторая другая ф. м. р. с. (1). Тогда и $\Phi(x + \omega)$ — тоже ф. м. р. с. (1), причем

$$\Phi(x + \omega) = \Phi(x) \cdot C \quad (3)$$

(C — матрица монодромии, $\det C \neq 0$).

Найдем связь между матрицами C_1 и C . У нас $\Phi_1(x)$ и $\Phi(x)$ — ф. м. р. с. (1). Поэтому существует неособенная постоянная матрица T , такая, что

$$\Phi_1(x) = \Phi(x) \cdot T \quad (4)$$

$$\Rightarrow \Phi_1(x + \omega) = \Phi(x + \omega) \cdot T \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \Phi(x + \omega) \cdot T = \Phi_1(x) \cdot C_1 \stackrel{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow} \Phi(x + \omega) \cdot T = \Phi(x) \cdot T \cdot C_1.$$

Умножим обе части последнего равенства на матрицу T^{-1} справа. Получим

$$\Phi(x + \omega) = \Phi(x) \cdot T \cdot C_1 \cdot T^{-1}. \quad (5)$$

Но, с другой стороны, мы имеем (см. (3))

$$\Phi(x + \omega) = \Phi(x) \cdot C.$$

Так как матрица C — единственная, то из (5) и (3) следует, что

$$C = T \cdot C_1 \cdot T^{-1}. \quad (6)$$

Последнее означает, что матрицы C и C_1 — подобные.

Общий вывод: все матрицы монодромии для данной системы (1) являются подобными.

Известно, что собственные числа подобных матриц одни и те же. Следовательно, справедливо утверждение: *собственные числа любой из матриц монодромии для данной системы (1) не зависят от выбора ф. м. р. с. (1).*

Определение. Пусть $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ — собственные числа матрицы монодромии C . Эти числа называются *мультипликаторами* системы (1).

У нас $R = \frac{1}{\omega} \ln C$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — собственные числа матрицы R . Ясно, что $\lambda_j = \frac{1}{\omega} \ln \mu_j$. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ называются *характеристическими показателями* системы (1).

Заметим, что:

- 1) если $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$, то для соответствующего мультипликатора μ_j будет $|\mu_j| < 1$;
- 2) если $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$, то $|\mu_j| > 1$.

§4. Структура фундаментальной матрицы решений линейной однородной системы с периодическими коэффициентами

Было показано, что ф. м. р. с.

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y, \quad (1)$$

где $A(x + \omega) \equiv A(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, представима в виде

$$\Phi(x) = p(x) \cdot e^{xR}. \quad (2)$$

В (2) $p(x)$ — периодическая с периодом ω , неособенная, непрерывно дифференцируемая квадратная матрица порядка n ;

$R = \frac{1}{\omega} \ln C$ (C — матрица монодромии).

Пусть J — жорданова форма матрицы R . Значит, существует матрица S , такая, что $R = S \cdot J \cdot S^{-1}$. Имеем

$$\Phi(x) = p(x) e^{xR} = p(x) e^{SJS^{-1}x} = p(x) \cdot S \cdot e^{Jx} \cdot S^{-1}.$$

Умножив обе части последнего матричного равенства на S справа, получим

$$\underbrace{\Phi(x) \cdot S}_{= \Psi(x)} = \underbrace{p(x) \cdot S}_{= p^*(x) \text{ (обозначение)}} \cdot e^{Jx} = p^*(x) e^{Jx}.$$

Отметим, что $\Psi(x) = \Phi(x) \cdot S$ является ф. м. р. с. (1), а $p^*(x)$ — матрица, обладающая теми же свойствами, что и $p(x)$ ($p^*(x)$ — периодическая с периодом ω , неособенная, непрерывно дифференцируемая).

Итак,

$$\Psi(x) = p^*(x) \cdot e^{Jx}. \quad (3)$$

Если выясним структуру матрицы $\Psi(x)$, то тем самым узнаем структуру ф. м. р. с. (1).

Имеем

$$\Psi(x) = p^*(x) \cdot \begin{pmatrix} e^{J_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_2 x} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{J_m x} \end{pmatrix} = \underbrace{p^*(x) \begin{pmatrix} e^{J_1 x} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}}_{n_1 \text{ столбцов}}; \dots; \underbrace{p^*(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ e^{J_m x} \end{pmatrix}}_{n_m \text{ столбцов}}.$$

Каждой клетке Жордана J_j ($j = \overline{1, m}$) соответствует группа решений, входящих в матрицу $\Psi(x)$. Выпишем эти группы решений в явном виде.

Первая группа ($j = 1$):

$$p^*(x) \cdot \begin{pmatrix} e^{J_1 x} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \underset{\text{(здесь } n_1 \text{ решений)}}{=} \underbrace{(p_1, p_2, \dots, p_n)}_{=p^*(x)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x^{n_1-1}}{(n_1-1)!} & \dots & \dots & \dots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_1 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_1(x) = \left(p_1(x) + p_2(x) \cdot x + p_3(x) \cdot \frac{x^2}{2!} + \dots + p_{n_1}(x) \cdot \frac{x^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \right) \cdot e^{\lambda_1 x}, \\ \psi_2(x) = \left(p_2(x) + p_3(x) \cdot x + \dots + p_{n_1}(x) \cdot \frac{x^{n_1-2}}{(n_1-2)!} \right) \cdot e^{\lambda_1 x}, \\ \dots \\ \psi_{n_1}(x) = p_{n_1}(x) \cdot e^{\lambda_1 x}. \end{cases}$$

Отметим, что $p_1(x), p_2(x), \dots, p_{n_1}(x)$ — периодические вектор-функции с периодом ω .

Вторая группа решений ($j = 2$):

$$p^*(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ e^{J_2 x} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_{n_1+1}(x) = \left(p_{n_1+1}(x) + p_{n_1+2}(x) \cdot x + \dots + p_{n_1+n_2}(x) \cdot \frac{x^{n_2-1}}{(n_2-1)!} \right) \cdot e^{\lambda_2 x}, \\ \psi_{n_1+2}(x) = \left(p_{n_1+2}(x) + p_{n_1+3}(x) \cdot x + \dots + p_{n_1+n_2}(x) \cdot \frac{x^{n_2-2}}{(n_2-2)!} \right) \cdot e^{\lambda_2 x}, \\ \dots \\ \psi_{n_1+n_2}(x) = p_{n_1+n_2}(x) \cdot e^{\lambda_2 x}, \end{cases}$$

и так далее; m -я группа решений ($j = m$):

$$p^*(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ e^{J_m x} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+1}(x) = \left(p_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+1}(x) + p_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+2}(x) \cdot x + \dots + \right. \\ \left. + p_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+n_m}(x) \cdot \frac{x^{n_m-1}}{(n_m-1)!} \right) \cdot e^{\lambda_m x}, \\ \psi_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+2}(x) = \left(p_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+2}(x) + p_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+3}(x) \cdot x + \dots + \right. \\ \left. + p_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+n_m}(x) \cdot \frac{x^{n_m-2}}{(n_m-2)!} \right) \cdot e^{\lambda_m x}, \\ \dots \\ \psi_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+n_m}(x) = \psi_n(x) = p_{n_1+n_2+\dots+n_m}(x) \cdot e^{\lambda_m x}. \end{cases}$$

$Y = \Psi(x) \cdot C = C_1 \cdot \psi_1(x) + C_2 \cdot \psi_2(x) + \dots + C_n \cdot \psi_n(x)$ — общее решение системы (1).

Отметим, что:

1) если $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ для любого $j = \overline{1, m}$, то все решения системы (1) стремятся к нулю при $x \rightarrow +\infty$;

2) если имеется хотя бы одно характеристическое число λ_{j_0} , такое, что $\operatorname{Re} \lambda_{j_0} > 0$, то существуют решения системы (1), стремящиеся к бесконечности при $x \rightarrow +\infty$.

Замечание. Пусть $\Phi(x)$ — ф. м. р. с. (1), нормированная в точке $x = 0$, то есть такая, что $\Phi(0) = E$. Построим по ней матрицу монодромии C . Мы знаем, что $\Phi(x + \omega) = \Phi(x) \cdot C$. Положив в этом соотношении $x = 0$, получим

$$\Phi(\omega) = \underbrace{\Phi(0)}_{=E} \cdot C \Rightarrow C = \Phi(\omega).$$

Видим, что в этом случае мультипликаторы системы (1) будут найдены, если мы найдем собственные числа матрицы $\Phi(\omega)$.

По формуле Остроградского — Лиувилля имеем

$$W(x) = \det \Phi(x) = \det \Phi(0) \cdot e^{\int_0^x \operatorname{tr} A(t) dt},$$

где $\det \Phi(0) = 1$, так как $\Phi(x)$ — нормированная в точке $x = 0$. Поэтому

$$\det \Phi(\omega) = e^{\int_0^{\omega} \operatorname{tr} A(t) dt}$$

Мы знаем, что определитель любой матрицы равен произведению собственных чисел этой матрицы. Следовательно,

$$\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_n = \det \Phi(\omega) = e^{\int_0^{\omega} \operatorname{tr} A(t) dt}$$

Если прологарифмировать это соотношение, то получим

$$\begin{aligned} \ln \mu_1 + \ln \mu_2 + \dots + \ln \mu_n &= \int_0^{\omega} \operatorname{tr} A(t) dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n &= \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \operatorname{tr} A(t) dt. \end{aligned}$$

**§5. Приведение линейной однородной системы
с периодическими коэффициентами
к линейной однородной системе
с постоянными коэффициентами**

Пусть имеется система

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y, \quad (1)$$

где $A(x) \in C(\mathbb{R})$ и такая, что $A(x + \omega) = A(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Мы знаем, что любая фундаментальная матрица решений $\Phi(x)$ системы (1) представима в виде

$$\Phi(x) = p(x) \cdot e^{Rx}, \quad (2)$$

где $p(x)$ — неособая, периодическая матрица с периодом ω ; R — постоянная матрица. Отметим, что поскольку $\Phi(x)$ — матрица решений системы (1), то

$$\Phi'(x) = A(x) \cdot \Phi(x). \quad (3)$$

Произведем в системе (1) замену переменных по формуле

$$Y = p(x) \cdot Z, \quad (4)$$

где $p(x)$ — матрица из (2). Подставив (4) в (1), получим

$$\begin{aligned} p'(x) \cdot Z + p(x) \cdot Z' &= A(x) \cdot p(x) \cdot Z \Rightarrow \\ \Rightarrow p(x) Z' &= [A(x) \cdot p(x) - p'(x)] \cdot Z \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dZ}{dx} &= p^{-1}(x) [A(x) \cdot p(x) - p'(x)] \cdot Z. \end{aligned} \quad (5)$$

Найдем выражение для $p'(x)$. Для этого подставим выражение для матрицы $\Phi(x)$ в виде (2) в соотношение (3). Будем иметь

$$p'(x) e^{Rx} + p(x) \cdot R \cdot e^{Rx} = A(x) \cdot p(x) e^{Rx}.$$

Умножив обе части последнего тождества на e^{-Rx} справа, получим $p'(x) = A(x) \cdot p(x) - p(x) \cdot R$. Подставив полученное выражение для $p'(x)$ в (5), получим

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dx} &= p^{-1}(x) [A(x) \cdot p(x) - A(x) \cdot p(x) + p(x) \cdot R] \cdot Z \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dZ}{dx} &= p^{-1}(x) p(x) R \cdot Z \Rightarrow \frac{dZ}{dx} = R \cdot Z. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как R — постоянная матрица, то (6) — линейная однородная система с постоянными коэффициентами.

ПОНЯТИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§1. Постановка задачи об устойчивости. Определения

Система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y) \quad (1)$$

с начальным условием

$$Y|_{t=t_0} = \xi_0, \quad (2)$$

описывающая некоторый реальный процесс, неизбежно описывает его лишь приближенно. Дело в том, что система дифференциальных уравнений составляется при некоторых упрощающих действительные зависимости предположениях, а начальные данные, являющиеся обычно результатом некоторых измерений, вычисляются с погрешностью. Поэтому обычно лишь только те решения системы (1) могут хотя бы приближенно описывать изучаемый процесс, которые при $t \geq t_0$ мало изменяются при малом изменении правой части системы (1) и при малом изменении начальных данных (2).

Теория устойчивости изучает условия, при которых малые изменения вектор-функции $F(t, Y)$ или малые изменения начальных данных приводят лишь к малому изменению решений при $t \geq t_0$. Мы ограничимся здесь рассмотрением только второй из этих задач.

Рассмотрение будем вести при предположениях, что:

1) $F(t, Y) \in C(G)$;

2) $F(t, Y) \in \text{Lip}_Y(G)$ — локально; $(G) = (\tau, +\infty) \times (D)$, $(D) \subset \mathbb{R}^n$, $\tau \geq -\infty$.

Часто в дальнейшем будем называть независимую переменную t временем, каждое решение $Y(t)$ системы (1) — движением, а график этого движения — траекторией.

Пусть $Y = \varphi_0(t) = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$ — решение задачи (1) — (2). Будем считать, что это решение определено для $t \in (\tau_0, +\infty)$, $\tau \leq \tau_0 < t_0 < +\infty$; t_0, ξ_0 — любые, но такие, что точка $(t_0, \xi_0) \in (G)$.

Было отмечено, что начальные данные вычисляются с некоторой погрешностью, а потому вместо (2) будем иметь приближенное начальное условие

$$Y|_{t=t_0} = \xi, \text{ где } \xi = \xi_0 + \Delta\xi; (t_0, \xi) \in (G). \quad (\tilde{2})$$

Начальным условием $(\tilde{2})$ определяется некоторое другое движение системы (1): $Y = \varphi(t) = \varphi(t, t_0, \xi)$. Считаем, что и это движение определено для $t \in (\tau_0, +\infty)$. Вопрос об устойчивости (неустойчивости) движения $Y = \varphi_0(t)$, $t \in (\tau_0, +\infty)$, в смысле А.М. Ляпунова сводится к вопросу о влиянии ошибок в начальных данных на движение во все последующие моменты времени. Если оказывается, что малые ошибки в начальных данных обуславливают также малые ошибки во все последующие моменты, то говорят, что движение $Y = \varphi_0(t) = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in (\tau_0, +\infty)$, устойчиво в смысле А.М. Ляпунова. В противном случае говорят, что это движение неустойчиво в смысле А.М. Ляпунова.

Рассмотрим два простейших примера.

Пример 1. Дано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} + y = 1 + t. \quad (1^*)$$

Оно определено на всей плоскости переменных t и y , причем каждая точка этой плоскости оказывается точкой единственности. Общим решением уравнения (1^*) является функция

$$y = Ce^{-t} + t. \quad (2^*)$$

Из (2^*) выделим решение уравнения (1^*) , удовлетворяющее начальному условию $y|_{t=0} = \xi_0$. Таким решением будет функция

$y = \varphi_0(t, 0, \xi_0) = \xi_0 e^{-t} + t, t \in (-\infty, +\infty)$. Станем рассматривать это решение на промежутке $[0, +\infty)$.

Выделим теперь из (2*) решение уравнения (1*), удовлетворяющее начальному условию $y|_{t=0} = \xi$, где $\xi = \xi_0 + \Delta \xi, \Delta \xi \neq 0$. Таким решением будет функция $y = \varphi(t, 0, \xi) = \xi e^{-t} + t, t \in (-\infty, +\infty)$. И это решение станем рассматривать на промежутке $[0, +\infty)$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ любое, сколь угодно малое, и рассмотрим разность $\varphi(t, 0, \xi) - \varphi_0(t, 0, \xi_0)$. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi(t, 0, \xi) - \varphi_0(t, 0, \xi_0) &= (\xi e^{-t} + t) - (\xi_0 e^{-t} + t) = (\xi - \xi_0) e^{-t} \Rightarrow \\ \Rightarrow |\varphi(t, 0, \xi) - \varphi_0(t, 0, \xi_0)| &= |\xi - \xi_0| e^{-t} \leq |\xi - \xi_0| \text{ для всех } t \in [0, +\infty) \Rightarrow \\ \Rightarrow |\varphi(t, 0, \xi) - \varphi_0(t, 0, \xi_0)| &< \varepsilon \text{ для всех } t \in [0, +\infty), \end{aligned}$$

если число ξ брать любым, удовлетворяющим условию $|\xi - \xi_0| < \delta$, где $\delta = \varepsilon$.

В этом примере малые ошибки в начальных данных обуславливают малые ошибки во все последующие моменты времени. Более того, эти ошибки быстро убывают с увеличением t . Заметим еще, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi(t, 0, \xi) - \varphi_0(t, 0, \xi_0)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |\xi - \xi_0| e^{-t} = 0$$

(т. е. решения, близкие по начальным значениям, неограниченно сближаются с возрастанием t).

Пример 2. Дано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \sin^2 y. \quad (3^*)$$

Оно определено на всей плоскости переменных t и y ; каждая точка этой плоскости оказывается точкой единственности уравнения (3*).

Уравнение (3*) имеет очевидные решения: $y = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Пусть $y \neq k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Тогда уравнение (3*) может быть записано в виде

$$\frac{dy}{\sin^2 y} = dt \Rightarrow \operatorname{ctg} y = -(t + C). \quad (4^*)$$

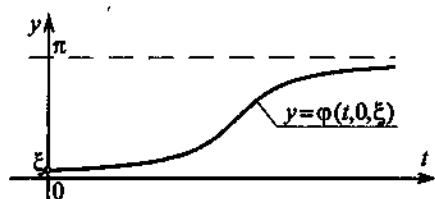


Рис. 8.1

Рассмотрим решение уравнения (3*), удовлетворяющее условию $y|_{t=0} = 0$. Этим решением будет $y = \varphi_0(t, 0, 0) \equiv 0$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Станем рассматривать это решение на промежутке $[0, +\infty)$ (рис. 8.1).

Из (4*) выделим решение уравнения (3*), удовлетворяющее начальному условию $y|_{t=0} = \xi$, $\xi \in (0, \pi)$. Таким решением будет функция, определяемая соотношением $\operatorname{ctg} y = \operatorname{ctg} \xi - t$, а именно:

$$y = \varphi(t, 0, \xi) = \operatorname{arccotg}(\operatorname{ctg} \xi - t), \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

И это решение будем рассматривать на промежутке $[0, +\infty)$.

Для разности решений имеем

$$\begin{aligned} \varphi(t, 0, \xi) - \varphi_0(t, 0, 0) &= \operatorname{arccotg}(\operatorname{ctg} \xi - t) \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} [\varphi(t, 0, \xi) - \varphi_0(t, 0, 0)] &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotg}(\operatorname{ctg} \xi - t) = \pi. \end{aligned}$$

Здесь уже не всякому $\varepsilon > 0$ будет отвечать $\delta > 0$, такое, чтобы из неравенства $|\xi - 0| < \delta$ следовало бы неравенство $|\varphi(t, 0, \xi) - \varphi_0(t, 0, 0)| < \varepsilon$. Значит, существует $\varepsilon_0 > 0$, которому не отвечает никакое $\delta > 0$ в указанном выше смысле, и, следовательно, для любого $\delta > 0$ существуют $\tilde{\xi}$, удовлетворяющее условию $|\tilde{\xi} - 0| < \delta$, и $\tilde{t} \in [0, +\infty)$, такие, что $|\varphi(\tilde{t}, 0, \tilde{\xi}) - \varphi_0(\tilde{t}, 0, 0)| \geq \varepsilon_0$.

Дадим теперь точные определения устойчивости, неустойчивости и асимптотической устойчивости движения $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$ системы (1).

Определение 1. Движение $Y = \varphi_0(t) = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$ системы (1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если любому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$, такое, что для любого вектора ξ , удовлетворяющего условию $\|\xi - \xi_0\| < \delta$, движение системы (1) $Y = \varphi(t) = \varphi(t, t_0, \xi)$ определено на промежутке $[t_0, +\infty)$ и имеет место неравенство

$$\|\varphi(t, t_0, \xi) - \varphi_0(t, t_0, \xi_0)\| < \varepsilon \quad \text{для любого } t \in [t_0, +\infty).$$

В противном случае движение $Y = \varphi_0(t) = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, называется *неустойчивым по Ляпунову*. Иными словами, движение $Y = \varphi_0(t) = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, называется неустойчивым по Ляпунову, если для любого $\delta > 0$ существуют вектор $\tilde{\xi}$, удовлетворяющий условию $\|\tilde{\xi} - \xi_0\| < \delta$, и $\tilde{t} \in [t_0, +\infty)$, такие, что $\|\varphi(\tilde{t}, t_0, \tilde{\xi}) - \varphi_0(\tilde{t}, t_0, \xi_0)\| \geq \varepsilon$.

Определение 2. Движение $Y = \varphi_0(t) = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, называется *асимптотически устойчивым (по Ляпунову)*, если 1) $\varphi_0(t) = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$ устойчиво (по Ляпунову) и если 2) существует $\delta' > 0$, такое, что для любого ξ , удовлетворяющего условию $\|\xi - \xi_0\| < \delta'$, оказывается

$$\|\varphi(t, t_0, \xi) - \varphi_0(t, t_0, \xi_0)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Замечание. Допустим, что существует точка $Y_0 \in (D)$, такая, что для любого $t \in (\tau_0, +\infty)$ оказывается $F(t, Y_0) = 0$. Тогда система (1) допускает движение $Y = Y_0$, $t \in (\tau_0, +\infty)$. Такое движение называется состоянием покоя. Его траекторией является точка Y_0 (точка Y_0 — точка покоя). Отметим, что вопрос об устойчивости произвольного движения $\varphi_0(t) = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) может быть сведен к вопросу об устойчивости состояния покоя некоторой другой системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Действительно, произведем в системе (1) замену

$$Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0) + X. \quad (3)$$

Получим

$$\begin{aligned} & \frac{d\varphi_0(t, t_0, \xi_0)}{dt} + \frac{dX}{dt} = F(t, \varphi_0(t, t_0, \xi_0) + X) \Rightarrow \\ & = F(t, \varphi_0(t, t_0, \xi_0)) \\ \Rightarrow \frac{dX}{dt} &= F(t, \varphi_0(t, t_0, \xi_0) + X) - \underbrace{F(t, \varphi_0(t, t_0, \xi_0))}_{\text{обозн.}} = \tilde{F}(t, X) \Rightarrow \\ & \therefore \frac{dX}{dt} = \tilde{F}(t, X). \end{aligned} \quad (4)$$

В силу замены (3) решению $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$ системы (1) соответствует решение $X \equiv 0$ системы (4) (движение $X \equiv 0, t \in (t_0, +\infty)$ — состояние покоя системы (4)), а решению $Y = \varphi(t, t_0, \xi)$ системы (1) соответствует решение $X = \varphi(t, t_0, \xi) - \varphi_0(t, t_0, \xi_0) \underset{\text{обозн.}}{=} \psi(t, t_0, \eta)$ системы (4). Ясно, что

$$\eta = \psi(t, t_0, \eta)|_{t=t_0} = \varphi(t, t_0, \xi)|_{t=t_0} - \varphi_0(t, t_0, \xi_0)|_{t=t_0} = \xi - \xi_0.$$

Покажем, что если решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0), t \in [t_0, +\infty)$, системы (1): 1) устойчиво, 2) неустойчиво, 3) асимптотически устойчиво, то и решение $X \equiv 0, t \in [t_0, +\infty)$, системы (4) будет соответственно: 1) устойчивым, 2) неустойчивым, 3) асимптотически устойчивым.

► 1) Пусть решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0), t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) устойчиво. Тогда любому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$, такое, что для любого ξ , удовлетворяющего условию $\|\xi - \xi_0\| < \delta$, движение $Y = \varphi(t, t_0, \xi)$ системы (1) определено на промежутке $t \in [t_0, +\infty)$ и имеет место неравенство $\|\varphi(t, t_0, \xi) - \varphi_0(t, t_0, \xi_0)\| < \varepsilon$ для любого $t \in [t_0, +\infty)$. А это неравенство равносильно тому, что любому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$, такое, что для любого η , удовлетворяющего условию $\|\eta - 0\| < \delta$, движение $X = \psi(t, t_0, \eta)$ системы (4) определено на промежутке $[t_0, +\infty)$ и имеет место неравенство $\|\psi(t, t_0, \eta) - 0\| < \varepsilon$ для любого $t \in [t_0, +\infty)$. Последнее означает, что решение $X \equiv 0, t \in [t_0, +\infty)$, системы (4) устойчиво.

2) Пусть решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0), t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) неустойчиво. Но тогда существует $\varepsilon > 0$, такое, что для любого $\delta > 0$ существуют вектор $\tilde{\xi}$, удовлетворяющий условию $\|\tilde{\xi} - \xi_0\| < \delta$, и $\tilde{t} \in [t_0, +\infty)$, такие, что будет $\|\varphi(\tilde{t}, t_0, \tilde{\xi}) - \varphi_0(\tilde{t}, t_0, \xi_0)\| \geq \varepsilon$. А это равносильно тому, что существует $\varepsilon > 0$, такое, что для любого $\delta > 0$ существуют вектор $\tilde{\eta}$, удовлетворяющий условию $\|\tilde{\eta} - 0\| < \delta$, и $\tilde{t} \in [t_0, +\infty)$, такие, что будет $\|\psi(\tilde{t}, t_0, \tilde{\eta}) - 0\| \geq \varepsilon$. Последнее означает, что решение $X \equiv 0, t \in [t_0, +\infty)$, системы (4) неустойчиво.

3) Пусть решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) асимптотически устойчиво. Это означает, что 1) решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, устойчиво и что 2) существует $\delta' > 0$ такое, что для любого вектора ξ , удовлетворяющего условию $\|\xi - \xi_0\| < \delta'$, будет

$$\|\varphi(t, t_0, \xi) - \varphi_0(t, t_0, \xi_0)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Но тогда: 1) решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (4) устойчиво и 2) существует $\delta' > 0$ такое, что для любого вектора η , удовлетворяющего условию $\|\eta - 0\| < \delta'$, будет

$$\|\psi(t, t_0, \eta) - 0\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Значит, решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (4) асимптотически устойчиво. ◀

§2. Устойчивость линейных систем

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dY}{dt} = A(t) \cdot Y + F(t), \quad (1)$$

где матрица-функция $A(t)$ и вектор-функция $F(t)$ предполагаются непрерывными на промежутке $(\tau, +\infty)$. Заметим, что в этом случае область $(G) = (\tau, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ и решения системы (1) существуют на всем промежутке $(\tau, +\infty)$. Покажем, что исследование на устойчивость произвольного решения $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$ системы (1) сводится к исследованию на устойчивость решения $Y \equiv 0$ соответствующей однородной системы

$$\frac{dY}{dt} = A(t) \cdot Y, \quad (2)$$

а именно, покажем, что справедливо утверждение:

Произвольное решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$ линейной неоднородной системы (1): 1) устойчиво, 2) неустойчиво, 3) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда решение

$Y \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$ соответствующей однородной системы (2) соответственно: 1) устойчиво, 2) неустойчиво, 3) асимптотически устойчиво.

► В системе (1) произведем замену, положив

$$Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0) + X. \quad (3)$$

(X — новая искомая вектор-функция). Получим

$$\frac{d\varphi_0(t, t_0, \xi_0)}{dt} + \frac{dX}{dt} = A(t)[\varphi_0(t, t_0, \xi_0) + X] + F(t).$$

Так как $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, — решение системы (1), то

$$\frac{d\varphi_0(t, t_0, \xi_0)}{dt} = A(t) \cdot \varphi_0(t, t_0, \xi_0) + F(t), \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Но тогда

$$\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X. \quad (\tilde{2})$$

В силу замены (3) решению $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$ системы (1) соответствует решение $X \equiv 0$ системы $(\tilde{2})$, а любому другому решению $Y = \varphi(t, t_0, \xi)$ системы (1) соответствует решение $X = \psi(t, t_0, \eta) = \varphi(t, t_0, \xi) - \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$ системы $(\tilde{2})$, причем $\psi(t, t_0, \eta)|_{t=t_0} = \eta = \xi - \xi_0$.

Совершенно аналогично тому, как это было сделано в конце §1, устанавливается, что если решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$ системы (1): 1) устойчиво, 2) неустойчиво, 3) асимптотически устойчиво, то решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ соответственно: 1) устойчиво, 2) неустойчиво, 3) асимптотически устойчиво.

Покажем, что справедливо и обратное утверждение, а именно, если решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$: 1) устойчиво, 2) неустойчиво, 3) асимптотически устойчиво, то решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) соответственно: 1) устойчиво, 2) неустойчиво, 3) асимптотически устойчиво.

Действительно: 1) Пусть решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ устойчиво. Нужно показать, что тогда устойчиво и решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1). Рассуждаем от противного. Допустим, что решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, систе-

мы (1) неустойчиво. Но тогда, как показано выше, будет неустойчиво решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$, а это не так.

2) Пусть решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ неустойчиво. Нужно показать, что тогда неустойчиво и решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1). Рассуждаем от противного. Допустим, что решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) устойчиво. Но тогда, как показано выше, будет устойчивым и решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$, а это не так.

3) Пусть решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ асимптотически устойчиво. Нужно показать, что тогда асимптотически устойчиво и решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1). Рассуждаем от противного. Допустим, что решение $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) устойчиво, но не асимптотически (устойчивость решения $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$ системы (1) следует из устойчивости решения $X \equiv 0$ системы $(\tilde{2})$, см. пункт 1)). Но тогда из доказательства, проведенного выше, будет следовать лишь устойчивость (неасимптотическая) решения $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$, а это не так. ◀

Важно выяснить теперь, при каких условиях решение $X \equiv 0$,

$t \in [t_0, +\infty)$, линейной однородной системы $\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X$ будет:

1) устойчивым и 2) асимптотически устойчивым?

Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема. Пусть имеется линейная однородная система

$$\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X. \quad (\tilde{2})$$

Пусть $\Phi_0(t)$ — ф. м. р. с. $(\tilde{2})$, нормированная в некоторой точке $t_0 \in (\tau, +\infty)$, т.е. $\Phi_0(t)|_{t=t_0} = E$. Решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$:

1) устойчиво лишь тогда, когда $\Phi_0(t)$ — ограниченная на промежутке $[t_0, +\infty)$;

2) асимптотически устойчиво лишь тогда, когда $\|\Phi_0(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Докажем утверждение 1):

Необходимость. Дано: решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, устойчиво.

Требуется доказать, что $\Phi_0(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$ — ограниченная на промежутке $[t_0, +\infty)$.

► Рассуждаем от противного, а именно, предполагаем, что $\Phi_0(t)$ не является ограниченной на промежутке $[t_0, +\infty)$. Но тогда существует по крайней мере одно j_0 , такое, что решение $\varphi_{j_0}(t)$ не является ограниченным на промежутке $[t_0, +\infty)$ (j_0 — одно из чисел $1, 2, \dots, n$). Покажем теперь, что неограниченность решения $\varphi_{j_0}(t)$ приводит к тому, что решение $X \equiv 0, t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ неустойчиво. Действительно, возьмем произвольное $\varepsilon_0 > 0$ и закрепим его. Пусть $\delta > 0$ — любое, сколь угодно малое. Возьмем число Δ , удовлетворяющее условию $0 < \Delta < \delta$, и рассмотрим решение системы $(\tilde{2})$: $X = \varphi(t) = \varphi_{j_0}(t) \cdot \Delta$. Имеем $\|\varphi(t)\| = \Delta \cdot \|\varphi_{j_0}(t)\|$. Так как $\|\varphi_{j_0}(t)\|$ неограниченная на промежутке $[t_0, +\infty)$, то и $\|\varphi(t)\|$ неограниченная на $[t_0, +\infty)$. Следовательно, существует $\tilde{t} \in [t_0, +\infty)$, такое, что $\|\varphi(\tilde{t})\| \geq \varepsilon_0$.

Имеем, далее, $\tilde{\xi} = \varphi(t)|_{t=t_0} = \varphi_{j_0}(t_0) \cdot \Delta = e_{j_0} \cdot \Delta$, где e_{j_0} — матрица-столбец, у которой все элементы, кроме одного (равного единице), равны нулю. Поэтому $\|\varphi(t_0)\| = \|e_{j_0} \cdot \Delta\| = 1 \cdot \Delta = \Delta$, т. е. $\|\tilde{\xi}\| = \Delta < \delta$. Таким образом, получили: существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для любого $\delta > 0$ существуют вектор $\tilde{\xi}$, удовлетворяющий условию $\|\tilde{\xi}\| = \|\tilde{\xi} - 0\| < \delta$, и $\tilde{t} \in [t_0, +\infty)$, такие, что

$$\|\varphi(\tilde{t}, t_0, \tilde{\xi})\| = \|\varphi(\tilde{t}, t_0, \tilde{\xi}) - 0\| \geq \varepsilon_0.$$

Последнее означает, что решение $X \equiv 0, t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ неустойчиво. У нас же, по условию, решение $X \equiv 0, t \in [t_0, +\infty)$, устойчиво. Получили противоречие. Значит, предположение, что $\Phi_0(t)$ — неограниченная на промежутке $[t_0, +\infty)$, неверно. ◀

Достаточность. Дано: $\Phi_0(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$ — ограниченная на промежутке $[t_0, +\infty)$. Требуется доказать, что решение $X \equiv 0, t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ устойчиво.

► По условию, $\Phi_0(t)$ — ограниченная на $[t_0, +\infty)$. $\Rightarrow$ Существует число $M > 0$, такое, что $\|\Phi_0(t)\| \leq M, t \in [t_0, +\infty)$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и произвольный вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$. Отметим, что

$X = \Phi_0(t) \cdot \xi$ — решение системы $(\tilde{2})$, удовлетворяющее начальному условию $X|_{t=t_0} = \xi$ ($\Phi_0(t) \cdot \xi = \Phi(t, t_0, \xi)$, $t \in [t_0, +\infty)$). Имеем

$$\|\Phi(t, t_0, \xi) - 0\| = \|\Phi(t, t_0, \xi)\| = \|\Phi_0(t) \cdot \xi\| \leq n \cdot \|\Phi_0(t)\| \cdot \|\xi\| \leq n \cdot M \cdot \|\xi\|,$$

$$t \in [t_0, +\infty).$$

Отсюда видим, что $\|\Phi(t, t_0, \xi) - 0\| < \varepsilon$, если $\|\xi - 0\| = \|\xi\| < \frac{\varepsilon}{nM}$. Таким образом, получаем: любому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ ($\delta = \frac{\varepsilon}{nM}$), такое, что для любого ξ , удовлетворяющего условию $\|\xi - 0\| < \delta$, оказывается $\|\Phi(t, t_0, \xi) - 0\| < \varepsilon$ для любого $t \in [t_0, +\infty)$. Последнее означает, что решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ устойчиво. ◀

Докажем теперь утверждение 2).

Необходимость. Дано: решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ асимптотически устойчиво. Требуется доказать, что

$$\|\Phi_0(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

► По условию, решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ асимптотически устойчиво. Это означает, что решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, устойчиво и что существует $\delta' > 0$, такое, что для любого ξ , удовлетворяющего условию $\|\xi - 0\| = \|\xi\| < \delta'$, оказывается $\|\Phi(t, t_0, \xi) - 0\| = \|\Phi(t, t_0, \xi)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Мы докажем, что $\|\Phi_0(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, если покажем, что для любого $j = \overline{1, n}$:

$$\|\varphi_j(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0. \quad (\text{У нас } \Phi_0(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))).$$

Возьмем любое решение $X = \varphi_j(t)$, $j = \overline{1, n}$, входящее в матрицу $\Phi_0(t)$. Возьмем $\Delta > 0$ — любое, но такое, что $\Delta < \delta'$, и рассмотрим решение $\Phi(t) = \varphi_j(t) \cdot \Delta$, $t \in [t_0, +\infty)$. Имеем $\xi = \Phi(t_0) = \varphi_j(t_0) \cdot \Delta = e_j \cdot \Delta$, где e_j — матрица-столбец, у которой все элементы, кроме одного (равного единице), равны нулю. Поэтому $\|\Phi(t_0)\| = \Delta < \delta'$, т.е. $\|\xi\| < \delta'$. А тогда, в силу асимптотической устойчивости решения $X = 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, будем иметь

$$\|\Phi(t)\| = \|\Phi(t, t_0, \xi)\| = \|\Phi(t, t_0, \xi) - 0\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned} & \left\| \Phi_j(t) \cdot \Delta \right\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow \left\| \Phi_j(t) \right\| \cdot \Delta \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left\| \Phi_j(t) \right\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ при любом } j = \overline{1, n} \Rightarrow \left\| \Phi_0(t) \right\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Достаточность. Дано: $\left\| \Phi_0(t) \right\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Требуется доказать, что решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ асимптотически устойчиво.

► По условию, $\left\| \Phi_0(t) \right\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Тогда $\left\| \Phi_0(t) \right\|$ — ограниченная на промежутке $[t_0, +\infty)$, следовательно, по утверждению 1) теоремы, решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ устойчиво.

Возьмем произвольный вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ и рассмотрим решение $\Phi_0(t) \cdot \xi = \varphi(t, t_0, \xi)$ системы $(\tilde{2})$. Имеем

$$\left\| \varphi(t, t_0, \xi) - 0 \right\| = \left\| \varphi(t, t_0, \xi) \right\| = \left\| \Phi_0(t) \cdot \xi \right\| \leq n \cdot \left\| \Phi_0(t) \right\| \cdot \left\| \xi \right\|.$$

По условию $\left\| \Phi_0(t) \right\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. А тогда из предыдущего неравенства следует, что $\left\| \varphi(t, t_0, \xi) - 0 \right\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Таким образом, получили, что решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ устойчиво и что для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ оказывается $\left\| \varphi(t, t_0, \xi) - 0 \right\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Это означает, что решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы $(\tilde{2})$ асимптотически устойчиво. $\blacktriangleleft$

§3. Устойчивость линейных систем с постоянными коэффициентами

Пусть имеется линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dY}{dt} = A \cdot Y + F(t), \quad (1)$$

где A — постоянная матрица, а вектор-функция $F(t)$ предполагается непрерывной на промежутке $(\tau, +\infty)$. В §2 было показано, что исследование на устойчивость произвольного решения $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) сводится к исследованию на устойчивость решения $Y \equiv 0$ соответствующей однородной системы

$$\frac{dY}{dt} = A \cdot Y. \quad (2)$$

Ответ же на вопросы об устойчивости, асимптотической устойчивости решения $Y \equiv 0$ системы (2) дает следующая теорема.

Теорема. Пусть имеется линейная однородная система с постоянными коэффициентами (2). Пусть λ_j ($j = \overline{1, m}$) — собственные числа матрицы A . Тогда:

I. Решение $Y \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (2) устойчиво лишь тогда, когда $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0$ для любого $j = \overline{1, m}$; при этом каждому λ_j , у которого $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$, в канонической форме J матрицы A должны соответствовать клетки Жордана лишь первого порядка.

II. Решение $Y \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (2) асимптотически устойчиво лишь тогда, когда $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ для любого $j = \overline{1, m}$.

► Мы знаем, что любое решение системы (2) определено на интервале $(-\infty; +\infty)$. Поэтому всегда в качестве t_0 можно взять $t_0 = 0$.

Возьмем фундаментальную матрицу решений системы (2), нормированную в точке $t_0 = 0$. Такой матрицей является матрица e^{At} . Найдем условия, при которых матрица e^{At} является ограниченной, и условия, при которых $\|e^{At}\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Пусть $J = \operatorname{diag}[J_1, J_2, \dots, J_m]$ — каноническая форма матрицы A . Пусть $A = SJS^{-1}$ ($\det S \neq 0$). Тогда

$$e^{At} = S \cdot e^{Jt} \cdot S^{-1}. \quad (3)$$

Из (3) следует, что матрицы e^{At} и e^{Jt} одновременно либо ограниченные, либо неограниченные и их нормы одновременно либо стремятся к нулю, либо не стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Поэтому можно исследовать лишь матрицу e^{Jt} .

Мы знаем, что $e^{Jt} = \operatorname{diag}[e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \dots, e^{J_m t}]$, где

$$e^{J_j t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_j t} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ te^{\lambda_j t} & e^{\lambda_j t} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{t^{n_j-1} e^{\lambda_j t}}{(n_j-1)!} & \frac{t^{n_j-2} e^{\lambda_j t}}{(n_j-2)!} & \frac{t^{n_j-3} e^{\lambda_j t}}{(n_j-3)!} & \dots & te^{\lambda_j t} & e^{\lambda_j t} \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, m}.$$

1) Пусть λ_j ($j = \overline{1, m}$) такие, что $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$. Но тогда при любом $k = \overline{0, n_j - 1}$ будет $\frac{t^k e^{\lambda_j t}}{k!} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Следовательно, $\|e^{J_j t}\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, а значит, и $\|e^{J t}\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

2) Пусть среди собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ матрицы A имеется хотя бы одно λ_j такое, что $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$. Это означает, что либо $\lambda_j = 0$, либо $\lambda_j = i\beta$ ($\beta \neq 0$). В обоих этих случаях $|e^{\lambda_j t}| = 1$ для любого t и, следовательно, величина $\frac{t^k e^{\lambda_j t}}{k!}$ не стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, причем эта величина будет ограниченной лишь тогда, когда $k = 0$. Значит, в обоих этих случаях $\|e^{J_j t}\|$ не стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, причем $\|e^{J_j t}\|$ будет ограниченной лишь тогда, когда J_j (в канонической форме J матрицы A) является клеткой Жордана лишь первого порядка.

3) Пусть, наконец, среди собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ матрицы A имеется хотя бы одно λ_j такое, что $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$. Но тогда при любом $k = \overline{0, n_j - 1}$ величина $\frac{t^k e^{\lambda_j t}}{k!}$ будет неограниченной на промежутке $[t_0, +\infty)$. Значит, будет неограниченной на промежутке $[t_0, +\infty)$ и $\|e^{J_j t}\|$.

Из анализа случаев, когда $\|e^{J_j t}\|$ — ограниченная, неограниченная и когда $\|e^{J_j t}\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, следуют утверждения I и II теоремы.

§4. Устойчивость линейных систем с периодическими коэффициентами

Пусть имеется линейная однородная система с периодическими коэффициентами

$$\frac{dY}{dt} = A(t) \cdot Y, \quad (1)$$

где $A(t) \in C(\mathbb{R})$ и такая, что $A(t + \omega) = A(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Ранее было показано, что система (1) преобразованием

$$Y = p(t) \cdot Z, \quad (2)$$

где $p(t)$ — не особая, ω -периодическая матрица, переводится в систему

$$\frac{dZ}{dt} = R \cdot Z. \quad (3)$$

В системе (3) $R = \frac{1}{\omega} \ln C$ — постоянная матрица; C — матрица монодромии системы (1).

Так как (3) — линейная однородная система с постоянными коэффициентами, то к ней применима теорема, доказанная в §3.

Пусть μ_j — собственные числа матрицы C (мультипликаторы системы (1)); λ_j — собственные числа матрицы R (характеристические показатели системы (1)). Так как $\lambda_j = \frac{1}{\omega} \ln \mu_j = \frac{1}{\omega} [\ln |\mu_j| + i \arg \mu_j]$, то $\operatorname{Re} \lambda_j = \frac{1}{\omega} \ln |\mu_j|$, и поэтому

$$\operatorname{Re} \lambda_j \begin{cases} < 0, & \text{если } |\mu_j| < 1, \\ = 0, & \text{если } |\mu_j| = 1, \\ > 0, & \text{если } |\mu_j| > 1. \end{cases}$$

Отсюда, принимая во внимание теорему, доказанную в §3, приходим к заключению, что справедливы утверждения:

I. Решение $Y \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) устойчиво лишь тогда, когда $|\mu_j| \leq 1$ для любого $j = \overline{1, m}$; при этом каждому μ_j , у которого $|\mu_j| = 1$, в канонической форме матрицы монодромии C должны соответствовать клетки Жордана лишь первого порядка.

II. Решение $Y \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) асимптотически устойчиво лишь тогда, когда $|\mu_j| < 1$ для любого $j = \overline{1, m}$.

§5. Нелинейные системы.

Устойчивость по первому приближению

Пусть имеется нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y). \quad (1)$$

Пусть $F(t, Y) \in C(G)$ и $\frac{\partial F(t, Y)}{\partial Y} \in C(G)$, где $(G) = (\tau, +\infty) \times (D)$, $(D) \subset \mathbb{R}^n$, $\tau \geq -\infty$.

В §1 было показано, что вопрос об устойчивости произвольного движения $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (1) заменой $Y = \varphi_0(t, t_0, \xi_0) + X$ сводится к вопросу об устойчивости движения $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы

$$\frac{dX}{dt} = \tilde{F}(t, X), \quad (2)$$

где $\tilde{F}(t, X) = F(t, \varphi_0(t, t_0, \xi_0) + X) - F(t, \varphi_0(t, t_0, \xi_0))$ и, следовательно, $\tilde{F}(t, 0) \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$.

Одним из основных методов исследования на устойчивость движения $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, нелинейной системы (2) является метод исследования на устойчивость по первому приближению. Этот метод заключается в том, что в окрестности точки $X \equiv 0$ систему (2) представляют в виде

$$\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X + f(t, X), \quad (3)$$

где $A(t) = \frac{\partial \tilde{F}(t, \varphi_0(t, t_0, \xi_0))}{\partial X}$ — матрица-функция размера $n \times n$,

$f(t, X) \in C(\tilde{G})$, $\frac{\partial f(t, X)}{\partial X} \in C(\tilde{G})$, $f(t, 0) \equiv 0$ в области $(\tilde{G}) = (\tau, +\infty) \times (\tilde{D})$,

$(\tilde{D}) \subset \mathbb{R}^n$; $\frac{\|f(t, X)\|}{\|X\|} \xrightarrow{|X| \rightarrow 0} 0$.

Если в (3) отбросить член $f(t, X)$, имеющий порядок выше первого относительно $\|X\|$ при $\|X\| \rightarrow 0$, то получим линейную

систему $\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X$, называемую системой первого приближения для системы (3), а следовательно, и системы (2). Если матрица $A(t)$ оказывается постоянной, то система (3) называется стационарной в первом приближении.

Для стационарной в первом приближении системы (3) следующая теорема указывает условия применимости метода исследования по первому приближению.

Теорема. Пусть имеется система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X + f(t, X), \quad (\tilde{3})$$

где A — постоянная матрица размера $n \times n$, $f(t, X)$ — вектор-функция, такая, что:

1) $f(t, X) \in C(\tilde{G})$, $f(t, X) \in \text{Lip}_X(\tilde{G})$ — локально и $f(t, 0) \equiv 0$ в области $(\tilde{G}) = \{t \in (\tau, +\infty), \|X\| < a\}$;

2) для любого числа $\alpha > 0$ существуют число $T (T > \tau)$ и число $h (0 < h < a)$, такие, что $\|f(t, X)\| < \alpha \cdot \|X\|$, для $t \geq T$ и $\|X\| \leq h$.

Тогда, если все собственные числа λ_j матрицы A имеют отрицательные вещественные части: $\text{Re } \lambda_j < 0$, то решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$ системы $(\tilde{3})$ асимптотически устойчиво.

► По условию, $\text{Re } \lambda_j < 0$ для любого $j = \overline{1, m}$. Но тогда существует число $\lambda > 0$, такое, что $\text{Re } \lambda_j < -\lambda$, для любого $j = \overline{1, m}$. Рассмотрим матрицу e^{At} . Существует число $k (k \geq 1)$, такое, что $\|e^{At}\| \leq k \cdot e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$.

Возьмем число $\alpha > 0$ любое, но такое, чтобы было

$$n \cdot k \cdot \alpha < \lambda. \quad (4)$$

По условию 2) теоремы, взятому числу $\alpha > 0$ отвечают числа T и $h (T > \tau, 0 < h < a)$, такие, что в $(\tilde{G}') = \{t \geq T, \|X\| \leq h\}$ будет $\|f(t, X)\| < \alpha \cdot \|X\|$.

Покажем сначала, что решение $X \equiv 0$ системы $(\tilde{3})$ будет устойчивым. Для этого берем произвольное число $t_0 (t_0 > T)$ и берем $\varepsilon > 0$ любое, но такое, чтобы было $0 < \varepsilon < h$. Затем берем ξ произвольное, но такое, что $\|\xi\| < h$.

Рассмотрим решение $X = \varphi(t, t_0, \xi)$ системы $(\tilde{3})$. Имеем $\varphi(t, t_0, \xi)|_{t=t_0} = \xi$. Следовательно, $\|\varphi(t, t_0, \xi)\|_{t=t_0} = \|\xi\| < h$. Но тогда существует промежуток $[t_0, \beta)$, такой, что $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| < h$ для любого t из промежутка $[t_0, \beta)$. Убедимся, что взятому числу $\varepsilon > 0$ можно сопоставить число $\delta > 0$, такое, что для любого ξ ,

удовлетворяющего условию $\|\xi\| < \delta$, будет $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| < \varepsilon$, $t \in [t_0, \beta]$. Для этого наряду с системой (3) рассматриваем вспомогательную линейную систему

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X + f(t, \varphi(t, t_0, \xi)), \quad (\tilde{3})$$

где $f(t, \varphi(t, t_0, \xi)) = q(t)$ — вектор-функция, зависящая только от t . Нетрудно понять, что $q(t) \in C([t_0, \beta])$ и что система (3) определена в области $(G_1) = \{t_0 \leq t < \beta, \|X\| < +\infty\}$. В области (G_1) построим общее решение системы (3). Оно, как мы знаем, будет таким:

$$X = e^{A(t-t_0)} \cdot \left[C + \int_{t_0}^t e^{-A(s-t_0)} \cdot f(s, \varphi(s, t_0, \xi)) ds \right].$$

Выделим из него решение, удовлетворяющее начальному условию $X|_{t=t_0} = \xi$. Получим

$$X = e^{A(t-t_0)} \cdot \left[\xi + \int_{t_0}^t e^{-A(s-t_0)} \cdot f(s, \varphi(s, t_0, \xi)) ds \right]. \quad (5)$$

Заметим, что решение $X = \varphi(t, t_0, \xi)$ системы (3) также является решением системы (3), удовлетворяющим начальному условию $X|_{t=t_0} = \xi$. Следовательно, решение $X = \varphi(t, t_0, \xi)$ совпадает с решением (5), т. е.

$$\varphi(t, t_0, \xi) = e^{A(t-t_0)} \cdot \left[\xi + \int_{t_0}^t e^{-A(s-t_0)} \cdot f(s, \varphi(s, t_0, \xi)) ds \right]. \quad (6)$$

Произведем оценку решения $X = \varphi(t, t_0, \xi)$. Из (6) имеем

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, t_0, \xi)\| &= \|e^{A(t-t_0)} \cdot \xi\| + \left\| e^{A(t-t_0)} \cdot \int_{t_0}^t e^{-A(s-t_0)} \cdot f(s, \varphi(s, t_0, \xi)) ds \right\| \leq \\ &\leq n \|e^{A(t-t_0)}\| \cdot \|\xi\| + \left\| \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} \cdot f(s, \varphi(s, t_0, \xi)) ds \right\| \leq \end{aligned}$$

$$\leq n \|e^{A(t-t_0)}\| \cdot \|\xi\| + \int_{t_0}^t n \|e^{A(t-s)}\| \cdot \|f(s, \varphi(s, t_0, \xi))\| ds.$$

У нас $\|e^{A(t-t_0)}\| \leq k e^{-\lambda(t-t_0)}$; $\|e^{A(t-s)}\| \leq k e^{-\lambda(t-s)}$, при $t \geq t_0 > T$, и $t_0 \leq s \leq t$; $\|f(s, \varphi(s, t_0, \xi))\| \leq \alpha \cdot \|\varphi(s, t_0, \xi)\|$, ибо $s > T$ и $\|\varphi(s, t_0, \xi)\| < h$ для $s \in [t_0, \beta]$. Поэтому

$$\|\varphi(t, t_0, \xi)\| \leq nk \|\xi\| e^{-\lambda(t-t_0)} + \int_{t_0}^t n k e^{-\lambda(t-s)} \cdot \alpha \cdot \|\varphi(s, t_0, \xi)\| ds.$$

Умножив обе части последнего равенства на $e^{\lambda(t-t_0)}$, получим

$$e^{\lambda(t-t_0)} \cdot \|\varphi(t, t_0, \xi)\| \leq nk \|\xi\| + nk\alpha \cdot \int_{t_0}^t e^{\lambda(s-t_0)} \cdot \|\varphi(s, t_0, \xi)\| ds.$$

Заметим, что $\tilde{\lambda} = nk \cdot \|\xi\| = \text{const} > 0$; $\mu = nk\alpha = \text{const} > 0$; $e^{\lambda(t-t_0)} \cdot \|\varphi(t, t_0, \xi)\| = u(t)$ — положительная непрерывная функция. Видим, что функция $u(t)$ на промежутке $[t_0, \beta]$ удовлетворяет условиям леммы Гронуола. Поэтому будем иметь $u(t) \leq \tilde{\lambda} e^{\mu(t-t_0)}$, $t \in [t_0, \beta]$, или

$$\|\varphi(t, t_0, \xi)\| e^{\lambda(t-t_0)} \leq nk \|\xi\| \cdot e^{nk\alpha(t-t_0)};$$

отсюда $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| \leq nk \|\xi\| \cdot e^{(nk\alpha - \lambda)(t-t_0)}$, $t \in [t_0, \beta]$. Так как $t - t_0 \geq 0$, $t \in [t_0, \beta]$; $nk\alpha - \lambda < 0$ (см. (4)), то $e^{(nk\alpha - \lambda)(t-t_0)} \leq 1$ и, следовательно, $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| \leq nk \|\xi\|$. Но тогда $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| < \varepsilon$, $t \in [t_0, \beta]$, если брать ξ удовлетворяющим условию $\|\xi\| < \delta$, где $\delta = \frac{\varepsilon}{nk}$.

Итак, мы убедились, что любому $\varepsilon > 0$ можно поставить в соответствие число $\delta > 0$ ($\delta = \frac{\varepsilon}{nk}$), такое, для любого ξ , удовлетворяющего условию $\|\xi\| < \delta$, будет $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| < \varepsilon$, если $t \in [t_0, \beta]$.

Пусть вектор ξ — любой, но такой, что $\|\xi\| < \delta$ ($\delta = \frac{\varepsilon}{nk}$).

Пусть $[t_0, \beta)$ — максимальный промежуток, на котором решение $X = \varphi(t, t_0, \xi)$ системы (3) удовлетворяет неравенству $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| < h$. Покажем, что $\beta = +\infty$.

Рассуждаем от противного, а именно, предполагаем, что $\beta < +\infty$. Но тогда решение $X = \varphi(t, t_0, \xi)$, $t \in [t_0, \beta)$, обладает свойством: точки $(t, \varphi(t, t_0, \xi))$, $t \in [t_0, \beta)$, оказываются принадлежащими ограниченной замкнутой области $(\bar{G}^*)$, содержащейся в области $(\tilde{G})$ ($(\bar{G}^*) \subset (\tilde{G})$). Значит, решение $X = \varphi(t, t_0, \xi)$, $t \in [t_0, \beta)$, продолжимо вправо, а следовательно, существует

$$\lim_{t \rightarrow \beta-0} \varphi(t, t_0, \xi) = \xi_1, \text{ причем точка } (\beta, \xi_1) \in (\bar{G}^*) \subset (\tilde{G}).$$

Рассмотрим вектор $\varphi(\beta, t_0, \xi) = \xi_1$. Из предположения, что промежуток $[t_0, \beta)$ — максимальный вправо, на котором решение $X = \varphi(t, t_0, \xi)$ удовлетворяет неравенству $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| < h$, следует, что

$$\|\xi_1\| = h \quad (*)$$

(иначе промежуток $[t_0, \beta)$ не был бы максимальным вправо в указанном выше смысле). Но, с другой стороны, из неравенства

$$\|\varphi(t, t_0, \xi)\| < \varepsilon \quad (7)$$

при $t \rightarrow \beta - 0$ находим

$$\|\varphi(\beta, t_0, \xi)\| = \|\xi_1\| \leq \varepsilon < h. \quad (**)$$

Сопоставляя соотношения (*) и (**), видим, что пришли к противоречию. Значит, наше предположение, что $\beta < +\infty$, неверно, и, следовательно, $\beta = +\infty$.

Таким образом, $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| < \varepsilon$ для $t \in [t_0, +\infty)$, если только $\|\xi\| < \delta$, где $\delta = \frac{\varepsilon}{nk}$. Последнее означает, что решение $X = 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (3) устойчиво.

Покажем теперь, что решение $X = 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (3) асимптотически устойчиво.

Для любого ξ , удовлетворяющего условию $\|\xi\| < h$, и для всех $t \in [t_0, +\infty)$ была получена следующая оценка решения $X = \varphi(t, t_0, \xi)$, $t \in [t_0, \beta)$, системы (3):

$$\|\varphi(t, t_0, \xi)\| \leq nk\|\xi\| \cdot e^{(nk\alpha - \lambda)(t - t_0)}. \quad (8)$$

Так как $\delta = \frac{\varepsilon}{nk} < \varepsilon$, а $\varepsilon < h$, и так как $\beta = +\infty$, то оценка (8)

будет верна для любого ξ , удовлетворяющего условию $\|\xi\| < \delta$, и для всех $t \in [t_0, +\infty)$. Принимая во внимание, что $(nk\alpha - \lambda)(t - t_0) < 0$ для $t \in [t_0, +\infty)$, получаем из (8): $\|\varphi(t, t_0, \xi)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Следовательно, решение $X \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системы (3) асимптотически устойчиво. ◀

Замечание. Доказанная теорема дает весьма удобный признак асимптотической устойчивости решений широкого класса систем дифференциальных уравнений и очень часто применяется в практических задачах.

Изложенное в настоящей главе следует рассматривать лишь как скромное введение в изучение начал теории устойчивости движения, созданной великим русским ученым Александром Михайловичем Ляпуновым и изложенной им в сочинении «Общая теория устойчивости движения». Особенная значимость этой теории состоит в том, что мы, часто не умея интегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений, тем не менее можем делать заключения об устойчивости или неустойчивости движения, определяемого этой системой.

§6. Примеры и задачи к главе 8

Задача 1. Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, выяснить, устойчивы ли при $t \geq 0$ решения уравнения

$$\frac{dy}{dt} = -y + t + 1, \quad y|_{t=0} = y_0.$$

Решение. Решая заданное уравнение, находим, что всякое его решение выражается формулой $y(t) = y_0 e^{-t} + t$. Возьмем любые два решения этого уравнения, удовлетворяющие соответственно

условиям: $\tilde{y}|_{t=0} = \tilde{y}_0$, $\tilde{y}'|_{t=0} = \tilde{y}'_0$. Это будут: $\tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 e^{-t} + t$ и $\tilde{y}'(t) = \tilde{y}'_0 e^{-t} + 1$. А тогда

$$\tilde{y}(t) - \tilde{y}'(t) = (\tilde{y}_0 - \tilde{y}'_0) e^{-t} \Rightarrow |\tilde{y}(t) - \tilde{y}'(t)| = |\tilde{y}_0 - \tilde{y}'_0| e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Вывод: Все решения заданного уравнения асимптотически устойчивы при $t \geq 0$.

Задача 2. Исходя из определения устойчивости по Ляпунову исследовать на устойчивость при $t \geq 1$ решение уравнения

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a}{t} y, \quad y|_{t=1} = 0.$$

Решение. Решая заданное уравнение, находим, что всякое его решение, удовлетворяющее условию $y|_{t=1} = y_0$, выражается формулой $y(t) = y_0 t^a$. Следовательно, решение, удовлетворяющее условию $y|_{t=1} = 0$, есть $\tilde{y}(t) \equiv 0$, $t \geq 1$. А тогда

$$y(t) - \tilde{y}(t) = y_0 t^a - 0 = y_0 t^a \Rightarrow |y(t) - \tilde{y}(t)| = |y_0| \cdot t^a.$$

Видим, что:

- 1) если $a = 0$, то $|y(t) - \tilde{y}(t)| = |y_0|$;
- 2) если $a < 0$, то $|y(t) - \tilde{y}(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$;
- 3) если $a > 0$, то $|y(t) - \tilde{y}(t)| \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

Вывод. Решение $\tilde{y}(t) \equiv 0$, $t \geq 1$:

- а) устойчиво при $a \leq 0$;
- б) асимптотически устойчиво при $a < 0$;
- γ) неустойчиво при $a > 0$.

Задача 3. Исследовать на устойчивость решения системы

$$\frac{dY}{dt} = A \cdot Y, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}.$$

Решение. Заданная система есть система с постоянными коэффициентами. Поэтому вопрос об устойчивости решений этой системы определяется собственными числами ее матрицы A . Собственные числа матрицы A находим из уравнения

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -\lambda & -2 \\ 5 & -4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 9\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 8) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}.$$

Видим, что $\operatorname{Re} \lambda_1 = 1 > 0$, $\operatorname{Re} \lambda_2 = \operatorname{Re} \frac{\sqrt{33} - 1}{2} > 0$. Выполнение даже одного из этих двух соотношений означает, что решения заданной системы неустойчивы.

Задача 4. Исследовать на устойчивость решения системы

$$\frac{dY}{dt} = A \cdot Y, \text{ где } A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ -15 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}.$$

Решение. Заданная система есть система с постоянными коэффициентами. Следовательно, вопрос об устойчивости решений этой системы определяется собственными числами ее матрицы A . Собственные числа матрицы A находим из уравнения

$$\begin{vmatrix} -6 - \lambda & 2 & 1 \\ -5 & 1 - \lambda & 1 \\ -15 & 6 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -1.$$

Видим, что $\operatorname{Re} \lambda_k = -1 < 0$, $k = 1, 2, 3$. Значит, решения заданной системы асимптотически устойчивы.

Задача 5. Исследовать на устойчивость решения системы

$$\frac{dY}{dt} = A \cdot Y, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}.$$

Решение. Заданная система есть система с постоянными коэффициентами. Следовательно, вопрос об устойчивости решений этой системы определяется собственными числами ее матрицы A . Собственные числа матрицы A находим из уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ -6 & 2-\lambda & 6 \\ 4 & -1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0.$$

Находим жорданову форму J матрицы A . Она будет такой:

$$J = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \end{array} \right).$$

Видим, что $\operatorname{Re} \lambda_2 = \operatorname{Re} \lambda_3 = 0$ и что собственному числу 0 матрицы A соответствует клетка Жордана второго порядка. Значит, решения заданной системы неустойчивы.

Задача 6. Исследовать на устойчивость решения системы

$$\frac{dY}{dt} = A \cdot Y, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 8 \\ 2 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}.$$

Решение. Заданная система есть система с постоянными коэффициентами. Следовательно, вопрос об устойчивости решений этой системы определяется собственными числами ее матрицы A . Собственные числа матрицы A находим из уравнения

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & 8 \\ 2 & -3-\lambda & 6 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+5) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2+i, \lambda_3 = 2-i.$$

Видим, что $\operatorname{Re} \lambda_1 = 1 > 0$, $\operatorname{Re} \lambda_2 = 2 > 0$, $\operatorname{Re} \lambda_3 = 2 > 0$. Выполнение даже одного из этих трех соотношений означает, что решения заданной системы неустойчивы.

Задача 7. Найти все вещественные значения параметров α и β , при которых решения системы уравнений

$$\frac{dY}{dt} = A \cdot Y, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & \beta \\ -\alpha & -1 & \alpha \\ -\beta & -\alpha & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

асимптотически устойчивы.

Решение. Собственные числа матрицы A находим из уравнения

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & \alpha & \beta \\ -\alpha & -1-\lambda & \alpha \\ -\beta & -\alpha & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 1 + \beta^2 + 2\alpha^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -1 + i\sqrt{\beta^2 + 2\alpha^2}, \quad \lambda_3 = -1 - i\sqrt{\beta^2 + 2\alpha^2}.$$

Видим, что $\operatorname{Re} \lambda_k = -1 (< 0)$, $k = 1, 2, 3$ при любых вещественных α и β . Следовательно, решения заданной системы асимптотически устойчивы при любых вещественных значениях параметров α и β .

Задача 8. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 2y_1 - \ln(1 + y_2) + \sin y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = e^{y_1} + \sin(y_1 + y_2) - \cos^2 y_2. \end{cases}$$

Решение. Линеаризуем заданную систему уравнений в окрестности точки $(0, 0)$. Имеем

$$\begin{aligned} f_1 &= 2y_1 - \ln(1 + y_2) + \sin y_1 = \\ &= 2y_1 - \left(y_2 - \frac{y_2^2}{2} + \frac{y_2^3}{3} - \dots \right) + \left(y_1 - \frac{y_1^3}{3!} + \frac{y_1^5}{5!} - \dots \right); \end{aligned}$$

$$f_2 = e^{y_1} + \sin(y_1 + y_2) - \cos^2 y_2 = e^{y_1} + \sin(y_1 + y_2) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2y_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_2 = 1 + \frac{y_1}{1!} + \frac{y_1^2}{2!} + \dots + \left((y_1 + y_2) - \frac{(y_1 + y_2)^3}{3!} + \dots \right) - \\ - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(2y_2)^2}{2!} + \dots \right).$$

Составляем систему уравнений первого приближения. Будем иметь

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 3y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = 2y_1 + y_2. \end{cases}$$

Таким образом, получили систему $\frac{dY}{dt} = A \cdot Y$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$. Собственные числа матрицы A находим из уравнения

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 + i, \lambda_2 = 2 - i.$$

Имеем: $\operatorname{Re} \lambda_1 = 2 > 0$, $\operatorname{Re} \lambda_2 = 2 > 0$. Выполнение даже одного из этих двух неравенств означает, что решение $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ заданной системы неустойчиво.

Задача 9. Исследовать на устойчивость все положения равновесия системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -2y_1 + y_2 + y_1^3, \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_1 - 2y_2 + 3y_1^5. \end{cases}$$

Решение. Положения равновесия данной системы определяются из системы

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_1^3 = 0, \\ -y_1 - 2y_2 + 3y_1^5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 1) & y_1 = 0, & 2) & y_1 = 1, & 3) & y_1 = -1, \\ & y_2 = 0; & & y_2 = 1; & & y_2 = -1. \end{matrix}$$

Получили три положения равновесия. Исследуем вопрос об устойчивости каждого из них.

I. Составляем систему уравнений первого приближения, соответствующую положению равновесия $y_1 = 0$, $y_2 = 0$. Это будет система

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -2y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_1 - 2y_2, \end{cases} \text{ т. е. } \frac{dY}{dt} = A \cdot Y,$$

где $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$.

Собственные числа матрицы A находим из уравнения

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda+2)^2 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -2 + i, \lambda_2 = -2 - i.$$

Имеем $\operatorname{Re} \lambda_1 = -2 (< 0)$ и $\operatorname{Re} \lambda_2 = -2 (< 0)$. Значит, положение равновесия $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ асимптотически устойчиво.

II. Составляем систему уравнений первого приближения, соответствующую положению равновесия, $y_1 = 1$, $y_2 = 1$. Для этого представим правые части заданной системы уравнений по формуле Тейлора в окрестности положения равновесия $y_1 = 1$, $y_2 = 1$. Будем иметь

$$f_1 = -2y_1 + y_2 + y_1^3 = (y_1 - 1) + (y_2 - 1) + \dots,$$

$$f_2 = -y_1 - 2y_2 + 3y_1^5 = 14(y_1 - 1) - 2(y_2 - 1) + \dots$$

Значит, система уравнений первого приближения, соответствующая положению равновесия $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, будет такой:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = (y_1 - 1) + (y_2 - 1), \\ \frac{dy_2}{dt} = 14(y_1 - 1) - 2(y_2 - 1). \end{cases}$$

Сделаем замену, положив $u = y_1 - 1$, $v = y_2 - 1$. Относительно функций u и v полученная система первого приближения будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u + v, \\ \frac{dv}{dt} = 14u - 2v. \end{cases}$$

Матрица A этой системы такая: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 14 & -2 \end{pmatrix}$. Собственные числа матрицы A находим из уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 14 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 16 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda_1$ и λ_2 — вещественные и имеют разные знаки. Следовательно, положение равновесия $y_1 = 1$, $y_2 = 1$ заданной системы неустойчиво.

III. Составляем систему уравнений первого приближения, соответствующую положению равновесия $y_1 = -1$, $y_2 = -1$.

Для этого представим правые части заданной системы по формуле Тейлора в окрестности положения равновесия $y_1 = -1$, $y_2 = -1$. Будем иметь

$$\begin{aligned} f_1 &= -2y_1 + y_2 + y_1^3 = (y_1 + 1) + (y_2 + 1) + \dots, \\ f_2 &= -y_1 - 2y_2 + 3y_1^5 = 14(y_1 + 1) - 2(y_2 + 1) + \dots \end{aligned}$$

Значит, система уравнений первого приближения, соответствующая положению равновесия $y_1 = -1$, $y_2 = -1$, будет такой:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = (y_1 + 1) + (y_2 + 1), \\ \frac{dy_2}{dt} = 14(y_1 + 1) - 2(y_2 + 1). \end{cases}$$

Сделаем замену, положив $u = y_1 + 1$, $v = y_2 + 1$. Относительно функций u и v полученная система первого приближения будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u + v, \\ \frac{dv}{dt} = 14u - 2v. \end{cases}$$

Матрица A этой системы такая: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 14 & -2 \end{pmatrix}$. Собственные числа матрицы A находим из уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 14 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 16 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ корни λ_1 и λ_2 — вещественные и имеют разные знаки. Следовательно, положение равновесия заданной системы $y_1 = -1$, $y_2 = -1$ неустойчиво.

Задача 10. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \operatorname{tg}(y_3 - y_2) - 2y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = \sqrt{9 + 12y_1} - 3e^{y_2}, \\ \frac{dy_3}{dt} = -3y_2. \end{cases}$$

Решение. Составим систему уравнений первого приближения, соответствующую решению $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$. Для этого представим правые части заданной системы с помощью формулы Тейлора в окрестности точки $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$. Будем иметь

$$\begin{aligned} f_1 &= \operatorname{tg}(y_3 - y_2) - 2y_1 = -2y_1 - y_2 + y_3 + \dots, \\ f_2 &= \sqrt{9 + 12y_1} - 3e^{y_2} = 3\left(1 + \frac{2}{3}y_1 + \dots\right) - 3(1 + y_2 + \dots), \\ f_3 &= -3y_2. \end{aligned}$$

Система уравнений первого приближения в окрестности точки $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ будет такой:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -2y_1 - y_2 + y_3, \\ \frac{dy_2}{dt} = 2y_1 - 3y_2, \\ \frac{dy_3}{dt} = -3y_2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы A находим из уравнения

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & -1 & 1 \\ 2 & -3 - \lambda & 0 \\ 0 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1 + i, \lambda_3 = -1 - i.$$

Видим, что $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ для $k = 1, 2, 3$.

Вывод. Нулевое решение заданной системы асимптотически устойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1975.
2. Бибииков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981.
3. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
4. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Л.: Изд-во ЛГУ, 1955.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
7. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т. 2 и т. 3, ч. 2. М.—Л.: ГИТТЛ, 1952.
8. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1952.
9. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980.
10. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.
11. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения; примеры и задачи. М.: Высшая школа, 1989.
12. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1973.

Дополнительная:

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. М.: Наука, 1967.
2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т. 2. М.: Высшая школа, 1981.
3. Толстов Г.П. Курс математического анализа, т. 2. М.: ГИТТЛ, 1957.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3. М.—Л.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958.
5. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984.